


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 09078746 0




NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 09078746 0

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

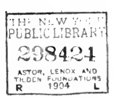
HERAUSGEGEBEN
VON
GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

3 3

DRITTE FOLGE. DRITTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON E. DE JONQUIÈRES ALS TITELBILD,
DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON A. HELLER UND G. WERTHEIM,
SOWIE 37 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.





Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Aktuelle Fragen.

Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

Wenn man eine historische Darstellung der bisherigen Untersuchungen auf einem sehr beschränkten Gebiete der Mathematik geben will, kann man zwar den Lesern die Übersicht erleichtern, wenn man die Darstellung in Abschnitte einteilt, aber von wesentlicher Bedeutung ist ein solches Verfahren hier nicht. Hat man dagegen die Geschichte einer umfangreichen mathematischen Theorie oder sogar der ganzen Mathematik in einem Zusammenhange zu bearbeiten, und begnügt man sich nicht mit einer chronologisch-tabellarischen Behandlung des gegebenen Materials oder mit einer Reihe von wissenschaftlichen Biographien der in Betracht kommenden Mathematiker, so ist es wohl durchaus notwendig, besondere Marksteine zu wählen, durch die man entweder die ganze Schilderung oder wenigstens Hauptstücke derselben in Zeitabschnitte einteilt. Zu solchen Marksteinen kann z. B. der Beginn eines neuen Jahrhunderts oder eine andere runde Jahreszahl, ein bedeutungsvolles weltgeschichtliches Ereignis oder das Auftreten eines hervorragenden Mathematikers gewählt werden; in jedem Falle hat man die Möglichkeit bekommen, auch bei einer systematischen Behandlung des Stoffes die verschiedenartigen Untersuchungen eines gewissen Zeitraumes zusammenzustellen, ehe man zur Schilderung der nachfolgenden Forschungen übergeht. Nennt man „Periode“, den Zeitraum zwischen zwei solchen Marksteinen, die einander nicht allzu nahe liegen, so bietet es gar keine Schwierigkeit, die historische Darstellung in Perioden einzuteilen, und man hat dabei ganz freie Wahl, so dafs man z. B., um überall die Übersichtlichkeit zu bewahren, zuerst wichtige Ereignisse, dann runde Jahreszahlen, und zuletzt das Auftreten bedeutender Mathematiker als Periodengrenzen anwenden kann. Freilich kann es dabei leicht vorkommen, dafs Arbeiten, die aus inneren oder äusseren Gründen zusammengehören, in der Darstellung weit von einander entfernt werden müssen.

Legt man dagegen grofses Gewicht darauf, dafs die mathematischen Untersuchungen, die wesentlich zusammengehören, nicht unnötigerweise von einander getrennt werden, so mufs man sich offenbar nach solchen

Marksteinen umsehen, welche das Ende oder den Beginn einer im wissenschaftlichen Sinne abgeschlossenen oder neuen Zeit bezeichnen; da es aber von vornherein gar nicht ausgemacht ist, dafs Marksteine dieser Art wirklich existieren, wird die erste Frage, die wir hier zu erledigen haben, die folgende sein: Giebt es überhaupt in der Geschichte der Mathematik Perioden im wissenschaftlichen Sinne, d. h. Zeitabschnitte, die wissenschaftlich abgeschlossen sind? Diese Frage ist zwar von einigen Verfassern im Vorübergehen gestreift, aber meines Wissens noch nicht näher untersucht worden.

Schon bei flüchtiger Überlegung zeigt sich uns ein Umstand, der der Bildung von wissenschaftlich abgeschlossenen Perioden entgegensteht, sobald es sich um die ganze Mathematik oder einen grösseren Teil derselben handelt, nämlich dafs die besonderen mathematischen Theorien sich oft unabhängig von einander entwickelt haben, und schon aus diesem Grunde erweist es sich vorläufig wenig wahrscheinlich, dafs sie alle oder wenigstens fast alle gleichzeitig zu einem gewissen Abschlusse gebracht werden. Bei genauerer Untersuchung der Frage entdecken wir noch einen ähnlichen Umstand, nämlich dafs die Entwickelung jeder einzelnen Theorie im allgemeinen nicht nach logischen Gesetzen vor sich geht, sondern von zufälligen Verhältnissen beeinflufst worden ist, so dafs in vielen Theorien neue Probleme auftreten, ehe die alten noch erledigt worden sind, und die Theorie selbst eigentlich nie zu einem gewissen Abschlusse gelangt. Um die Einwirkung dieses letzten Umstandes deutlich hervorzuheben, erlauben wir uns anzunehmen, dafs die Geometrie lediglich den Zweck gehabt hat, die drei berühmten Probleme: *duplicatio cubi*, *trisectio anguli*, *quadratura circuli* zu lösen, und machen zuerst die weitere Annahme, dafs die Geometrie sich vollständig regelmäfsig entwickelt hat. Dann könnte man die Geschichte der Geometrie in grofsen Zügen etwa auf folgende Weise darstellen. Zuerst wurden die elementar-geometrischen Sätze erfunden, die geeignet schienen, die drei Probleme zu lösen, aber nach vielen Versuchen erwies sich die Lösung auf diesem Wege faktisch unmöglich; damit war die erste Periode der Geometrie abgeschlossen. Die zweite Periode begann mit Bestrebungen neue geometrische Gebilde aufzufinden, und nachdem die Kegelschnitte entdeckt worden waren, gelang es die zwei ersten Probleme zu erledigen; dagegen konnte das dritte Problem mit den vorhandenen Hilfsmitteln nicht gelöst werden, und die zweite Periode war beendet. Während der dritten Periode machte man anfangs viele Versuche, die Quadratur des Kreises vermittelst höherer algebraischer Kurven zu finden, aber da diese immer ohne Erfolg waren, stellte man Untersuchungen über die zwei folgenden Fragen an: 1) ist es möglich, die Quadratur des Kreises auf diesem Wege zu ermitteln?; 2) wenn es unmöglich ist, welche

Kurven braucht man um das Problem zu lösen?, und nachdem diese zwei Fragen erledigt waren, war auch die dritte Periode abgeschlossen.

Wäre die Entwickelung der Geometrie regelmäfsig vor sich gegangen, so würde man also drei wirkliche Perioden gehabt haben, aber die Geschichte der Mathematik hat etwas ganz anderes zu erzählen. Sie belehrt uns nämlich u. a., dafs für die Quadratur des Kreises höhere Kurven benutzt wurden, lange bevor man darauf verzichtet hatte, dieselbe rein elementar zu finden, und dafs auch im übrigen die Entwickelung nicht begriffsmäfsig gewesen ist, so dafs man gar nicht drei Perioden unterscheiden kann. Hierzu kommt noch, dafs die Erledigung der Frage, ob die Quadratur des Kreises vermittelst algebraischer Kurven ausgeführt werden kann, nicht eine *geometrische* Errungenschaft gewesen ist, und man kann also eigentlich nicht sagen, dafs die fingierte Geometrie an sich zu einem Abschlusse gebracht worden ist.

Aus dem, was wir jetzt bemerkt haben, dürfte hervorgehen, dafs die Geschichte der Mathematik nur ausnahmsweise Perioden in streng wissenschaftlichem Sinne aufweisen kann, und besonders unwahrscheinlich mufs das Vorkommen solcher Perioden für die moderne Mathematik sein, die aus einer grofsen Anzahl von verschiedenen Theorien besteht. Auf der anderen Seite ist es ja unmöglich, eine übersichtliche Darstellung der Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu bieten, ohne dieselbe in Zeitabschnitte zu verteilen. Man könnte meinen, dafs es zweckmäfsiger wäre, für jede einzelne Theorie die Grenzen zwischen den Zeitabschnitten nur mit Bezugnahme auf den Entwickelungsgang dieser Theorie zu bestimmen, ohne sich darum zu bekümmern, ob zwei Theorien dabei dieselben Zeitgrenzen bekommen oder nicht. Bei der Darstellung würde man in solchem Falle zuerst in systematischer Reihenfolge die Geschichte der verschiedenen Theorien bis zur ersten Zeitgrenze (die also für jede Theorie verschieden sein kann) verfolgen, dann die weitere Entwickelung derselben Theorien in derselben Reihenfolge bis zur zweiten Zeitgrenze (die auch für jede Theorie wechseln kann) behandeln u. s. w. Gewifs wäre es unter solchen Umständen leichter zu vermeiden, dafs in der Darstellung zusammengehörende Forschungsresultate von einander getrennt werden, aber die Übersichtlichkeit geht verloren, und das Verfahren bringt auch andere Übelstände mit sich. Viel besser wäre es dann meiner Ansicht nach, die verschiedenen Theorien besonders zu behandeln, aber auch dann ist es erforderlich, eine kurze Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik hinzuzufügen, und man wird also auf die frühere Frage über Periodeneinteilung zurückgeführt. Freilich hat die Frage dann nicht so grofse Bedeutung wie früher, und man kann darum ohne eigentliche Übelstände als Periodengrenzen solche Zeitpunkte wählen, in denen entweder sehr

wichtige Theorien zu einem gewissen Abschlusse gebracht worden sind oder Neuerungen auftreten, die für die Entwickelung auf einem wichtigen Gebiete als epochemachend betrachtet werden können. Selbstverständlich ist es nicht notwendig für alle Theorien die Entwickelung *genau* bis zum bestimmten Zeitpunkte zu verfolgen, aber natürlich dürfen Abweichungen nicht ohne wichtige Gründe vorkommen.

Ich habe bisher vorausgesetzt, daſs bei der Periodeneinteilung nur *Zeit*grenzen in Betracht kommen können, und für die moderne Mathematik ist wohl diese Voraussetzung ohne weitere Begründung erlaubt. Für die ältere Mathematik dagegen stellt sich die Sache etwas anders, und es ist also notwendig zu untersuchen, inwieweit bei der Schilderung derselben auch *Volks*grenzen berücksichtigt werden müssen. Betrachtet man die Geschichte der Mathematik in erster Linie als eine Abteilung der Kulturgeschichte, so liegt es natürlich sehr nahe, die Geschichte der Mathematik in Abschnitte einzuteilen, die kulturhistorisch abgeschlossen sind, und bei einer solchen Einteilung bekommen die Volksgrenzen eine hervorragende Bedeutung für das Altertum und das Mittelalter. Von diesem Gesichtspunkte aus empfiehlt es sich also, mit Herrn M. Cantor folgende Hauptabschnitte einzuführen: 1) Ägypter; 2) Babylonier; 3) Griechen und Byzantiner; 4) Römer; 5) Inder; 6) Chinesen; 7) Araber; 8) Christliches Mittelalter, und den letzten Abschnitt im Bedarfsfalle nach Volksstämmen zu gliedern. Dann wäre zu untersuchen, ob und auf welche Weise die Hauptabschnitte in Perioden eingeteilt werden sollen.

Betrachtet man dagegen die Geschichte der Mathematik in erster Linie als einen selbständigen Zweig der mathematischen Wissenschaften, so verlieren die Volksgrenzen den gröſsten Teil ihrer Bedeutung; nur in den Fällen, wo die Volksgrenzen einen wesentlichen und wirklich konstatierten Einfluſs auf die Entwickelung der Mathematik gehabt haben, sind sie bei der Periodeneinteilung zu berücksichtigen. Sonst ist es ja gleichgiltig, ob zwei Mathematiker, die etwa gleichzeitig Entdeckungen auf einem gewissen Gebiete gemacht haben, demselben Volksstamme angehören oder nicht. War die eine Entdeckung von der anderen abhängig, so liegt wohl darin ein hinreichender Grund, um dieselben in jedem Falle zusammen zu behandeln; waren sie von einander unabhängig, ist es eigentlich nicht zu ersehen, warum im zweiten Falle die Nationalität des einen Mathematikers eine Trennung von zusammengehörenden Gegenständen verursachen soll.

Wenn man die jetzt angegebenen Grundsätze als richtig anerkennt, dürfte es verhältnismäſsig leicht sein, die Gliederung der Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter durchzuführen, und ich denke mir, daſs sich die folgende Anordnung als zweckmäſsig erweisen wird.

In einer Einleitung behandelt man die vorwissenschaftliche Mathematik der Ägypter und Babylonier sowie der Inder im vorchristlichen Zeitraume, und die erste Periode umfafst die griechische Mathematik etwa bis zum Tode des Apollonios oder möglicherweise etwas weiter. Die zweite Periode schliefst die spätgriechische und die römische Mathematik, sowie die indische, die arabische und die christliche Mathematik im Mittelalter bis zum Jahre 1200 ein. Mit dem Auftreten des Leonardo Pisano fängt die dritte Periode an, und als Ende derselben empfiehlt es sich, die Entdeckung der Lösung kubischer Gleichungen (etwa 1515) zu betrachten.

Mit der vierten Periode beginnt die neuere Mathematik, und dann stellen sich auch die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der Periodeneinteilung ein. Wir haben schon oben bemerkt, dafs die einzelnen mathematischen Theorien ziemlich selten zu einem eigentlichen Abschlusse gebracht werden können, und auch wenn ein solcher Abschlufs wirklich konstatiert wird, kann er im allgemeinen nicht zur Periodengrenze gewählt werden, weil die betreffende Theorie für diesen Zweck nicht hinreichend wichtig ist. So z. B. wäre es kaum zu empfehlen, am Anfange des 19. Jahrhunderts eine neue Periode aus dem Grunde zu beginnen, weil die kombinatorische Analysis damals wesentlich aufhörte weiter ausgebildet zu werden. Wir haben also hauptsächlich auf wichtige Neuerungen Rücksicht zu nehmen, aber freilich müssen wir immerhin dafür besorgt sein, dafs wir dabei solche wichtige Entwickelungsmomente, die wesentlich zusammengehören, nicht unnötigerweise trennen. Dagegen ist es meiner Ansicht nach eine Nebensache, ob die wissenschaftliche Wirksamkeit gewisser hervorragender Mathematiker auf zwei Perioden verteilt wird.

Sehen wir jetzt nach, welche Neuerungen auf dem mathematischen Forschungsgebiete seit dem Anfange des 16. Jahrhunderts als besonders wichtig betrachtet werden können! Zuerst begegnet uns da am Ende des 16. Jahrhunderts die Reformation der Algebra und der Trigonometrie durch Viète, und mit derselben könnte man bei ausführlicherer Darstellung sehr gut eine neue Periode beginnen. Die Erfindung der Logarithmen durch Neper ist zwar wichtig, aber kann aus verschiedenen Gründen hier kaum in Betracht kommen. Dagegen dürfte das Auftreten der analytischen Geometrie entschieden als ein Markstein bezeichnet werden können, und da etwa um dieselbe Zeit wichtige Erfindungen auf den Gebieten der synthetischen Geometrie (durch Desargues) und der Zahlentheorie (durch Fermat) gemacht wurden, empfiehlt es sich der vierten Periode die Zeit etwa 1515—1635 zuzuweisen.

Vor dem Ende des 17. Jahrhunderts haben wir noch eine epochemachende Neuerung zu verzeichnen, nämlich die Entstehung der höheren Analysis, und der damit historisch verknüpften Differentialgeometrie. Es

wäre also angemessen hier eine neue Periode zu beginnen, aber dabei treten gewisse Schwierigkeiten auf. Wählt man als Periodengrenze die ersten Untersuchungen von Newton auf dem Gebiete der höheren Analysis (etwa 1666), so wird die fünfte Periode zu kurz; nimmt man dagegen Bezug auf die erste Veröffentlichung der Gründe des neuen Kalkuls in den Acta eruditorum (1684), wird man genötigt, die eigentliche Entdeckung der höheren Analysis schon in der fünften Periode zu behandeln. Vielleicht wäre es darum angemessen, dieser Periode einen etwas grösseren Zeitraum zuzuweisen, so dafs sie nicht nur die Entdeckung, sondern auch die erste Ausbildung der Infinitesimalrechnung einschliefst. Eine neue Periode würde also erst dann beginnen, als die analytischen Hilfsmittel wesentlich die Form annahmen, die sie jetzt haben, und der Neuerer auf diesem Gebiete ist ja eigentlich Euler, so dafs die fünfte Periode die die Zeit etwa 1635—1728 umfassen würde.

Wie die Gliederung der Geschichte der modernen Mathematik seit Euler ausgeführt werden soll, ist eine Frage, die um so schwieriger ist, als ein Teil dieses Zeitraumes uns zu nahe liegt, um mit gebührender Objektivität beurteilt werden zu können. Meiner Ansicht nach soll auch nicht die untere Grenze der sechsten Periode festgestellt werden, ehe man über die Einteilung des ganzen 19. Jahrhunderts entschieden hat. Steht man überhaupt von einer solchen Einteilung ab, so dürfte es sich empfehlen die sechste Periode bis zu Cauchys epochemachenden funktionentheoretischen Untersuchungen zu erstrecken; will man dagegen das 19. Jahrhundert in zwei oder mehrere Perioden einteilen, so ist es wohl besser, die mit Euler beginnende Periode am Ende des 18. Jahrhunderts abzuschliefsen, wofür es gewifs auch nicht an Gründen fehlt.

Die vorangehenden Überlegungen dürften besonders geeignet sein um ersichtlich zu machen, wie schwierig oder beinahe unmöglich es sein mufs bei einer *wissenschaftlichen* Gesamtdarstellung der Entwickelung der neueren Mathematik eine passende Gliederung durchzuführen, und dadurch bestätigt sich auch meine oben geäufserte Meinung, dafs man die Entwickelungsgeschichte der Mathematik am besten darstellt, wenn man die einzelnen Theorien besonders behandelt und die Darstellung durch eine kurze Schilderung der Gesamtentwickelung ergänzt.

Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates.

Von Ferdinand Rudio in Zürich.

I. Einleitung.

Eine der wichtigsten Quellen für die Geschichte der griechischen Geometrie vor Euklid ist bekanntlich der Bericht, den uns Simplicius[1*]) in seinem Kommentare zu der Physik des Aristoteles hinterlassen hat. Enthält doch dieser Bericht, neben vielen anderen historisch höchst wertvollen Mitteilungen, einen umfangreichen wörtlichen Auszug aus der verloren gegangenen *Geschichte der Geometrie* des Eudemus.[2] Das uns auf diese Weise erhaltene Referat des Eudemus bezieht sich auf die scharfsinnigen Untersuchungen, die Hippokrates von Chios[3] in einer ebenfalls verloren gegangenen Abhandlung über die Quadraturen der sogenannten *„Möndchen“* angestellt hat, Untersuchungen, die vielleicht als Vorbereitungen zu der von alters her umworbenen Quadratur des Kreises gedient haben. Die Abhandlung des Hippokrates ist um so wertvoller, als sie die älteste auf griechischem Boden entstandene mathematische Veröffentlichung darstellt, von der wir sichere und einläfsliche Kunde haben.

Es ist das unbestrittene und bleibende Verdienst Bretschneiders, den Bericht des Simplicius in die mathematische Litteratur eingeführt zu haben. Zwar lag der Kommentar des Simplicius zur Physik des Aristoteles bereits hinreichend lange im Drucke vor, nämlich in der schon 1526 bei Aldus Manutius[4] in Venedig erschienenen Ausgabe, auch war der uns interessierende mathematische Teil jenes Kommentars in der von Spengel 1865 herausgegebenen Sammlung[5] der Fragmente des Eudemus abgedruckt, trotzdem aber war dieses wichtige Dokument den Mathematikern völlig unbekannt geblieben, bis Bretschneider den Bericht, Text mit hinzugefügter Übersetzung, in sein 1870 erschienenes Werk *Die*

*) Die Notenzeichen 1, 2 u. s. w. verweisen auf die Anmerkungen und Erläuterungen am Ende der Abhandlung.

Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES[6] aufnahm und ihn dadurch dem mathematischen Publikum zugänglich machte. Das Verdienst BRETSCHNEIDERS ist um so höher anzuschlagen, wenn man die Schwierigkeiten berücksichtigt, mit denen der Übersetzer wegen des an vielen Stellen ganz korrupten Textes der aldinischen Ausgabe zu kämpfen hatte.

Bei aller Anerkennung darf indessen doch nicht verschwiegen werden, dafs die BRETSCHNEIDERsche Übersetzung, auch abgesehen von den Fehlern, die auf Rechnung der *Aldina* zu setzen sind, ganz ungenügend ist. Ja sie ist sogar so fehlerhaft, dafs man oft Mühe hat, selbst nur zwei auf einander folgende Sätze zu finden, die einwandfrei wiedergegeben sind. Handelt es sich auch manchmal nur um kleinere Inkorrektheiten oder um ärgerliche Störungen im logischen Satzgefüge, so ist doch vielfach auch der Sinn bis zur Unkenntlichkeit entstellt oder sogar geradezu in das Gegenteil verwandelt.[7] Dieser Umstand scheint nicht hinreichend bekannt zu sein, denn sonst wäre es schwer zu verstehen, wie sich LORIA in seinem Werke *Le scienze esatte nell' antica Grecia* trotz Entfaltung eines gewissen gelehrten Apparates damit begnügen konnte, einfach die BRETSCHNEIDERsche Übersetzung, wenigstens in ihrem weitaus gröfsten Teile[8], Wort für Wort und mit allen ihren Fehlern aus dem Deutschen in das Italienische zu übertragen. Sollen sich solche Vorkommnisse nicht wiederholen und sollen sich jene Fehler und die damit verbundenen falschen Vorstellungen nicht immer weiter und weiter fortpflanzen, so dürfte es an der Zeit sein, wenn die mathematische Litteratur endlich einmal in den Besitz einer wirklich zuverlässigen Übersetzung des so wichtigen SIMPLICIUSschen Berichtes gelangen würde. Hierfür liegen zum Glück einige ausgezeichnete Vorarbeiten vor, namentlich solche, die sich auf den Teil des Berichtes beziehen, der das Referat des EUDEMUS enthält.

Die Übersetzung von BRETSCHNEIDER leidet nämlich noch an einem anderen Fehler, der allerdings schon frühzeitig erkannt worden ist. SIMPLICIUS hat nämlich zwar in seinem Berichte „das von EUDEMUS wörtlich Gesagte“ aus dessen *Geschichte der Geometrie* ausgezogen, hat es aber leider nicht unterlassen, eigene Erklärungen und erläuternde Zusätze in den Text einzuschieben. BRETSCHNEIDER war nun nicht in der Lage, diese Zuthaten von den Worten des EUDEMUS zu trennen, und so ist er denn wiederholt zu ganz unhaltbaren Schlüssen gelangt, die zu durchaus unrichtigen Vorstellungen über den Stand der mathematischen Wissenschaft zur Zeit des HIPPOKRATES geführt haben. Leider fanden die Resultate, zu denen BRETSCHNEIDER auf solche Weise gelangt war, ihren Weg auch in andere Werke, so z. B. auch in die *Vorlesungen* von CANTOR.[9]

Der erste, der eine Reinigung des eudemischen Textes von den Zuthaten des SIMPLICIUS versuchte, war ALLMAN. Er unternahm diese

Arbeit im Jahre 1881 mit Benutzung eines Kriteriums, von dem noch ausführlicher zu sprechen sein wird, und er gab eine englische Übersetzung des eudemischen Referates mit Unterdrückung der Stellen, die nach seiner Meinnng dem SIMPLICIUS znzuweisen waren.[10] Im Jahre 1882 erschien sodann die kritische Textansgabe des SIMPLICIUSschen Kommentars von DIELS[11], die den uns beschäftigenden Bericht in einer, der *Aldina* gegenüber, ganz wesentlich verbesserten Gestalt wiedergiebt. In dieser Ausgabe, bei der DIELS, soweit es sich um jenen Bericht handelt, von USENER unterstützt wurde, ist das, was von den Herausgebern als eudemisch angesehen worden ist, durch gesperrte Schrift hervorgehoben. Die Ausscheidung zwischen EUDEMUS nnd SIMPLICIUS, zu der DIELS und USENER gelangten nnd die zugleich von geeigneten Restitutionsvorschlägen begleitet war, stimmte aber nicht in allen Punkten mit der von ALLMAN unternommenen überein. In der Vorrede zu der DIELSschen Ansgabe hatte nnn bereits auch TANNERY in einer Reihe von kritischen Bemerkungen, die sich übrigens auf den ganzen Bericht des SIMPLICIUS bezogen, Stellung zu dieser eudemischen Frage genommen, um dann in einer 1883 erschienenen gröfseren Abhandlung[12] in eingehender Weise speziell auf das Referat des EUDEMUS zurückznkommen. In dieser Abhandlung nahm er nun ebenfalls eine Ausscheidung und eine Restitution des Textes vor, die er ausführlich motivierte, die sich aber nicht unwesentlich von der DIELS-USENERschen unterscheidet und sich auch mit der ALLMANschen nicht deckt. Zugleich fügte TANNERY eine französische Übersetzung hinzn, in der er ebenfalls die Stellen unterdrückte, die auf Grund der vorgenommenen Ausscheidung dem SIMPLICIUS zugewiesen worden waren. Endlich nahm auch noch HEIBERG in der Angelegenheit das Wort, indem er in einer 1884 erschienenen kritischen Besprechnng[13] znnächst eine Übersicht über den ganzen Inhalt des SIMPLICIUSschen Berichtes auf Grund der DIELSschen Ausgabe darbot, im Anschlusse daran die von DIELS-USENER und TANNERY vorgenommenen Ausscheidnngen und Restitntionsversuche einer ansführlichen Kritik unterwarf und eigene Vorschläge hinzufügte.

Meines Wissens ist damit die Zahl der kritischen Originaluntersuchungen, die sich auf den SIMPLICIUSschen Bericht im allgemeinen oder auf das Referat des EUDEMUS im besondereu beziehen, erschöpft. Die Veröffentlichungen, die etwa noch zu nennen wären, haben mehr den Charakter von Zusammenstellungen auf Grund der genannten Arbeiten. So gab TANNERY 1886 unter dem Titel *Hippocrate de Chios* eine Abhandlung[14] heraus, die dann das gleichnamige Kapitel seiner im Jahre 1887 erschienenen *Géométrie grecque*[15] bildete nnd die eine Würdigung der Leistungen des HIPPOKRATES, insbesondere natürlich auch seiner

Quadraturen enthält. Im Jahre 1889 veröffentlichte Allman sein Werk *Greek geometry from Thales to Euclid*[16], das im wesentlichen eine Zusammenfassung früher veröffentlichter Arbeiten[17] darstellt und das daher auch die auf den Bericht des Simplicius bezüglichen Untersuchungen in derselben Form wiedergiebt wie die bereits genannte Abhandlung. Von anderen Geschichtswerken seien hier nur noch kurz die von Hankel, Cantor und Zeuthen genannt. Dafs sich das im Jahre 1874 erschienene geistvolle Buch *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* des der Wissenschaft allzu früh entrissenen Hermann Hankel im wesentlichen auf Bretschneider stützt, ist selbstverständlich. Aber auch noch in dem dem Hippokrates gewidmeten Kapitel der 1894 erschienenen zweiten Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von Cantor ist Bretschneider die Hauptautorität, auf die sich die ganze Darstellung stützt. Citiert wird noch nach der Ausgabe von Spengel, die Arbeiten von Diels, Usener, Tannery und Heiberg sind nicht berücksichtigt. Dagegen sind diese Untersuchungen in der 1896 erschienenen *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* von Zeuthen verwertet, insofern dort eine auf der Darstellung von Tannery beruhende Übersicht über die Quadraturen des Hippokrates gegeben wird, die die Zuthaten des Simplicius bei Seite läfst.

Im Folgenden werde ich nun zunächst auf Grund der Dielsschen Ausgabe eine wortgetreue Übersetzung[18] des Simpliciusschen Berichtes geben, und zwar des ganzen Berichtes mit Einschlufs auch des letzten Teiles, den Bretschneider ohne jeden Grund weggelassen hat, indem er mitten in einem total mifsverstandenen Satze plötzlich abbrach. Dieser letzte Teil ist aber sehr interessant und für das Verständnis des ganzen Berichtes geradezu unentbehrlich.

Ich will nicht unterlassen, auch an dieser Stelle meinem verehrten Kollegen, Herrn Prof. Hitzig, meinen Dank auszusprechen für die freundliche Unterstützung, die er mir bei meiner Arbeit hat zu teil werden lassen. Wer sich je mit dem Simpliciusschen Berichte beschäftigt hat, der weifs, dafs er nicht unerhebliche philologische Schwierigkeiten darbietet. Diese alle zu überwinden, wäre mir ohne den bewährten Rat, auf den ich jederzeit rechnen durfte, nicht möglich gewesen.

Mit der Übersetzung waren aber naturgemäfs auch noch andere Aufgaben verbunden. Abgesehen nämlich von den etwa notwendigen Restitutionen des Textes, die mit der Ausscheidung zwischen Eudemus und Simplicius zusammenhängen und die doch immerhin nur einen Teil des Berichtes betreffen, ist auch der Text als solcher in der Dielsschen Ausgabe noch nicht überall völlig gesichert. Noch finden sich von den Handschriften herrührende verdorbene Stellen und Lücken vor, oder auch

Stellen, die von dem Herausgeber oder anderen als verdorben oder lückenhaft angesehen und dementsprechend korrigiert worden sind. Zu diesen Schwierigkeiten mufste der Übersetzer natürlich Stellung nehmen; ich war aber in der Lage, in einer Reihe von Fällen den ursprünglichen Wortlaut des Textes wiederherstellen zu können. Natürlich wurde jede Abweichung von der DIELSschen Ausgabe in den Anmerkungen, die den dritten Teil meiner Arbeit bilden, genau bezeichnet und begründet.

Anch an der EUDEMUSfrage konnte und wollte selbstverständlich die Übersetzung nicht vorübergehen. Es war mir indessen nicht möglich, mich einer der bereits erwähnten Ausscheidungen anzuschliefsen. Vielmehr habe ich die Überzeugung gewonnen, dafs die Frage, was dem EUDEMUS und was dem SIMPLICIUS gehöre nnd wie etwa nach vollzogener Ausscheidung der eudemische Text zu restituieren sei, noch keineswegs ausreichend beantwortet ist. Ich denke dabei nicht an unbedeutende Einzelheiten, über deren Herkunft man sich vielleicht niemals einigen wird nnd bei denen es schliefslich anch gleichgültig ist, ob man sie als Original oder als Zuthat betrachtet, ich denke anch nicht einmal an die beiden wichtigen und viel besprochenen Stellen auf Seite 65, 7—23 und 66, 14—22, die sich angeblich in einem ganz trostlosen Zustande befinden und über deren Interpretation die Meinnngen noch weit auseinandergehen, — es sind vielmehr die prinzipiellen, gleich zu Anfang des eudemischen Referates auftretenden Fragen, die mir einer ernenten Diskussion wert zu sein scheinen: *Wie verhält es sich mit der rätselhaften, von den einen dem* HIPPOKRATES, *von den anderen dem* SIMPLICIUS *zugeschriebenen Definition, nach der ähnliche Segmente solche sein sollen, die „gleichvielte Teile ihrer Kreisflächen" ausmachen? Ist es wahr, was* BRETSCHNEIDER *und nach ihm andere behauptet haben, dafs* HIPPOKRATES *die Beziehung des Peripheriewinkels zu seinem Centriwinkel und daher auch die Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen noch nicht gekannt habe? Wie hat* HIPPOKRATES *die ähnlichen Segmente definiert?* Das sind fundamentale Fragen, die noch nicht erledigt sind, über die man aber schliefslich einmal Klarheit gewinnen mnfs, wenn man einen Einblick in den Znstand der Geometrie zur Zeit des HIPPOKRATES erlangen will. —

Der Bericht des SIMPLICIUS verdankt seine Entstehung einer Bemerkung, die ARISTOTELES an einer bestimmten Stelle seiner *Physik* macht (ARISTOTELES, ed. BEKKER, I, p. 185ᵃ, 12—17). ARISTOTELES wendet sich dort gegen die eleatische Weltanschauung, die das Seiende als „eins und unwandelbar" auffafst, und erklärt dabei, dafs man nicht alle falschen Sätze zn widerlegen habe, sondern nur solche, die nicht schon gegen die Prinzipien verstofsen. Den Unterschied nun zwischen den Sätzen, die man widerlegen, und denen, die man nicht widerlegen

soll, sucht er folgendermafsen zu veranschaulichen: „*So ist es zum Beispiel,*“ sagt er, „*Sache eines Geometers, die Quadratur vermittels der Segmente zu widerlegen, die des* ANTIPHON *aber zu widerlegen, ist nicht Sache eines Geometers.*“ Durch diese Bemerkung des ARISTOTELES sah sich nun SIMPLICIUS veranlafst, in seinen Kommentar einen erläuternden Bericht über die genannten Quadraturen aufzunehmen. Da es aber nicht ganz klar war, welche Quadratur (des Kreises, denn darum handelte es sich natürlich) ARISTOTELES mit der „Quadratur vermittels der Segmente“ gemeint hatte[19], so fühlte sich SIMPLICIUS verpflichtet, viel weiter auszuholen und seinem Erläuterungsberichte eine viel gröfsere Ausdehnung zu geben, als es für den gerade vorliegenden Zweck erforderlich gewesen wäre. Dadurch aber hat er der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet. Denn indem er mit Geschick und Umsicht und mit vollem Verständnis für den gesamten Umfang der vorliegenden Frage eine ausführliche und wohlgeordnete Darstellung der mit der „Quadratur vermittels der Segmente“ zusammenhängenden Untersuchungen, namentlich also der des HIPPOKRATES, in seinem Kommentare unternahm, hat er uns Arbeiten von hohem Range überliefert, die ohne ihn nicht zu unserer Kenntnis gelangt wären.[20] Hören wir nun, wie SIMPLICIUS jene Bemerkung des ARISTOTELES kommentiert.

II. Der Bericht des Simplicius.

Unter den Vielen nämlich, die die Quadratur des Kreises suchten (dies bedeutete aber die Konstruktion eines einem Kreise gleichen Quadrates), glaubte sowohl ANTIPHON sie zu finden, als auch HIPPOKRATES, der Chier, aber sie täuschten sich. Allein, den Irrtum des ANTIPHON zu widerlegen, ist nicht Sache eines Geometers, da er, wie wir erfahren werden, nicht von geometrischen Prinzipien ausgegangen ist; wohl aber ist es Sache eines Geometers, den des HIPPOKRATES zu widerlegen, da er sich unter Wahrung der geometrischen Prinzipien irrte. Denn nur diejenigen Sätze hat man zu widerlegen nötig, die unter Wahrung der der Untersuchung eigentümlichen Prinzipien auf solche Weise zu falschen[21] Schlüssen führen; diejenigen aber, durch die sie bei Seite geschoben werden, indem sie die Prinzipien aufheben, braucht man nicht zu widerlegen.

ANTIPHON aber beschrieb einen Kreis und zeichnete in diesen ein Polygon[22], eines von denen, die eingeschrieben werden können. Es sei das eingeschriebene etwa[23] ein Quadrat. Indem er alsdann jede der Seiten des Quadrates halbierte, zog er von den Teilpunkten[24] aus nach den Kreisbogen senkrechte Linien, von denen offenbar eine jede das zu ihr ge-

hörige Segment des Kreises halbierte. Darauf zog er von dem Teilpunkte nach den Endpunkten der Seiten des Quadrates Verbindungsgeraden, sodafs vier Dreiecke durch die Geraden entstanden, die ganze eingeschriebene Figur aber ein Achteck ward. Und indem er so wieder nach demselben Verfahren jede der Seiten des Achtecks halbierte, von dem Teilpunkte aus eine Senkrechte nach dem Kreisumfange zog und von den Punkten, in denen die Senkrechten die Kreisbogen trafen, Verbindungsgeraden nach den Endpunkten der geteilten Geraden führte, machte er das eingeschriebene zu einem Sechzehneck. Und indem er wiederum auf dieselbe Weise die Seiten des eingeschriebenen Sechzehnecks teilte und Verbindungslinien zog und das eingeschriebene Polygon verdoppelte und dies beständig wiederholte, glaubte[25] er, dafs schliefslich einmal nach Erschöpfung der Fläche auf diese Weise dem Kreise ein Polygon werde eingeschrieben werden, dessen Seiten wegen ihrer Kleinheit auf den Umfang des Kreises passen[26] würden. Da wir aber zu jedem Polygone ein gleiches Quadrat konstruieren können, wie wir in den Elementen[27] lernten, so werden wir, weil dem Kreise das auf ihn passende gleiche Polygon zu Grunde liegt, auch zu einem Kreise ein gleiches Quadrat herzustellen im stande sein.

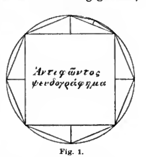


Fig. 1.

Nun leuchtet ein, dafs sich die Beweisführung im Widerspruche[28] mit den geometrischen Prinzipien befindet, nicht, wie ALEXANDER[29] sagt, „weil der Geometer als Prinzip annimmt, dafs der Kreis die Gerade nur punktweise treffe, ANTIPHON aber dies aufhebt.“ Denn der Geometer nimmt dies nicht an, sondern beweist es im dritten Buche[30]. Besser ist es also zu sagen, dafs es ein Prinzip sei, es sei unmöglich, dafs eine Gerade auf einen Kreisbogen passe[31], vielmehr wird die aufserhalb befindliche den Kreis in einem einzigen Punkte treffen, die innerhalb befindliche in zweien nur und nicht mehr, und die Berührung erfolgt in einem Punkte.[32] Und wenn man gleichwohl die zwischen der Geraden und dem Kreisbogen liegende Fläche immerwährend teilt, so wird man sie nicht erschöpfen, noch wird man jemals den Kreisbogen erreichen, wenn anders[33] die Fläche bis ins Unendliche teilbar ist. Wenn man ihn aber erreicht, so ist ein geometrisches Prinzip aufgehoben, nämlich das, das aussagt, dafs die Gröfsen bis ins Unendliche teilbar sind. Und dafs dieses Prinzip von ANTIPHON aufgehoben werde, behauptet auch EUDEMUS.[34]

Die Quadratur aber vermittels der Segmente, sagt er[35], *zu widerlegen, ist Sache eines Geometers.* Mit der *vermittels der Segmente* könnte er aber

wohl die vermittels der Möndchen meinen[36], die Hippokrates, der Chier, erfand. Denn das Möndchen ist ein Segment[37] eines Kreises. Der Beweis aber ist folgender Art.

Es sei, sagt er[38], über der Geraden AB der Halbkreis $A\Gamma B$ beschrieben, und es sei AB in Δ halbiert. Und von Δ aus sei $\Delta\Gamma$ senkrecht zu AB gezogen, und von Γ aus sei die Verbindungslinie ΓA gezeichnet, die eine Seite des Quadrates darstellt, das in den Kreis eingeschrieben ist, von dem $A\Gamma B$ einen Halbkreis bezeichnet. Und über $A\Gamma$ sei der Halbkreis $AE\Gamma$ beschrieben. Da nun das Quadrat über AB gleich ist dem über $A\Gamma$, vermehrt um das über der andern Seite des in den Halbkreis $A\Gamma B$ eingeschriebenen Quadrates, d. h. über ΓB (denn AB ist Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks; wie sich aber die Quadrate über den Durchmessern zu einander verhalten, ebenso verhalten sich auch zu einander die um sie[39] beschriebenen Kreise und Halbkreise, wie im 12. Buche der Elemente[40] bewiesen ist), so ist folglich der Halbkreis $A\Gamma B$ doppelt so grofs wie der Halbkreis $AE\Gamma$. Es ist aber der Halbkreis $A\Gamma B$ auch doppelt so grofs wie der Quadrant $A\Gamma\Delta$. Daher ist der Quadrant gleich dem Halbkreise $AE\Gamma$. Es sei nun das gemeinsame, von der Seite des Quadrates und dem Kreisbogen $A\Gamma$ eingeschlossene Segment weggenommen. Alsdann ist das übrig bleibende Möndchen $AE\Gamma$ gleich dem Dreiecke $A\Gamma\Delta$, das Dreieck aber einem Quadrate. Nachdem er aber auf diese Weise gezeigt hat, dafs das Möndchen quadriert werde, versucht er nächstdem vermittels des vorher Bewiesenen den Kreis zu quadrieren, wie folgt.

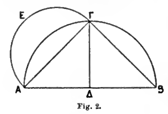


Fig. 2.

Es sei eine Gerade AB gegeben und darüber ein Halbkreis beschrieben. Und es sei $\Gamma\Delta$ doppelt so grofs gemacht wie AB, und über $\Gamma\Delta$ sei ein Halbkreis beschrieben, und in den Halbkreis mögen Seiten des in

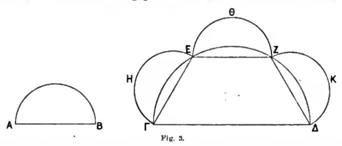


Fig. 3.

den Kreis eingeschriebenen Sechsecks eingezeichnet werden, nämlich ΓE und EZ und ferner $Z\Delta$. Und darüber seien die Halbkreise ΓHE, $E\Theta Z$, $ZK\Delta$ beschrieben. Alsdann ist jeder der über den Seiten des Sechsecks beschriebenen Halbkreise gleich dem Halbkreise AB, denn AB ist den Seiten des Sechsecks gleich. Es ist nämlich der Durchmesser doppelt so grofs wie die Radien, die Seiten des Sechsecks aber sind den Radien gleich. Es ist aber $\Gamma\Delta$ auch doppelt so grofs wie AB; also sind die vier Halbkreise einander gleich. Die vier sind folglich viermal so grofs wie der Halbkreis AB. Es ist aber auch der Halbkreis über $\Gamma\Delta$ viermal so grofs wie AB. Denn da $\Gamma\Delta$ doppelt so grofs wie AB ist, so wird das Quadrat über $\Gamma\Delta$ viermal so grofs wie das über AB; wie sich aber die Quadrate über den Durchmessern verhalten, ebenso verhalten sich zu einander die um sie beschriebenen Kreise und Halbkreise. Somit ist der Halbkreis $\Gamma\Delta$ viermal so grofs wie AB. Folglich ist der Halbkreis $\Gamma\Delta$ gleich den vier Halbkreisen, nämlich dem über AB und den drei Halbkreisen über den Seiten des Sechsecks.[41] Es seien nun sowohl von den Halbkreisen über den Seiten des Sechsecks als auch von dem über $\Gamma\Delta$ gemeinsame Segmente weggenommen, nämlich die, die von[42] den Sechsecksseiten und den Bogen des Halbkreises $\Gamma\Delta$ eingeschlossen werden. Alsdann sind die übrig bleibenden Möndchen ΓHE, $E\Theta Z$, $ZK\Delta$ mit dem Halbkreise AB zusammen gleich dem Trapeze $\Gamma EZ\Delta$. Wenn wir aber von dem Trapeze den Überschufs wegnehmen, d. h. die den Möndchen gleiche Fläche (denn es wurde eine einem Möndchen gleiche geradlinige Figur nachgewiesen), den Rest aber, der gleich dem Halbkreise AB ist, zurückbehalten und wenn wir diese zurückbehaltene geradlinige Fläche verdoppeln und das Verdoppelte quadriert wird, d. h. wenn wir ein ihm gleiches Quadrat herstellen, so wird das Quadrat gleich dem um den Durchmesser AB beschriebenen Kreise sein. Und so wird der Kreis quadriert werden.

Die Beweisführung ist allerdings geistreich; der Trugschlufs[43] aber ist dadurch entstanden, dafs das, was nicht allgemein bewiesen worden ist, als allgemein gültig angenommen wurde. Denn es wurde nicht bewiesen, dafs jedes Möndchen quadriert werde, es sei denn das über der Seite des in den Kreis eingeschriebenen Quadrates; *diese* Möndchen aber stehen über den Seiten des in den Kreis eingeschriebenen Sechsecks.[44]

Es gab aber noch eine solche Beweisführung[45], die den Kreis durch die Möndchen zu quadrieren glaubte, eine einfachere, und eine, die nicht dadurch widerlegt wird, dafs in ihr der Trugschlufs[46] entstanden ist: Diejenigen nämlich, die eine Quadratur des Möndchens über der Seite des Quadrates fanden, glaubten auch dadurch die Quadratur des Kreises gefunden zu haben, in der Meinung, dafs der ganze Kreis in

Möndchen zerlegt werden könne. Denn indem sie das dem Möndchen gleiche Quadrat so oft vervielfachten, als die Anzahl aller der Möndchen beträgt, in die der Kreis zerlegt worden ist, glaubten sie, daſs das diesen Möndchen gleiche Quadrat auch dem Kreise gleich sei, indem sie dabei fälschlich annahmen, daſs der ganze Kreis in Möndchen zerlegt werden könne. Denn bei der Zerlegung des Kreises in die Möndchen bleibt immer inwendig ein mittleres, nach beiden Seiten ausgebogenes Stück übrig, das von den auf beiden Seiten befindlichen Umrissen des Möndchens eingeschlossen ist. Und da dieses weder ein Möndchen ist, noch quadriert wird, so dürfte wohl auch der ganze Kreis nicht quadriert werden.[47] Nicht verständig[48] aber ist die in Bezug auf die so beschaffene Quadratur getroffene Einrichtung. Denn wer den Kreis durch die Möndchen quadrieren will, braucht nicht den ganzen Kreis in Möndchen zu zerlegen. Und selbst wenn dies auch geschähe, so wird auch so nicht der Kreis durch die Möndchen quadriert, denn nicht von jedem Möndchen wurde bewiesen, daſs es quadriert werde. Hinwiederum wird er, auch wenn er nicht ganz in Möndchen zerlegt wird, quadriert werden, sobald man einräumt, daſs die über den Seiten des in den Kreis eingeschriebenen Sechsecks gezeichneten Möndchen quadriert werden und nicht nur die über denen des Quadrates. Und darin besteht nun der Grund des Trugschlusses, daſs die, die nur das Möndchen über der Seite des Quadrates quadrierten, den Beweis so gestalteten, als ob alle Möndchen, in die der Kreis zerlegt wird, von welcher Art sie auch seien, quadriert würden. Dies also über das trügerische Schlieſsen vermittels der Möndchen.

„Einige aber, sagt ALEXANDER, glauben, wenn sie eine Quadratzahl als cyklisch nachweisen würden, auch in den Raumgröſsen eine Kreisquadratur gefunden zu haben. Eine Quadratzahl aber, sagt er, ist eine, die durch Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entsteht; cyklisch hingegen nannten sie die Zahlen die aus den auf einander folgenden ungeraden Zahlen, z. B. aus eins, drei, fünf, sieben, neun, elf durch Addition gebildet werden. Fanden sie aber unter den so gebildeten irgend eine Quadratzahl, die zugleich auch cyklisch ist, wie z. B. 36 (quadratisch, weil sie aus der mit sich selbst multiplizierten 6 entsteht, und cyklisch, weil sie durch die Addition der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 zu stande gebracht wird), so glaubten sie, auch eine Kreisquadratur gefunden zu haben. Der Beweis aber, sagt er, ergiebt sich nicht aus den geometrischen Prinzipien, sondern aus den arithmetischen; denn arithmetische Prinzipien sind es, daſs die so beschaffene Zahl cyklisch und die so beschaffene quadratisch ist.“ Wenn ALEXANDER dies sagt, so verlohnt es sich, festzustellen, daſs erstens die Arithmetiker die cyklische Zahl nicht mit Rücksicht auf eine Addition der auf einander folgenden ungeraden

Zahlen definieren, sondern mit Rücksicht[49] darauf, dafs sie ebenso abschliefst wie ihre Grundzahl. Cyklisch[50] ist nämlich 25, weil fünfmal fünf 25, und 36, weil sechmal sechs 36 ist; aber weder 4 ist cyklisch, noch 9, noch 16, obwohl sie durch Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen entstehen, sondern es sind diese nur quadratisch; denn aus der Addition der ungeraden Zahlen entstehen die quadratischen. Vielleicht auch sagte der, der von alters her die Untersuchung überlieferte, nicht, dafs alle durch Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen gebildeten ohne weiteres cyklisch seien, sondern dafs bei der Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen die cyklischen gefunden werden, obwohl auch dies nicht immer zutrifft; denn während 125, weil aus 5 mal 25, und 216, weil aus 6 mal 36 entstanden, cyklisch sind, gingen sie gleichwohl nicht durch Addition der auf einander folgenden ungeraden Zahlen hervor; es müfsten denn diese Zahlen nicht cyklische sein sondern sphärische, aus zweidimensionalen cyklischen cyklisch vertieft.[51] Aber auch jenem gegenüber ist festzustellen, dafs es nicht berechtigt war, dafs die, die eine Zahl gefunden hatten, die zugleich cyklisch und quadratisch war, deswegen glaubten, auch in Raumgröfsen die Quadratur des Kreises gefunden zu haben. Aber vielleicht kamen die, die unter den Zahlen eine fanden, die quadratisch und zugleich auch cyklisch war, auf den Gedanken, auch in den Raumgröfsen die Quadratur des Kreises zu suchen.[52]

Unser Lehrer Ammonius[53] aber sagte, es sei vielleicht nicht notwendig, dafs wenn dieses bei Zahlen gefunden würde, es auch bei Raumgröfsen gefunden werde. Denn ungleichartige Gröfsen seien Gerade und Kreislinie. „Und es ist durchaus nicht wunderbar, sagt er, dafs ein Kreis nicht gleich einer geradlinigen Figur gefunden wurde, wenn wir dies doch auch bei den Winkeln antreffen. Denn weder für den Winkel des Halbkreises noch für seine Ergänzung zum Rechten, den sogenannten hornförmigen[54] Winkel, dürfte es wohl einen gleichen geradlinigen Winkel geben. Und deswegen vielleicht, sagt er, wurde das selbst von so berühmten Männern gesuchte Theorem bis jetzt nicht gefunden, selbst nicht einmal von Archimedes.“ Ich sagte aber zu dem Lehrer, wenn doch das Möndchen über der Seite des Quadrates quadriert wird (denn das ist untrüglich bewiesen), das Möndchen aber, weil aus Kreisbogen zusammengesetzt, dem Kreise verwandt ist, was hindert denn, dafs auch der Kreis gerade so gut quadriert werde? Ist aber die Fläche des Möndchens der des Kreises unähnlich wegen der Hörner, so ist jedes Möndchen auch der geradlinigen Figur unähnlich: und gleichwohl wird das Möndchen über der Seite des Quadrates quadriert. Die Winkel freilich, sowohl die des Halbkreises als die hornförmigen, die beide aus einem Kreisbogen und

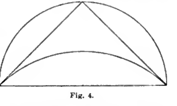
einer Geraden zusammengesetzt sind, sind nicht nur ungleichartig dem geradlinigen, sondern sogar unvergleichbar.[55] Ich halte also das Gesagte nicht für ausreichend, um an dem Auffinden der Quadratur verzweifeln zu lassen. Es sagt nämlich auch JAMBLICHUS[56] in seinem Kommentare zu den Kategorien, dafs ARISTOTELES die Quadratur des Kreises vielleicht noch nicht gefunden habe, dafs sie aber bei den Pythagoräern gefunden worden sei, „wie sich, sagt er, aus den Beweisführungen des Pythagoräers SEXTUS[57] klar ergiebt, der die Methode der Beweisführung von alters her durch Überlieferung erhielt. Später aber, sagt er, bearbeiteten auch ARCHIMEDES mittels der Spirale und NIKOMEDES mittels der Linie, die eigens Quadratrix genannt wird, und APOLLONIUS mittels einer gewissen Linie, die er selbst eine Schwester einer Muschellinie nennt — sie ist aber dieselbe wie die des NIKOMEDES — und auch KARPUS mittels einer gewissen Linie, die er einfach „aus doppelter Bewegung" nennt, und noch viele andere, sagt er, auf mannigfache Weise das Problem". Aber niemals machten alle diese die Konstruktion des Theorems zu einer mechanischen.[58]

ALEXANDER glaubt also, wie ich sagte, dafs der Trugschlufs insofern widerlegt werde, als HIPPOKRATES, der nur das Möndchen über der Seite des Quadrates quadrierte, dies so mifsbrauchte, als sei es auch in Bezug auf die Seite des Sechsecks bewiesen. EUDEMUS freilich sagt in seiner *Geschichte der Geometrie*, HIPPOKRATES habe nicht in Bezug auf eine Quadratseite die Quadratur des Möndchens gezeigt, sondern allgemein, wie man wohl sagen könnte.[59] Wenn nämlich jedes Möndchen als äufseren Bogen entweder einen einem Halbkreise gleichen hat oder einen gröfseren oder einen kleineren, HIPPOKRATES aber sowohl das quadriert, das einen einem Halbkreise gleichen, als auch das, das einen gröfseren, wie auch das, das einen kleineren hat, so dürfte er wohl den Nachweis allgemein geführt haben, wie es scheint.[59] Ich werde aber das von EUDEMUS wörtlich Gesagte mitteilen, indem ich einige wenige Erläuterungen[60] durch die Erinnerung an die Elemente EUKLIDS hinzufüge, wegen der Art wie EUDEMUS kommentiert, der nach der alten Sitte die Erklärungen abgekürzt mitteilt. Er sagt aber im zweiten Buche seiner *Geschichte der Geometrie* Folgendes.

Aber auch die Quadraturen der Möndchen[61], die als solche von nicht gewöhnlichen Figuren erschienen wegen der Verwandtschaft mit dem Kreise[62], wurden zuerst von HIPPOKRATES beschrieben und schienen nach rechter Art[63] auseinandergesetzt zu sein; deshalb wollen wir uns ausführlicher mit ihnen befassen und sie durchnehmen. Er bereitete sich nun eine Grundlage und stellte als ersten der hierzu nützlichen Sätze den auf, dafs die ähnlichen

Segmente der Kreise dasselbe Verhältnis zu einander haben wie ihre Grundlinien in der Potenz.[64] *Dies bewies er aber dadurch, daſs er zeigte*[65], *daſs die Durchmesser in der Potenz dasselbe Verhältnis haben wie die Kreise.* Dies hat Euklid als zweiten Satz[66] im zwölften Buche der Elemente hingestellt, indem er den zu Grunde liegenden Satz so aussprach: „Die Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate über den Durchmessern.“ *Wie sich nämlich die Kreise zu einander verhalten, so verhalten sich auch die ähnlichen Sektoren.*[67] *Ähnliche Sektoren nämlich sind die, die denselben Teil des Kreises ausmachen, wie z. B. Halbkreis zu Halbkreis und Drittelkreis zu Drittelkreis. Deswegen nehmen die ähnlichen Segmente auch gleiche Winkel auf. Und zwar sind die aller Halbkreise Rechte und die der gröſseren kleiner als Rechte, und zwar um so viel, um wie viel die Segmente gröſser als Halbkreise sind, und die der kleineren gröſser, und zwar um soviel, um wie viel die Segmente kleiner sind.*

Nachdem aber dies von ihm bewiesen war, beschrieb[68] *er zunächst, auf welche Weise wohl eine Quadratur zu stande kommen könnte, wenn ein Möndchen als äuſseren Bogen den eines Halbkreises hat. Er setzte dies aber auseinander, indem er um ein sowohl rechtwinkliges als gleichschenkliges Dreieck einen Halbkreis beschrieb und über der Basis ein Kreissegment, ähnlich denen, die von den Seiten abgeschnitten werden.*[69] Dies stellte Euklid als das 33. Theorem des dritten Buches hin, indem er folgende Aufgabe vorlegte: „Über einer[70] gegebenen Geraden ein Kreissegment zu beschreiben, das einen Winkel aufnimmt, der einem[70] gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist. Wenn er nämlich das über der Basis so beschreibt, daſs es einen Winkel aufnimmt, gleich denen in den Segmenten, die von den Seiten abgeschnitten werden, so wird es jenen ähnlich sein. „Ähnliche Kreissegmente nämlich, definierte Euklid in dem dritten[71] Buche, sind solche, die gleiche Winkel aufnehmen.“ *Da aber das Segment über der Basis gleich den beiden über den anderen ist*, weil, wie im vorletzten Theoreme des ersten Buches der Elemente Euklids bewiesen worden ist, in den rechtwinkligen Dreiecken die unter dem Rechten gespannte in der Potenz gleich den beiden ist, die den Rechten einschlieſsen[72], und weil sich, wie die Quadrate über den Geraden, ebenso die ähnlichen Segmente der Kreise zu einander verhalten, *so wird, wenn der Teil des Dreiecks, der auſserhalb des über der Basis beschriebenen Segmentes liegt, beiderseits hinzugefügt ist, das Möndchen gleich dem Dreiecke sein. Ist nun bewiesen, daſs das Möndchen gleich dem Dreiecke ist, so dürfte es wohl*


Fig. 4.

quadriert werden. Es ist nämlich im 14. Theoreme des zweiten Buches der Elemente Euklids gezeigt worden, wie man verfahren mufs, um „zu einer gegebenen geradlinigen Figur ein gleiches Quadrat zu konstruieren". *Auf diese Weise quadrierte also Hippokrates, indem er den äufseren Bogen des Möndchens als den eines Halbkreises voraussetzte, das Möndchen ohne Mühe.*

Hierauf setzt er ihn zunächst gröfser als einen Halbkreis voraus, indem er ein Trapez konstruierte, das die drei Seiten einander gleich hat, die eine aber, die gröfsere der parallelen, in der Potenz dreimal so grofs wie jede von jenen, und indem er das Trapez mit einem Kreise umgab und über seiner gröfsten Seite ein Segment beschrieb, ähnlich denen, die durch die drei gleichen von dem Kreise abgeschnitten werden.[73] Dafs wirklich das Trapez von einem Kreise wird umschlossen werden, wirst Du so beweisen. Wenn Du die Winkel des Trapezes nach dem neunten Satze des ersten Buches der Elemente halbierst und die Diagonalen[74] ziehst, so wirst Du sagen, da BA gleich $\varDelta\Gamma$, $\varDelta E$ aber gemeinschaftlich ist und die Winkel gleich sind[75], so ist auch das Übrige gleich. *Dafs aber das genannte Segment gröfser als ein Halbkreis ist, leuchtet ein, wenn in dem Trapeze ein Durchmesser*[76] *gezogen wird. Denn notwendigerweise mufs dieser, der unter zwei Seiten des Trapezes gespannt ist, in der Potenz mehr als doppelt so grofs sein wie die eine übrig gebliebene.*

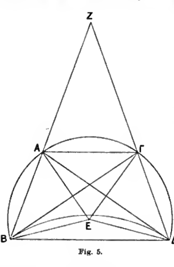


Fig. 5.

Da nämlich $B\varDelta$ gröfser als $A\Gamma$ ist, so werden die einander gleichen und sie verbindenden Geraden $\varDelta\Gamma$ und BA, verlängert, in Z zusammenstofsen. Denn wenn die einander gleichen Geraden BA und $\varDelta\Gamma$ parallel sind, andererseits aber die Verbindungslinien der gleichen und parallelen Geraden auch selbst gleich und parallel sind, so wird $A\Gamma$ gleich $B\varDelta$ sein, was unmöglich ist. Wenn aber BA und $\varDelta\Gamma$ in Z zusammenstofsen, so werden einerseits die Winkel $ZA\Gamma$ und ΓAB gleich zwei Rechten sein, wegen des 13. Satzes des ersten Buches der Elemente Euklids, andererseits aber der Winkel ΓAB gröfser als der Winkel ΓAZ, der Aufsenwinkel des Dreiecks gröfser als der innere, nach dem 32. Satze des ersten Buches. Demnach ist $B\Gamma$ in der Potenz mehr als doppelt so grofs wie jede der Seiten BA und $A\Gamma$,

und so auch wie $\Gamma\Delta$.[77] *Und folglich mufs die gröfste der Seiten des Trapezes*, nämlich $B\Delta$, *in der Potenz kleiner sein als der Durchmesser, vermehrt um diejenige der anderen Seiten, unter der, mit dem Durchmesser zusammen, die in Rede stehende gespannt ist.*[78] Es sind nämlich $B\Gamma$ und $\Gamma\Delta$ in der Potenz mehr als dreimal so grofs wie $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ aber dreimal so grofs. *Daher ist der auf der gröfseren Seite des Trapezes stehende Winkel ein spitzer. Folglich ist das Segment, in dem er liegt, gröfser als ein Halbkreis. Und dies ist der äufsere Bogen des Möndchens.*

Die Quadratur aber dieses Möndchens überging Eudemus als etwas Einleuchtendes, glaube ich.[79] Sie dürfte aber wohl folgendermafsen beschaffen sein. Da ja einander gleich sind das Möndchen zusammen mit dem Segmente auf der gröfseren Seite des Trapezes und das Trapez zusammen mit den Segmenten, die durch die drei gleichen Geraden desselben abgeschnitten werden, und da von diesen Segmenten das auf der gröfseren Seite des Trapezes gleich den dreien ist, die durch die gleichen Geraden von dem Kreise weggenommen werden, insofern nämlich vorausgesetzt ist, dafs die gröfsere Seite des Trapezes in der Potenz den dreien gleich sei, und andererseits die ähnlichen Segmente sich zu einander verhalten wie die Quadrate über den Geraden: so sind, wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, die Reste gleich; also ist das Möndchen gleich dem Trapeze. Oder Du wirst kürzer auch so sagen: Da ja das Segment über der gröfseren Seite des Trapezes gleich denen ist, die über den drei gleichen beschrieben sind (deswegen, weil auch das Quadrat über derselben dreimal so grofs ist wie das über jeder einzelnen), so wird, wenn die von den drei gleichen Geraden und dem Bogen des gröfseren Segmentes eingeschlossene Fläche beiderseits hinzugefügt wird, das Möndchen gleich dem Trapeze sein: ist dieses quadriert (da wir jede geradlinige Figur zu quadrieren vermögen), so wird auch das Möndchen quadriert werden, dessen äufserer Bogen gröfser als ein Halbkreis ist.[80]

Wenn er aber kleiner als ein Halbkreis sein sollte, so richtete Hippokrates dies ein, indem er zuvor eine Figur[81] *folgender Art zeichnete. Es sei ein Kreis gegeben, von dem die Gerade* AB[82] *ein Durchmesser sei, sein Mittelpunkt aber sei der Punkt K. Und die Gerade* $\Gamma\Delta$ *halbiere die Gerade* BK *und schneide sie rechtwinklig. Die Gerade* EZ *aber sei zwischen diese und die Peripherie gelegt, nach* B[83] *hin sich richtend und in der Potenz andert-*

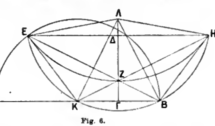


Fig. 6.

halbmal so grofs wie die Radien. Die Gerade EH aber sei parallel zu der Geraden AB geführt. Und von K aus seien Verbindungslinien nach E und Z gezogen. Die Verbindungslinie nach Z aber stofse, verlängert, mit der Geraden EH in H zusammen und wiederum seien von B aus Verbindungslinien nach Z und H gezogen. Es ist dann einleuchtend, dafs einerseits die Gerade BZ[84]*, verlängert, nach E*[84] *gelangen wird (denn es ist vorausgesetzt, dafs sich EZ nach B hin richte*[85]*) und dafs andererseits die Gerade BH gleich der Geraden EK sein wird.*

Dies könnte man zwar vielleicht auch auf einfachere Weise zeigen, mir aber kam es in den Sinn, es aus den bereits allgemein anerkannten Sätzen folgendermafsen zu beweisen. Es ist vorausgesetzt, dafs $\Delta\Gamma$ BK halbiere und rechtwinklig schneide. Auf $\Delta\Gamma$ befindet sich daher der Mittelpunkt[86] des Kreises, der um das Trapez wird beschrieben werden, nach dem Zusatze zu dem ersten Theoreme im dritten Buche der Elemente Euklids. Weil aber EH zu KB parallel ist und $\Gamma\Delta$ dieselben geschnitten hat, so bildet sie die Innenwinkel, die zwei Rechten gleich sind wegen des 29. Satzes des ersten Buches. Rechte aber sind die bei Γ. Rechte also auch die bei Δ. Da nun die durch den Mittelpunkt gehende $\Gamma\Delta$ die nicht durch den Mittelpunkt gehende[87] EH rechtwinklig schneidet, so halbiert sie sie auch nach dem dritten Satze des dritten Buches der Elemente. Dieweil also ΔH gleich ΔE, ΔZ aber gemeinschaftlich ist und die Winkel bei Δ Rechte sind, so ist folglich auch die Basis ZH gleich der Basis ZE. Aber es ist auch BZ gleich ZK, weil auch $B\Gamma$ gleich ΓK, ΓZ aber gemeinschaftlich ist und die Winkel bei Γ Rechte sind. Da also die beiden HZ und ZB den beiden KZ und ZE gleich sind und die Winkel am Scheitel gleich sind, so ist auch die Basis HB gleich der Basis EK.

Wenn sich dies nun so verhält[88], *so wird*, sage ich, *ein Kreis das durch EKBH bezeichnete*[89] *Trapez umschliefsen.* Denn sicherlich wird ein Kreis das Dreieck EKH umschliefsen; wir haben nämlich in dem fünften Satze des vierten Buches der Elemente die Mittel, einen Kreis um ein gegebenes Dreieck zu beschreiben. Wenn ich nun zeigen werde, dafs die aus dem Mittelpunkte nach B gezogene Gerade gleich dem nach K gezogenen Radius[90] ist, so ist klar, dafs das Kreissegment, das durch EKH gezogen wird, auch durch B kommen und dafs ein Kreissegment das Trapez umschliefsen wird. Dieses Segment wird auch das durch EZH bezeichnete Dreieck einschliefsen. Wenn nun als Mittelpunkt etwa Δ angenommen wird und die Verbindungslinien ΔE, ΔH, ΔK, ΔB gezogen werden, so sind, da ja das Dreieck $E\Delta H$ gleichschenklig ist (denn die Radien sind gleich[91]), die Winkel an der Basis gleich, nämlich ΔHE gleich ΔEH, wegen des fünften Satzes des ersten Buches der Elemente

Euklids. Es ist aber der Winkel *BHE* gleich *KEH*, weil auch *EB* gleich *KH* ist, wie gezeigt wurde. Folglich ist auch der ganze Winkel *BHA* gleich dem ganzen *KEA*; es ist aber auch *KE* gleich *BH*. Also ist auch die Basis *KA* gleich *AB*; folglich ist *AB* gleich dem Radius *AK*. Es sei nun das Segment beschrieben.

Es sei nunmehr um das Dreieck EZH ein Kreissegment beschrieben, so ist klar, dafs die Segmente EZ und ZH ähnlich einem jeden der Segmente EK, KB, BH sind.[92]

Wenn sich dies so verhält, so wird das dargestellte Möndchen, dessen äufserer Bogen EKBH ist, gleich der geradlinigen Figur sein, die aus den drei Dreiecken BZH, BZK, EKZ zusammengesetzt ist. Die Segmente nämlich, die durch die Geraden EZ, ZH auf der Innenseite des Möndchens von der geradlinigen Figur weggenommen werden, sind gleich den aufserhalb der geradlinigen Figur befindlichen Segmenten, die durch EK, KB, BH weggenommen werden. Denn jedes der beiden auf der Innenseite ist anderthalbmal so grofs wie jedes der äufseren. Es ist nämlich EZ (in der Potenz) als anderthalbmal so grofs vorausgesetzt worden wie der Radius, d. h. wie EK und KB und BH.[93] Denn auch diese letztere wurde als gleich *EK* nachgewiesen. Wenn also von *EZ* und *ZH* jede in der Potenz anderthalbmal so grofs ist wie jede der drei genannten, Segmente aber sich zu den Segmenten verhalten wie (in der Potenz) Geraden zu den Geraden, so sind folglich die zwei Segmente den dreien gleich. *Wenn nun einerseits das Möndchen aus den drei Segmenten und der geradlinigen Figur mit Ausschlufs der zwei Segmente besteht, andererseits die geradlinige Figur die zwei Segmente enthält und die drei nicht, die zwei Segmente aber den dreien gleich sind, so dürfte wohl das Möndchen der geradlinigen Figur gleich sein.*

Dafs aber der äufsere Bogen dieses Möndchens kleiner ist als ein Halbkreis, beweist er vermittels des Umstandes, dafs der in dem äufseren Segmente befindliche Winkel EKH ein stumpfer ist.[94] Es ist nämlich in dem 31. Satze des dritten Buches der Elemente Euklids bewiesen worden, dafs „der in dem kleineren Segmente als ein Halbkreis gröfser als ein Rechter ist.“ Dafs aber der Winkel *EKH* ein stumpfer ist, beweist er so: Da die Gerade *EZ* in der Potenz anderthalbmal so grofs ist wie die Radien, die Gerade *KB* aber gröfser ist als die Gerade *BZ*, weil auch der Winkel bei *Z* gröfser ist, wie ich zeigen werde, und andererseits *BK* gleich *KE* ist, so ist klar, dafs die Gerade *BE* in der Länge mehr als doppelt so grofs wie die Gerade *BZ*, und die Gerade *KE* folglich in der Potenz mehr als doppelt so grofs sein wird wie die Gerade *KZ**) wegen der Ähnlich-

*) Um Mifsverständnisse zu vermeiden und um die Kontinuität in der Übersetzung des eudemischen Referates zu wahren, bemerke ich auch an dieser Stelle,

keit der Dreiecke BEK und BKZ. Denn so wie EB zu BK ebenso verhält sich EK zu KZ; *folglich ist die Gerade EK in der Potenz mehr als doppelt so grofs wie die Gerade KZ.*[95] *Die Gerade EZ aber ist in der Potenz anderthalbmal so grofs wie die Gerade EK: daher ist die Gerade EZ in der Potenz gröfser als die Geraden EK und KZ zusammen.* Wenn nämlich in der Potenz EK doppelt so grofs wäre wie KZ, ZE aber anderthalbmal so grofs wie EK, so wäre ZE in der Potenz gleich EK und KZ zusammen, wie bei den Zahlen 6, 4, 2; da ja aber EK in der Potenz mehr als doppelt so grofs ist wie KZ, so wie sich 4 zu 1 verhält, so ist auch (da ja 6 gröfser als 5 ist) EZ in der Potenz gröfser als EK und KZ zusammen[96]: *Folglich ist der Winkel bei K ein stumpfer, das Segment also, in dem er sich befindet, kleiner als ein Halbkreis. Auf diese Weise quadrierte also* HIPPOKRATES *jedes*[97] *Möndchen, wenigstens insofern er sowohl das quadrierte, das als äufseren Bogen den eines Halbkreises, als auch das, das einen gröfseren als ein Halbkreis, wie auch das, das einen kleineren hat.*

Aber durchaus nicht nur das über der Seite des Quadrates, wie ALEXANDER berichtete, auch unternahm er es keineswegs[98], den Kreis durch die Möndchen über der Seite des Sechsecks zu quadrieren, was ebenfalls ALEXANDER behauptet.

Ein Möndchen aber mit einem Kreise zusammen quadrierte er folgendermafsen. Es seien um einen mit K bezeichneten Mittelpunkt[99] *zwei Kreise beschrieben, der Durchmesser des äufseren aber sei in der Potenz sechsmal so grofs wie der des inneren, und nachdem in den inneren Kreis das mit $AB\Gamma\Delta EZ$ bezeichnete Sechseck eingeschrieben worden ist, seien die Radien $K\Delta$, KB, $K\Gamma$ bis zu dem Umfange des äufseren Kreises verlängert worden, und es seien die Verbindungslinien $H\Theta$, ΘI*[100] *gezogen; dann ist klar, dafs auch $H\Theta$, ΘI Seiten eines Sechsecks sind, nämlich des in den gröfseren Kreis eingeschriebenen.*[101] *Und über der Geraden HI sei ein Segment beschrieben, ähnlich dem, das von der*

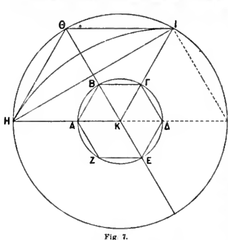


Fig. 7.

dafs nach meiner Überzeugung HIPPOKRATES direkt aus der Figur $BK^2 > 2KZ^2$ und daraus $EK^2 > 2KZ^2$ entnahm. Für die genauere Begründung s. Anm. 95.

Geraden $H\Theta$ *abgeschnitten wird. Da nun die Gerade* HI *in der Potenz dreimal so grofs sein mufs wie die Seite* ΘH *des Sechsecks (denn die unter zwei Seiten des Sechsecks gespannte schliefst mit einer einzigen anderen einen rechten Winkel ein, den in einem Halbkreise, und ist mit ihr zusammen in der Potenz dem Durchmesser gleich, der Durchmesser ist aber in der Potenz viermal so grofs wie die dem Radius gleiche Seite des Sechsecks, weil das in der Länge Doppelte in der Potenz das Vierfache ist*[102]*),* ΘH *aber (in der Potenz) sechsmal so grofs ist wie die Gerade* AB*, so ist klar, dafs sich das über der Geraden* HI *beschriebene Segment als ebenso grofs herausstellt wie die von dem äufseren Kreise durch die Geraden* $H\Theta$, ΘI *abgeschnittenen, vermehrt um die, die von dem inneren durch die sämtlichen Seiten des Sechsecks weggenommen werden.* Denn die ähnlichen Segmente der Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate über den Grundlinien, weil sich auch die ähnlichen Kreise zu einander verhalten wie die Quadrate über den Durchmessern.[103] *Es ist nämlich* HI *in der Potenz dreimal so grofs wie* $H\Theta$, ΘI *aber in der Potenz gleich* $H\Theta$*, jede von diesen aber in der Potenz ebenso grofs wie die sechs Seiten des inneren Sechsecks, weil auch der Durchmesser des äufseren Kreises in der Potenz als sechsmal so grofs wie der des inneren vorausgesetzt worden ist; wie aber der Durchmesser zu dem Durchmesser, so auch die Radien, der Radius aber ist gleich der Seite des Sechsecks*[104], — wie der Zusatz des vorletzten Theoremes im vierten Buche der Elemente EUKLIDS aussagt; wie aber (in der Potenz) die Seiten, so auch die Segmente, *und so dürfte wohl sicherlich das mit* $H\Theta I$ *bezeichnete Möndchen kleiner sein als das mit denselben Buchstaben bezeichnete Dreieck, und zwar um die Segmente, die durch die Seiten des Sechsecks von dem inneren Kreise weggenommen werden. Denn das Segment über* HI *war gleich den Segmenten* $H\Theta$, ΘI*, vermehrt um die, die durch das Sechseck weggenommen werden. Also sind die Segmente* $H\Theta$, ΘI *kleiner als das Segment über* HI*, und zwar um die, die durch das Sechseck weggenommen werden. Wenn nun der Teil des Dreiecks, der aufserhalb des über* HI *beschriebenen Segmentes liegt, beiderseits hinzugefügt ist, so wird einerseits aus diesem und dem Segmente über* HI *das Dreieck entstehen, andererseits aus demselben und den Segmenten* $H\Theta$, ΘI *das Möndchen. Es wird also das Möndchen kleiner sein als das Dreieck, und zwar um die Segmente die durch das Sechseck weggenommen werden.*[105] *Folglich ist das Möndchen, vermehrt um die Segmente, die durch das Sechseck weggenommen werden, gleich dem Dreiecke. Und wenn das Sechseck beiderseits hinzugefügt ist, so sind dieses Dreieck und das Sechseck gleich dem in Rede stehenden Möndchen und dem inneren Kreise. Denn das Dreieck war gleich dem Möndchen und den Segmenten, die durch das Sechseck von dem inneren Kreise weggenommen werden.*[106] *Insofern nun die*

genannten geradlinigen Figuren quadriert werden können, kann folglich auch der Kreis zusammen mit dem Möndchen quadriert werden.[107]

Das nun, was den Chier Hippokrates betrifft, zu kennen, ist dem Eudemus in höherem Maſse einzuräumen, da er ihm den Zeiten nach näher stand und ein Zuhörer des Aristoteles war. Die Quadratur des Kreises aber vermittels der Segmente[108], die Aristoteles beschuldigt als eine, die sich eines Trugschlusses bediene, spielt entweder auf die vermittels der Möndchen[109] an (mit Recht nämlich schwankte auch Alexander, indem er sagte: „wenn sie dieselbe ist wie die vermittels der Möndchen“[110]), oder sie bezieht sich nicht auf die Beweise des Hippokrates, sondern auf irgend welche andere, von denen einen[111] auch Alexander anführte, oder sie beschuldigt die von Hippokrates herrührende Quadratur des Kreises zusammen mit dem Möndchen, die er in der That vermittels der Segmente bewies, nämlich vermittels der drei (und der) in dem kleineren (Kreise).[112] Denn wahrscheinlich dürfte sogar richtiger *dieser* Beweis der *vermittels der Segmente* genannt werden als gerade der vermittels der Möndchen. Ein Kreissegment nämlich definierte auch Euklid im dritten[113] Buche seiner Elemente als „die Figur, die von einer Geraden und einem Kreisbogen eingeschlossen wird“. Also sind die Möndchen auch nicht eigentlich Segmente.[114] Und es könnte wohl mit Rücksicht hierauf ein Trugschluſs sein, daſs der Kreis zusammen mit dem Möndchen, aber nicht für sich, quadriert wird, da alles, was in den Beweis aufgenommen wurde, von geometrischen Prinzipien her genommen worden ist. Aber wenn, wie es scheint, die Quadratur des Möndchens von Hippokrates als eine allgemeine überliefert wurde (denn jedes Möndchen hat als äuſseren Bogen entweder den eines Halbkreises oder eines gröſseren Segmentes als ein Halbkreis oder eines kleineren), so könnte man wohl sagen, es sei möglich, aus dem dem Möndchen und dem Kreise gleichen Quadrate ein Quadrat herzustellen, das dem Kreise allein gleich ist, dadurch daſs man nach Wegnahme eines dem Möndchen gleichen Quadrates die übrigbleibende geradlinige Figur quadriert. Wie wird also noch ferner die Quadratur des Hippokrates als durch einen Trugschluſs zu stande gebracht erscheinen, wenn sie von Aristoteles als noch nicht gefunden angesehen wurde, indem er in den Kategorien sagt: „wie z. B. die Quadratur des Kreises, wenn sie erkennbar ist, so ist zwar eine Erkenntnis derselben noch nicht da, sie aber ist etwas Erkennbares“, während doch der Chier Hippokrates vor Aristoteles lebte, sodaſs auch Eudemus ihn zu den älteren zählte? Niemals nun wurde allgemein jedes Möndchen von Hippokrates quadriert. Denn wenn auch der äuſsere Bogen des Möndchens festgelegt ist, so kann man, während jener unverändert bleibt, die zahllosen inneren Bogen des Möndchens wahrlich bis ins Unendliche einen

nach dem andern zeichnen, indem die Fläche bis ins Unendliche geteilt wird, sodafs, während der äufsere derselbe bleibt, von den Möndchen die einen gröfser, die andern kleiner sind. Er selbst aber wählte den inneren Bogen als einen bestimmten: denn er wählte ihn so, dafs er ein Segment abschnitt, ähnlich den Segmenten, die bei dem äufseren Bogen gebildet werden; dabei befanden sich die des ersten Theorems auf einer Quadratseite und die bei den andern auf nicht näher bezeichneten.[115] Und somit wurde nicht jedes Möndchen quadriert, sondern die, deren innerer Bogen ähnlich den Segmenten ist, die bei dem äufseren gebildet werden und selbst irgendwie bestimmt sind.

III. Anmerkungen und Erläuterungen.

1. Simplicius lebte in der ersten Hälfte des sechsten Jahrhunderts n. Chr. In seiner *Philosophie der Griechen* (3. A. III², p. 843) sagt Zeller: „Neben Damascius erscheint als der bedeutendste unter den Platonikern jener Zeit, von denen uns eine erhebliche Zahl, teilweise auch durch ihre Schriften bekannt ist, der Cilicier Simplicius, welcher zuerst den Ammonius, dann den Damascius zum Lehrer hatte. Die Kommentare dieses Philosophen sind das Werk eines grofsen Fleifses und einer umfassenden Gelehrsamkeit; sie bilden nicht allein für uns eine unschätzbare Fundgrube von Bruchstücken älterer Philosophen und von Nachrichten über dieselben, sondern sie geben auch, trotz der Umdeutungen, von denen kein neuplatonischer Kommentar frei ist, eine sorgfältige und meist verständige Erklärung des Textes". Von dem Leben des Simplicius wissen wir nicht viel. Er hatte bei Ammonius (s. Anm. 53) in Alexandria und bei Damascius, dem letzten Vorstande der platonischen Schule von Athen, studiert. Als im Jahre 529 der Kaiser Justinian, in seinem Bestreben, das Heidentum gänzlich auszurotten, das Edikt erliefs, dafs in Zukunft niemand mehr in Athen Philosophie lehren solle, wanderten die letzten Mitglieder der Schule, darunter Damascius und Simplicius, nach Persien aus, von wo sie aber nach einigen Jahren, etwa um 533, wieder zurückkehrten, nachdem ihnen der Friedensschlufs zwischen Persien und dem römischen Reiche Sicherheit gegen Glaubenszwang verschafft hatte. Die Schule von Athen blieb allerdings geschlossen, Simplicius aber setzte seine gelehrte Thätigkeit noch längere Zeit nach der Rückkehr aus Persien fort. Den umfangreichen Kommentar zu der Physik des Aristoteles, der uns hier beschäftigt, hat er erst nach dem Tode des Damascius verfafst. (Zeller, l. c. 849—851.)

2. Eudemus von Rhodus war ein persönlicher Schüler des Aristoteles (384—322) und unter diesen wohl der hervorragendste. Von seinem

Leben ist uns weiter nichts bekannt; jedenfalls aber trennte ihn von Euklid nicht mehr als eine Generation. Von seinen Werken sind nur Bruchstücke erhalten. Diese hat Spengel (s. Anm. 5) 1865 gesammelt herausgegeben. Was wir von seiner *Geschichte der Geometrie* kennen, verdanken wir den Aufzeichnungen von Proklus und Eutokius, namentlich aber dem uns beschäftigenden Kommentare des Simplicius. Das von Simplicius überlieferte Referat ist dem zweiten Buche jener Geschichte entnommen und giebt uns einen ungefähren Begriff von der Anlage des Werkes. Beachtenswert und für das Verständnis des Simpliciusschen Berichtes nicht unwichtig ist übrigens schon die Thatsache an sich, daſs etwa 30 Jahre vor Euklid eine *Geschichte* der Geometrie entstanden ist. Das, was von dieser Geschichte uns erhalten ist, durch kritische Sichtung dem Wortlaute nach zu sichern, ist eine wichtige Aufgabe, zu deren Lösung auch die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern will.

3. Hippokrates von Chios, ursprünglich Kaufmann, kam um 440 v. Chr. nach Athen, wo er mit den Pythagoräern verkehrte. Genauere Mitteilungen über sein Leben und seine Werke findet man in den noch zu erwähnenden Arbeiten von Allman, Bretschneider, Cantor, Tannery. Seine Untersuchungen über die Quadratur der Möndchen werden uns natürlich noch genügend beschäftigen.

Da in dem Titel der vorliegenden Abhandlung neben Hippokrates auch Antiphon genannt ist, so sei das Wenige, was wir von seinem Leben wissen, gleich hier mitgeteilt. Er war ein athenischer Sophist, der zur Zeit des Sokrates (470—399) lebte, mit dem er mehrfach „haderte". Somit war er ein Zeitgenosse des Hippokrates.

4. Der Titel der Ausgabe lautet: Simplicii *commentarii in octo Aristotelis physicae auscultationis libros cum ipso Aristotelis textu.* Die aus der Druckerei der bekannten venetianischen Buchdruckerfamilie Manutius hervorgegangenen Drucke werden nach dem Begründer des Geschäftes *Aldinen* genannt.

5. Sie erschien 1870 zu Berlin in zweiter Auflage unter dem Titel: Eudemi *Rhodii Peripatetici fragmenta quae supersunt coll.* L. Spengel. Berolini 1870. Die Bruchstücke aus der *Geschichte der Geometrie* finden sich Seite 113—137.

6. Dieses Werk wird in der Folge einfach mit B. citiert werden.

7. Es würde natürlich viel zu weit führen, wollte ich alle diese Fehler nachweisen. Einige aber von ihnen hervorzuheben, namentlich solche, die weiterverbreitet worden sind, oder die sonst ein Interesse darbieten, wird nicht umgangen werden können.

8. Ausgenommen sind nur die verhältnismäſsig wenig zahlreichen Sätze, bei denen Loria der Übersetzung Tannerys oder Allmans gefolgt

ist. Aber selbst auch an solchen Stellen, an denen die *Aldina* durch die Ausgabe von DIELS (s. Anm. 11) längst überholt war, hat er es vorgezogen, der BRETSCHNEIDERschen Übersetzung zu folgen, statt den verbesserten Text der neuen Ausgabe („il testo assai migliorato") zu benutzen.

9. Auf die Einzelheiten werde ich noch näher eintreten.

10. Die Untersuchungen ALLMANS erschienen zuerst in Hermathena Vol. IV, p. 180—228. Aufser dem eigentlichen eudemischen Referate findet man bei ALLMAN auch noch die Wiedergabe eines Teiles der ersten Hälfte des SIMPLICIUSschen Berichtes, der mit EUDEMUS nichts zu thun hat. Abgesehen aber davon, dafs ALLMAN hierüber nicht ganz im Klaren zu sein scheint, ist noch zweierlei zu bemerken. Erstens nämlich ist die Darstellung ALLMANS nicht eine eigentliche Übersetzung sondern mehr eine freie Wiedergabe, und zweitens hat sich ALLMAN nicht völlig von BRETSCHNEIDER zu emanzipieren gewufst, denn man begegnet bei ihm einer Reihe von sinnstörenden Wendungen, die er einfach von BRETSCHNEIDER übernommen hat. Ich werde an den betreffenden Stellen darauf zurückkommen.

11. Sie bildet den neunten Band der grofsen, von der Berliner Akademie veranstalteten Ausgabe der *Commentaria in ARISTOTELEM graeca* und hat den Titel SIMPLICII *in ARISTOTELIS physicorum libros quatuor priores Commentaria ed.* H. DIELS. Berolini 1882. Der mathematische Bericht des SIMPLICIUS findet sich Seite 54—69. Die DIELSsche Ausgabe wird in der Folge einfach mit D. citiert werden. Es sei noch erwähnt, dafs die Vorbereitungen zu dieser Ausgabe schon von TORSTRIK getroffen worden waren. Nach seinem Tode hatte dann DIELS die Durchführung des Werkes übernommen.

12. Sie erschien in den Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2e Série T. V, p. 211—236. Diese Abhandlung, mit der wir uns sehr viel zu beschäftigen haben werden, soll in der Folge einfach mit Mém. citiert werden, während die der Praefatio der DIELSschen Ausgabe beigefügten Bemerkungen TANNERYS kurz mit Praef. bezeichnet werden sollen.

13. Philologus. Zeitschrift für das klassische Alterthum. 43. Band, Seite 336—344. Ich werde diese HEIBERGsche Besprechung mit Phil. citieren.

14. Bulletin des sciences mathématiques, 2e Série T. X, p. 213—226.

15. *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons.* Première partie. Paris 1887.

16. Dublin 1889. Ich citiere das Buch von ALLMAN kurz mit A.

17. Nämlich der in den Jahren 1878—1887 unter demselben Titel in Hermathena (s. Anm. 10) veröffentlichten Arbeiten.

18. Ich hielt es für wünschenswert, die Übersetzung so wörtlich als nur irgend möglich zu geben. Hätten es der Raum und andere Verhältnisse zugelassen, so hätte ich gerne der Übersetzung den griechischen Text gegenübergestellt, weil ich auf diesen sehr häufig zurückgreifen mufs. Wer sich daher für den kritischen Teil meiner Arbeit interessiert, wird die Dielssche Ausgabe zur Hand nehmen müssen. Alle auf die Übersetzung bezüglichen Anmerkungen werden durch D. (= Diels) und die betreffende Seiten- und Zeilenzahl jener Ausgabe bezeichnet sein.

19. Es ist nicht überflüssig, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dafs diese Frage, nämlich: „was meinte Aristoteles mit der Quadratur vermittels der Segmente“? das eigentliche Leitmotiv für den Kommentar des Simplicius bildete, nachdem er die den Antiphon betreffende Untersuchung rasch hatte erledigen können.

20. Dieses Urteil über Simplicius befindet sich allerdings in starkem Widerspruche mit der landläufigen Ansicht, die man sich in mathematischen Kreisen bisher über ihn gebildet hatte. Ich hoffe aber zuversichtlich, dafs nach meiner Übersetzung Simplicius in einem wesentlich günstigeren Lichte erscheinen wird, als dies bisher der Fall war. In der Bretschneiderschen Übersetzung erscheint er ja allerdings als ein rechter Tölpel und ungeschickter Schwätzer, aber diese Übersetzung würde Simplicius ganz gewifs nicht anerkannt, sondern mit Fug und Recht zurückgewiesen haben. Und wenn von den Bearbeitern, die auf Bretschneider folgten, der eine erklärt: „Simplicius was but a poor geometer“, und der andere bald von diesen bald von jenen Stellen sagt: „ils accusent l'ignorance de Simplicius“ oder: „ce passage peut servir d'exemple typique de la maladresse de Simplicius en géométrie“ u. s. w., so sind diese Urteile zum mindesten ungerecht. Denn zunächst mufs gesagt werden, dafs alle, die den Simplicius in solcher Weise beurteilen, ihn zuerst durch Bretschneider kennen gelernt haben und daher von anfang an in ungünstigem Sinne beeinflufst worden sind, und sodann dürfte es sich vielleicht doch noch verlohnen, zu untersuchen, ob nicht manches, was bisher als eine Ungeschicklichkeit des Simplicius gegolten hat, im Grunde genommen vielmehr als eine solche der Interpretation bezeichnet werden mufs. Denn in dem ganzen langen Berichte des Simplicius finden sich in der That nur zwei wirkliche Ungeschicklichkeiten und nicht mehr, und von diesen ist die eine nicht von Belang und vielleicht sogar Schuld des Abschreibers. Diesen zwei Stellen aber stehen so viele andere gegenüber, an denen Simplicius ein gründliches, sicheres Wissen, vollständige Beherrschung der Litteratur, vor allem aber — und dies erscheint mir das wichtigste zu sein — ein

klares, verständiges Urteil über die ihm vorliegenden Fragen bekundet, dafs man wohl behaupten darf, SIMPLICIUS habe nicht nur Anspruch auf den Dank sondern auch auf die Achtung der Mathematiker. Seine Auseinandersetzungen erscheinen uns ja heute allerdings manchmal etwas breitspurig, seine Wiederholungen oft ermüdend, aber man mufs doch billigerweise berücksichtigen, dafs SIMPLICIUS nicht speziell Mathematiker war, dafs er sich nicht speziell an Mathematiker wandte, dafs er einen Kommentar und kein Lehrbuch schreiben wollte und dafs dieser Kommentar überdies in dem sechsten Jahrhundert geschrieben wurde. Wer mit Berücksichtigung dieser historischen Verhältnisse an die Lektüre des SIMPLICIUSschen Berichtes herantritt, der wird ihn ganz gewifs mit grofsem Genusse lesen und er wird den Eindruck gewinnen, dafs SIMPLICIUS seine Aufgabe nicht nur gut, sondern — von einem mifsglückten Beweise abgesehen — sogar vortrefflich gelöst habe. Und wenn wir auch alle Ursache haben, zu bedauern, dafs er das eudemische Referat mit eigenen Erläuterungen vermischt habe, so wird ihm doch kein billig denkender Mensch daraus einen Vorwurf machen oder ihn deswegen ungünstig beurteilen. Er konnte doch gewifs nicht ahnen, dafs sein Kommentar später einmal die wichtigste, im vorliegenden Falle sogar die einzige EUDEMUSquelle werden würde!

Wenn ich mich bei dieser Frage der Beurteilung etwas länger aufgehalten habe, so geschah dies nicht nur, um dem SIMPLICIUS eine nachträgliche Ehrenrettung zu teil werden zu lassen und darauf hinzuweisen, dafs er von den Mathematikern ebenso günstig beurteilt werden darf wie von den Philosophen, — sondern vielmehr, weil bei der Interpretation einiger besonders wichtiger Stellen des Kommentars die Frage, welches Mafs von Ungeschicklichkeit dem Autor wohl zugemutet werden kann, von ausschlaggebender Bedeutung sein wird.

---

21. D. 54, 18. Bei BRETSCHNEIDER (B., p. 100) heifst es unrichtig „zu weiteren Schlüssen verwendet werden“, was auch ALLMAN (A., p. 65) zu der Übersetzung „lead thus to further conclusions“ veranlafst haben mag. Der Sinn ist aber doch natürlich der: Es sind zwei Sorten von Sätzen zu unterscheiden, die *beide* zu *falschen* Schlüssen führen. Die einen aber (τηροῦντες τὰς ἀρχὰς) wahren wenigstens die geometrischen Prinzipien, und diese Sätze soll, nach ARISTOTELES, der Geometer widerlegen; die anderen dagegen (ἀναιροῦντες τὰς ἀρχὰς) heben die Prinzipien auf, schieben sie bei Seite, und diese Sätze braucht man nicht zu widerlegen. Als Vertreter dieser letzteren Sätze wird ANTIPHON, als Vertreter der ersteren HIPPOKRATES genannt.

22. D. 54, 21. πολύγωνον, τετράγωνον, ὀκτάγωνον etc. bezeichnen hier und in der Folge, wie auch sonst vielfach, stets *regelmäfsige* Polygone.

23. D. 54, 22. Mit Recht bemerkt Heiberg (Phil., p. 336), aus der Wendung εἰ τύχοι gehe hervor, dafs das Quadrat nur ein von Simplicius selbst gewähltes Beispiel zur Erläuterung des ihm vorliegenden allgemeiner gehaltenen Berichtes sei. Ein anderer Kommentator des Aristoteles, Themistius (ungef. 317—387, in Konstantinopel), von dem wir bald werden zu reden haben, läfst den Antiphon von dem eingeschriebenen Dreiecke ausgehen. Daraus glaubten nun Bretschneider (B., p. 125) und Cantor (*Vorles.* I², p. 190) schliefsen zu sollen, Antiphon habe wirklich den Exhaustionsprozefs zweimal vorgenommen, indem er das eine Mal von dem Vierecke, das andere Mal von dem Dreiecke ausgegangen sei, — gewissermafsen zu seiner eigenen Beruhigung, da er sich doch nicht ganz sicher gefühlt habe. Indessen dürfte es wohl auch dem Antiphon klar gewesen sein, dafs es absolut keinen Unterschied ausmache, was für ein Polygon er zu Grunde lege, und so hätten ihm auch zwei solcher Prozesse durchaus keine gröfsere Sicherheit geben können, als wenn er den einen von ihnen mehrmals hinter einander wiederholt haben würde. Wir werden aber noch erfahren, dafs die beiden Berichte überhaupt gar nicht als zwei verschiedene zu zählen sind (s. Anm. 25), wodurch dann die Schlüsse von Bretschneider und Cantor von selbst dahinfallen werden.

24. D. 54, 25. ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰς περιφερείας. Die Verschiedenheit der Numeri läfst sich im Deutschen nicht beibehalten.

25. D. 55, 6. Im Texte heifst es: „. . . καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶν ὥστε ποτὲ . . .“ Da dies aber keinen Sinn giebt, so glaubte Usener (55, 6n.) hier eine Lücke annehmen zu müssen (für deren Ausfüllung er auch einen geeigneten Vorschlag machte), während Torstrik ὥστε durch ἐποίει hatte ersetzen wollen. Diels hingegen ist der Ansicht, dafs in ὥστε wahrscheinlich ᾤετο stecke, im übrigen aber die Stelle in Ordnung sei, eine Vermutung, der auch Tannery (Praef., p. XXVI) zustimmt. Es läfst sich nun in der That beweisen, dafs ὥστε durch einen Schreibfehler aus ᾤετο entstanden ist. Vergleicht man nämlich die vorliegende Stelle des Textes mit der schon erwähnten entsprechenden Stelle bei Themistius (Vol. V pars II der in Anm. 11 erwähnten grofsen Ausgabe der *Commentaria*, betitelt: Themistii *in Aristotelis physica paraphrasis ed.* H. Schenkl. Berolini 1900, p. 4, 2—4, 8), so zeigt sich eine ganz merkwürdige Übereinstimmung, die bisher nicht beachtet worden zu sein scheint. Wie bei Simplicius beginnt auch bei Themistius die Betrachtung mit der Erklärung, dafs sich mit dem Antiphon der Geometer eigentlich nicht abgeben solle, darauf folgt die Beschreibung des Antiphonschen Verfahrens.

und dann kommen genau dieselben entscheidenden Schlufsworte wie bei SIMPLICIUS und überdies noch in derselben Partizipialkonstruktion wie dort, nämlich: „... καὶ τοῦτο ἐφεξῆς ποιῶν ᾤετό ποτε ἐφαρμόσειν ..." Auch hier also wird, wie dort, das Endziel durch ἐφαρμόζειν bezeichnet; und zum Schlufs kommt dann noch, wie bei SIMPLICIUS, der Vorwurf, ANTIPHON habe das Prinzip aufgehoben, dafs die Gröfsen bis ins Unendliche teilbar seien.

Wer diese beiden Stellen zusammenhält, erkennt sofort, dafs sie einer gemeinsamen Quelle entsprungen sein müssen, und zwar einer, die auch die Wortfolge καὶ τοῦτο ἐφεξῆς (oder ἀεὶ) ποιῶν ᾤετό ποτε enthalten hatte. Diese Quelle kann aber kaum eine andere gewesen sein als EUDEMUS, von dem wir noch erfahren werden, dafs er sich ganz im Sinne der beiden Berichte ausgesprochen hat (s. Anm. 34).

26. D. 55, 8. Obwohl ἐφαρμόζειν gewöhnlich, namentlich von EUKLID, in dem Sinne von „zusammenfallen" gebraucht wird, so ziehe ich es doch vor, ganz wörtlich zu übersetzen, weil sich nicht mit Bestimmtheit behaupten läfst, dafs ANTIPHON ein eigentliches Zusammenfallen gemeint habe. Die ganze Stelle und die gleich darauf folgenden Schlufsworte lassen sich sehr wohl auch im Sinne einer Näherungskonstruktion deuten.

27. D. 55, 9. Unter den „Elementen" sind in dem ganzen SIMPLICIUSschen Berichte stets die Elemente EUKLIDS verstanden, die ich in der Folge natürlich immer nach der Ausgabe von HEIBERG citieren werde. Im vorliegenden Falle ist EUKLID II 14 gemeint.

28. D. 55, 12. BRETSCHNEIDER (B., p. 101) übersetzt παρὰ τὰς γεωμετρικὰς ἀρχὰς mit „aus geometrischen Gründen", was ein vollständiges Verkennen des ganzen Themas bekundet. Das Gegenteil ist natürlich richtig (s. Anm. 21).

29. D. 55, 13. ALEXANDER von Aphrodisias in Karien, der berühmte „Ausleger" des ARISTOTELES, lebte um 200 n. Chr. in Athen. Von seinen zahlreichen Kommentaren zu den Schriften des ARISTOTELES ist der zu dessen Physik leider verloren gegangen. Auf diesen stützt sich der ganze erste Teil des SIMPLICIUSschen Berichtes (D. 54, 12—59, 22).

30. D. 55, 16. EUKLID III 2 und III 16.

31. D. 55, 16—17. Vielleicht hat SIMPLICIUS auch nur gesagt ἄμεινον οὖν λέγειν ἀδύνατον εἶναι, und das andere ist von fremder Hand hinzugefügt, wofür auch die stilistische Härte des Textes sprechen würde. Jedenfalls hat er nur dieses sagen *wollen*. Denn er wendet sich gegen ALEXANDER nicht wegen des ὡς ἀρχήν, sondern wegen des ὑποτίθεται und darin hat er auch ganz recht. Er selbst gebraucht an dieser Stelle das Wort ἀρχή nicht in dem spezifischen Sinne des mathematischen Prinzipes, in dem er es gleich nachher benutzt, sondern so wie wir etwa

sagen würden „es ist prinzipiell unmöglich". Immerhin gebe ich zu, dafs, die Zuverlässigkeit des Textes vorausgesetzt, hier eine erste Ungeschicklichkeit, wenigstens des Ausdruckes, vorliegt. Dafs aber damit zugleich eine fehlerhafte Überlegung verbunden sei, folgt daraus noch nicht. Die Beurteilung, die TANNERY (Praef., p. XXVI) der Stelle zu teil werden läfst, erscheint mir daher als etwas zu streng.

32. D. 55, 19. TANNERY (Praef., p. XXVII) verlangt ἓν vor σημεῖον, was sachlich durchaus begründet ist. Andererseits ist das Fehlen von ἓν in solchen Fällen keine Seltenheit und hat daher nichts Auffälliges.

33. D. 55, 21. Den Satz εἴπερ ἐπ' ἄπειρόν ἐστι διαιρετὸν τὸ ἐπίπεδον übersetzt BRETSCHNEIDER (B., p. 102) in ganz unangemessener Weise durch „selbst wenn man die Teilung der Fläche bis ins Unendliche treibt", was gar nicht in den vorliegenden Gedankengang hineingehört. Allerdings darf erwähnt werden, dafs die *Aldina* διαιρεῖν statt διαιρετὸν enthält, was indefs nicht viel ändert. Die falsche Übersetzung findet sich aber auch bei ALLMAN (A., p. 66), nämlich „even though the cutting should be continued ad infinitum".

34. D. 55, 23. Siehe den Schlufs von Anm. 25. Es sei übrigens erlaubt, darauf hinzuweisen, dafs SIMPLICIUS diese Verhältnisse sehr sachgemäfs auseinandersetzt und dafs er darüber genau unterrichtet ist, gegen welches geometrische Prinzip ANTIPHON angeblich gesündigt habe. Wenn er die Einsicht in diese Dinge dem EUDEMUS verdankt, so zeigt das nur, dafs er es verstanden hat, sich an die richtige Quelle zu wenden, was in dem vorliegenden Falle von ALEXANDER nicht wohl gesagt werden kann. Wenn man aber dem SIMPLICIUS unbedingt zugeben mufs, dafs er den Kern der ganzen Sache durchaus richtig erfafst habe, so wird man nachträglich auch geneigt sein, die in Anm. 31 besprochene Ungeschicklichkeit auf ihr richtiges Mafs zurückzuführen.

Was nun ANTIPHON anbetrifft, so hat bekanntlich die Geschichte ein weniger doktrinäres Urteil über ihn gefällt, als es ARISTOTELES gethan hat. Denn ob ANTIPHON den gegen ihn erhobenen Vorwurf verdient, oder ob er mifsverstanden worden ist (s. Anm. 26), spielt keine grofse Rolle. Unter allen Umständen verdient er einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Geometrie, denn er hat „als der erste den völlig richtigen Weg betreten und den Flächeninhalt eines krummlinigen Raumes zu ermitteln versucht, indem er ihn durch Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen (exhaurire) suchte" (HANKEL, *Zur Gesch. d. Mathem.*, p. 117). Und der von ANTIPHON vorgezeichnete Weg blieb für die Folge mafsgebend: auf ihn gründeten ARCHIMEDES und seine Nachfolger die exakte Ausmessung des Kreises, auf ihn gründete auch VIETA seine Produktentwickelung der Zahl π.

35. D. 55, 25. Nämlich ARISTOTELES (s. den Schlufs der Einleitung). Damit kommt nun SIMPLICIUS zu dem Hauptthema seines Berichtes.

36. D. 55, 26. Die Wendung λέγοι δὲ ἂν übersetzt BRETSCHNEIDER (B., p. 102) mit „er möchte nämlich lieber (!) nennen" nnd auch bei ALLMAN (A., 66—67) findet sich „he would rather call". Das ist aber ein ärgerliches Mifsverständnis, während der Sachverhalt doch der folgende ist: Weil SIMPLICIUS nicht wissen konnte, welche Quadratur ARISTOTELES mit „der vermittels der Segmente" gemeint hatte (s. den Schlufs der Einleitung sowie Anm. 19), so war er natürlich anf Vermutungen angewiesen. Von diesen spricht er nun hier eine ans, um dann später zu anderen überzugehen und sie auch auf ihre Zulässigkeit zu prüfen. Es sei übrigens bemerkt, dafs SIMPLICIUS an dieser Stelle nur dem Sinne aber nicht dem Wortlaute nach dem Kommentare ALEXANDERS folgt; die Worte ALEXANDERS selbst werden später anch noch mitgeteilt.

37. D. 55, 27. Die Konzession, die SIMPLICIUS hier macht, ist sehr bemerkenswert. SIMPLICIUS kannte nämlich, wie überhaupt die Elemente EUKLIDS, so anch natürlich die enklidische Definition von τμῆμα κύκλου (= Kreissegment) sehr wohl und er ist am Schlusse seines Berichtes auch in ganz verständiger Weise auf das hier Gesagte zurückgekommen. Trotzdem hatte es also offenbar für ihn nichts Verletzendes, sogar ein Möndchen, wenigstens vorübergehend, als ein τμῆμα gelten zu lassen. Es ist dies jedenfalls ein Zeichen dafür, dafs dieses Wort nicht nur in seiner engeren Bedeutung als Segment, sondern auch noch in ganz allgemeinem Sinne in der mathematischen Sprache gebraucht wurde.

38. D. 56, 1. Natürlich ALEXANDER.

39. D. 56, 13. Im Texte steht περὶ αὐτὰ, was aber unrichtig ist, denn die Kreise werden nicht um die Quadrate, sondern um die Durchmesser beschrieben. Es mufs also περὶ αὐτὰς heifsen, wie auch D. 57, 10 zeigt. Dafs übrigens αὐτὰ nicht nur ein Druckfehler ist, folgt daraus, dafs anch die *Aldina* αὐτὰ hat.

40. D. 56, 14. EUKLID XII 2.

41. D. 57, 2—14. Diese ganze Deduktion: „Alsdann ist jeder... über den Seiten des Sechsecks" ist ja allerdings für unseren Geschmack etwas breitspurig, immerhin aber ist das logische Gefüge der Sätze durchaus tadellos, der ganze Beweis sauber und schön. Bei BRETSCHNEIDER hingegen fällt infolge unrichtiger Übersetzung, namentlich der Konjunktionen, das ganze Satzgefüge derart auseinander, dafs die Worte des SIMPLICIUS (oder vielmehr des ALEXANDER) als reines Geschwätz erscheinen. Gerade solche Stellen mufsten den Autor, allerdings sehr mit Unrecht, in den Ruf eines ungeschickten Menschen bringen. Auch die Textkorrektur, die BRETSCHNEIDER p. 104, Anm. 1 anbringt, ist verkehrt. Denn der Um-

stand, dafs die *Aldina* allerdings die Wendung τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἡμικύκλιον enthält, brauchte ihn keineswegs, wie Diels (57, 11 n.) zur Erklärung bemerkt, dazu zu verleiten, das durch die logische Satzfolge unbedingt geforderte ἡμικύκλιον zu streichen und dann ὥστε gewaltsam durch „aber" zu übersetzen. Kommt doch gleich nachher genau dieselbe Wendung (ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἡμικύκλιον) wieder, ohne dafs Bretschneider diesmal daran Anstofs nimmt!

42. D. 57, 15. Ich lese τὰ ὑπό τε τῶν, wie es auch an der entsprechenden Stelle D. 64, 2 heifst.

43. D. 57, 25. Ψευδογράφημα bedeutet wörtlich etwas falsch Geschriebenes oder Gezeichnetes, im weiteren Sinne also auch einen Trugschlufs, der aus einer falschen Figur abgeleitet worden ist. Die griechische Sprache kennt aufserdem noch die Wörter ψευδογραφία = falsches Zeichnen und daher auch falsches Schliefsen, und ψευδογραφέω = durch eine falsche Figur täuschen. Alle drei Ausdrücke kommen in dem vorliegenden Berichte vor.

44. D. 57, 25—29. Die in diesem Absatz enthaltene Kritik rührt ebenfalls von Alexander, nicht von Simplicius her (D. 57, 25 n.). Es kann übrigens natürlich kein Zweifel darüber bestehen, dafs hier ein Mifsverständnis vorliegt. Denn dafs ein so eminenter Geometer, wie Hippokrates, einen so plumpen Trugschlufs, wie den vorliegenden, begangen haben sollte, wird niemand glauben, der die von Eudemus überlieferten scharfsinnigen Untersuchungen dieses Mathematikers kennen gelernt hat. Der Umstand übrigens, dafs Simplicius diese Quadratur vermittels des Möndchens über der Sechsecksseite bei Eudemus nicht gefunden hat, wie sich noch zeigen wird, läfst mit Recht daran zweifeln, ob sie überhaupt von Hippokrates herrühre. Dies ist denn auch die Überzeugung, zu der schliefslich Simplicius kommt.

45. D. 58, 1. Der ganze hier beginnende Absatz ist von Bretschneider mifsverstanden worden. Mit den Worten (B., p. 105): „Es ist daher die hier gegebene Nachweisung, die da meint, den Kreis durch Monde zu quadrieren, eine unvollkommene und nicht zwingende, weil in ihr ein Fehlschlufs unterläuft ..." gliedert er ihn in ganz verkehrter Weise an das Vorhergehende an, ohne zu merken, dafs jetzt noch von einer *anderen* Art, den Kreis durch die Möndchen zu quadrieren, gesprochen werden soll. (Die unbedeutenden Abweichungen der *Aldina* von Diels spielen dabei keine Rolle.) Leider ist aber auch Allman (A., p. 68) hier wieder der Bretschneiderschen Übersetzung gefolgt: „The above proof, therefore, which pretends to have squared the circle by means of lunes, is defective, and not conclusive, on account of the false-drawn figure (ψευδογράφημα) which occurs in it." Dafs bei einer solchen Art der Be-

handlung Simplicius schliefslich zu einem „poor geometer“ (s. Anm. 20) werden konnte, ist allerdings nicht zu verwundern. Allman begeht aber noch einen weiteren Irrtum. Denn obwohl der genannte Satz, richtig übersetzt, nichts weniger als ein Schlufssatz ist, so schliefst Allman doch damit den ersten Teil seiner Übersetzung (s. Anm. 10) ab, indem er in einer Anmerkung hinzufügt: „I attribute the above observation (nämlich den soeben wörtlich mitgeteilten mifsverstandenen Satz) on the proof to Eudemus. What follows in Simplicius seems to me not to be his. I have, therefore, omitted the remainder of § 83 and § 84, 85, pp. 105—109, Bretsch., Geom. vor Eukl.“ Es sind das etwas viel Mifsverständnisse auf kleinem Raume. Wie Allman den mitgeteilten Satz, auch wenn die Bretschneidersche Übersetzung die richtige wäre, dem Eudemus zuschreiben konnte, ist ganz unverständlich. Aber freilich befindet sich Allman überhaupt in dem Irrtum, alles von ihm bisher Mitgeteilte rühre im wesentlichen von Eudemus her. Kündigt er doch bei Beginn seines Berichtes an: „I shall attempt now to restore this fragment by removing from it everything that seems to me not to be the work of Eudemus...“

46. D. 58, 2—3. Der Text ist hier etwas unsicher. Offenbar aber spielt Alexander, den Simplicius immer noch sprechen läfst, auf den eben gekennzeichneten Trugschlufs an. Dafs der aber doch wieder mit unterläuft, wird nachher von Simplicius gezeigt.

47. D. 58, 8—13. Die in diesen Zeilen enthaltene Kritik rührt offenbar von Alexander her, der sich damit begnügt, auf die Unmöglichkeit hinzuweisen, den ganzen Kreis in Möndchen zu zerlegen.

48. D. 58, 13—24. Mit *οὐχ ὑγιῆς* wendet sich Simplicius nun selbst gegen die von Alexander mitgeteilte Quadratur und zwar in sehr zutreffender Weise: sie ist vor allen Dingen nicht verständig und im übrigen läuft sie auf denselben Trugschlufs hinaus wie die frühere bei dem Sechseck.

49. D. 59, 6. Ich lese mit Tannery (Praef., p. XXVII) *ἀλλὰ κατὰ τὴν*.

50. D. 59, 7. Bretschneider glaubt (B., p. 106, Anm. 2), hier und auch noch an einigen folgenden Stellen *κύκλος* durch *κυκλικὸς* ersetzen zu müssen. Aber wie *τετράγωνος* und *τετραγωνικὸς*, so wechseln auch in demselben Absatze *κυκλικὸς* und *κύκλος* mit einander (D. 59, 7 n.). Bretschneider verfährt übrigens bei diesen Korrekturen nicht einmal konsequent (D. 59, 17 n.).

51. D. 59, 17. Nämlich im Sinne der dritten Dimension, der Tiefe, insofern zu der zweidimensionalen Zahl $5 \cdot 5 = 25$ noch ein dritter Faktor 5 hinzutritt. Man vergleiche übrigens mit den in diesem ganzen Abschnitte vorkommenden Erklärungen die Definitionen von Euklid VII.

52. D. 59, 22. Verständiger als es Simplicius in diesem ganzen Abschnitte thut, kann man sich nicht wohl ausdrücken. Obwohl es sich bei dem, was Alexander mitteilt, nur um eine sophistische Spielerei handelt (die nach der Ansicht von Tannery erst zur Zeit Alexanders selbst aufgekommen war), so zeigt sich Simplicius doch vollkommen orientiert. Über die Definition und die Entstehungsweise der quadratischen und der cyklischen Zahlen weifs er alles Erforderliche, er korrigiert die verkehrten Angaben Alexanders in durchaus sachgemäfser Weise, er lehnt es ab, dafs irgend ein Zusammenhang zwischen dieser Zahlenspielerei und dem geometrischen Probleme der Kreisquadratur bestehe, und er giebt zum Schlufse die ganz vernünftige psychologische Erklärung, dafs es sich im Grunde genommen wohl nur um eine einfache Ideenassoziation handele.

53. D. 59, 23. Ammonius, Sohn des Hermias, lehrte in Alexandria. Er war ein Schüler des Proklus, der 410 in Konstantinopel geboren wurde und 485 in Athen starb.

54. D. 59, 28. Hier liegt wieder ein sinnentstellender Übersetzungsfehler Bretschneiders vor. Er übersetzt (B., p. 107—108): „Denn weder für den Winkel des Halbkreises noch für die Ergänzung des sogenannten hornartigen Winkels zu einem Rechten . . .“ Abgesehen davon, dafs diese Ergänzung wieder der Winkel des Halbkreises selbst ist, sollte man meinen, der hornförmige Winkel habe in der Geschichte der Mathematik eine hinreichend grofse Rolle gespielt, um vor Mifsdeutungen gesichert zu sein. Der Winkel des Halbkreises ist bekanntlich der Winkel α, den der Halbkreis mit seinem Durchmesser bildet, und *seine* Ergänzung β zum Rechten, nämlich eben der sogenannte hornförmige Winkel, ist der Winkel, den der Halbkreis mit der Tangente im Endpunkte des Durchmessers einschliefst. Von diesen beiden Winkeln hat schon Euklid (III 16) den Fundamentalsatz bewiesen: „Der Winkel des Halbkreises ist gröfser als jeder spitze geradlinige Winkel, seine Ergänzung aber kleiner.“ Die Bezeichnung γωνία κερατοειδής findet sich zwar bei Euklid noch nicht, dagegen wiederholt bei Proklus. Mit Rücksicht nun auf jenen Satz Euklids waren die beiden genannten Winkel für die Alten etwas Rätselhaftes: sie waren keine stumpfen Winkel, sie waren auch keine eigentlichen spitzen Winkel, oder schienen wenigstens durch keinen spitzen geradlinigen Winkel mefsbar, sie waren einfach nicht auszumitteln.

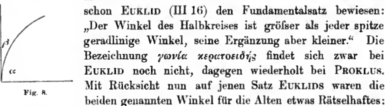


Fig. 8.

55. D. 60, 6. Mit ἀλλὰ καὶ ἀσύμβλητοι meint eben Simplicius das, was im Anschlusse an Euklid III 16 in Anm. 54 gesagt worden ist. Dafs er aber sofort auf diesen Satz hinweist, der jenen Winkeln, wenigstens nach der Ansicht der Alten, eine Ausnahmestellung sichert, darf immer-

hin anerkannt werden. Auch sonst hat die Logik, die SIMPLICIUS gegen AMMONIUS entwickelt, etwas entschieden Ansprechendes. Natürlich sind die Begriffe „verwandt", „ungleichartig", u. s. w. nicht mathematisch definiert, das ist auch nicht zu verlangen. Aber SIMPLICIUS verbindet damit doch ganz vernünftige Vorstellungen, die trotz der ihnen anhaftenden Unbestimmtheiten logische Verbindungen zulassen. Kurzum, was er sagt, hat Hand und Fufs. Nur mufs man es nicht in der BRETSCHNEIDERschen Übersetzung lesen, die aus den Worten des SIMPLICIUS ein bedauerliches Kanderwelsch macht.

56. D. 60, 7. JAMBLICHUS entstammte einer reichen syrischen Familie und wurde in Chalcis in Cölesyrien geboren. Er war ein Schüler des PORPHYRIUS, unterhielt eine Schule, wahrscheinlich in seiner Vaterstadt, und starb um 330 n. Chr. (ZELLER III², p. 679 und CANTOR I², p. 429 —432).

57. D. 60, 10. Nach ZELLER (III², p. 103) ein neupythagoreischer Schriftsteller, über den, abgesehen von der Erwähnung durch JAMBLICHUS, nichts weiter bekannt ist.

58. D. 60, 18. Bei DIELS schliefst der Absatz erst mit dem folgenden Satze (ALEXANDER ... bewiesen). Der Zusammenhang spricht aber mehr für die von TANNERY (Praef., p. XXVII) vorgeschlagene und hier adoptierte Gliederung.

59. D. 60, 24. Die Art, wie SIMPLICIUS kommentiert, bringt es mit sich, dafs er nicht fertige, unumstöfsliche Thatsachen darbietet; vielmehr läfst er den Leser an der Untersuchung teilnehmen, auch auf die Gefahr hin, auf früher Gesagtes wieder zurückkommen zu müssen. So verhält es sich auch wieder hier. SIMPLICIUS weist am Schlusse seines Berichtes ganz klar nach, dafs HIPPOKRATES den Beweis nicht allgemein geführt hatte. Darüber ist er also absolut nicht im Zweifel. Aber hier schon auf eine solche Kritik einzutreten, würde dem Gange seiner Untersuchung nicht entsprechen, daher nimmt er zunächst einmal den Schein für die Wahrheit.

60. D. 60, 28. Ich habe die Lesart der Handschriften *ὀλίγην τινὰ προστιθεὶς σαφήνειαν* beibehalten, obwohl sie etwas befremdlich ist.

61. D. 61, 1. Mit diesem Satze, der bei BRETSCHNEIDER eine kaum glaubliche Interpretation gefunden hat, beginnt nun also das berühmte Referat des EUDEMUS. Unter Hinweis auf das bereits in der Einleitung Gesagte bemerke ich, dafs das, was nach meiner Meinung dem EUDEMUS zuzuweisen ist, in *schräger* Schrift hervorgehoben werden soll. Der Leser ist dann, da auch der ganze übrige Text, in gewöhnlicher Schrift, mitgeteilt wird, in der Lage, die vorgenommene Ausscheidung überblicken und prüfen zu können. Dabei werde ich jede Abweichung von der DIELS-

schen Ausgabe genau bezeichnen und begründen und mich, soweit möglich, auch mit den Interpretationen von ALLMAN, TANNERY und HEIBERG auseinandersetzen.

62. D. 61, 2 ALLMAN (A., p. 69) rechnet διὰ τὴν οἰκειότητα ... zu ἐγράφησαν statt zu οὐκ ἐπιπολαίων. Dieser Auffassung steht aber doch wohl das πρώτον entgegen; auch gehörte ja hinsichtlich der Quadratur der Kreis gewifs zu den nicht gewöhnlichen Figuren.

63. D. 61, 3. Aus dieser anerkennenden Wendung κατὰ τρόπον (die BRETSCHNEIDER mit „im Laufe der Zeit" wiedergegeben hat) geht hervor, dafs EUDEMUS dem HIPPOKRATES sicherlich keinen Trugschlufs vorzuwerfen hat, worauf auch TANNERY (Praef., p. XXVII) ausdrücklich hinweist.

64. D. 61, 7. Die Wendungen δυνάμει, ἴσον (μεῖζον, ἔλαττον) δύνασθαι und ähnliche, die hier zum ersten Male in dem Berichte auftreten (in der Folge aber sowohl von SIMPLICIUS wie von EUDEMUS, und zwar in übereinstimmender Weise, gebraucht werden, sodafs sie nicht zur Unterscheidung zwischen beiden benutzt werden können), werden übersetzt mit: in der Potenz, in der Potenz gleich (gröfser, kleiner) sein u. s. w. Die Ausdrücke „a in der Potenz" oder „a ist in der Potenz gleich b" oder „a ist in der Potenz gleich b und c" u. s. f. bedeuten soviel wie a^2 oder $a^2 = b^2$ oder $a^2 = b^2 + c^2$ u. s. f. Der Ausdruck Potenz (δύναμις) ist also äquivalent dem Ausdrucke Quadrat (τετράγωνον), die beiden Ausdrücke werden aber entsprechend dem Texte auch in der Übersetzung auseinander gehalten werden.

65. D. 61, 8. TANNERY (Mém., p. 221) übersetzt diese Stelle mit „Il le démontre en s'appuyant sur ce qu'il avait démontré..." HIPPOKRATES hatte nämlich nach dem Zeugnis des EUDEMUS (EUDEMI *fragm.*, ed. SPENGEL, p. 114; oder auch PROKLUS, ed. FRIEDLEIN, p. 66) als Erster „Elemente" geschrieben, denen aber die Untersuchungen über die Möndchen schwerlich werden angehört haben, da sie ihrer ganzen Anlage nach wohl nicht hineingepafst hätten. TANNERY ist nun der Ansicht, HIPPOKRATES habe den Satz, dafs sich die Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, nur in den „Elementen" bewiesen und sich in seiner Abhandlung über die Möndchen einfach auf den früheren Beweis bezogen. Aber schon USENER (Praef., p. XXVII) hat darauf hingewiesen, dafs diese Deutung nicht im Einklang mit den vorliegenden Worten des EUDEMUS stehe. In der That folgt keineswegs aus der Form δεῖξαι, dafs der dadurch bezeichnete Beweis dem durch ἐδείκνυεν bezeichneten vorangegangen sei, wie TANNERY meint, denn der Infinitiv des Aorist enthält an sich keine Bestimmung der Zeitstufe. Ich kann aber auch darin TANNERY nicht beistimmen, dafs es gegen alle Logik verstofse, anzuneh-

men, HIPPOKRATES habe, wie das ja ausdrücklich von EUDEMUS gesagt wird, an die Spitze seiner Abhandlung den Satz von den Segmenten gestellt und erst dann den von den Kreisen folgen lassen, während dieser doch für jenen unentbehrlich sei. Das wäre allerdings gegen alle Logik bei einem Lehrbuche. Bei einer Abhandlung liegen die Sachen aber doch anders. Wenn man berücksichtigt, daſs der Satz von der Proportionalität der Segmente und der Quadrate ihrer Grundlinien das eigentliche Fundament der Untersuchungen des HIPPOKRATES bildet, daſs sich alles um diesen Satz dreht, während der entsprechende Satz von den Kreisen, der ja natürlich an sich ein Fundamentalsatz ist (schlieſslich aber doch ein Spezialfall von jenem), hier nur die Rolle eines Hülfssatzes spielt, so ist es doch gewiſs nicht befremdend, wenn HIPPOKRATES den Satz, auf dem er seine ganze Untersuchung aufbauen will, dadurch auszuzeichnen sucht, daſs er ihn an die Spitze seiner Abhandlung stellt und ihn als ersten und wichtigsten ausspricht, bevor er nur zu irgend welchen Beweisen übergeht.

Übrigens halte ich es nicht einmal für wahrscheinlich, daſs HIPPOKRATES die „Elemente“ vor der Abhandlung über die Quadratur der Möndchen geschrieben habe. Denn in dieser hätte er oft genug Gelegenheit gehabt, sich auf jene zu beziehen, und EUDEMUS würde uns dann doch wohl den einen oder den andern von diesen Hinweisen überliefert haben.

66. D. 61, 9. Im Texte steht nur *δεύτερον* (was BRETSCHNEIDER mit „zum zweiten Male“ übersetzt, während es sich natürlich um EUKLID XII 2 handelt). Derartige Kürzen, namentlich bei EUKLIDcitaten, werden in der Folge noch wiederholt vorkommen, ich hielt es aber nicht für erforderlich, dies in der Übersetzung besonders zu kennzeichnen.

Es ist nicht daran zu zweifeln, daſs dieser Satz EUKLID XII 2 auch in den „Elementen“ des HIPPOKRATES gestanden hat. Weniger sicher erscheint dies für jenen Satz von der Proportionalität der Segmente und der Quadrate ihrer Grundlinien. Der Satz fehlt wenigstens bei EUKLID.

67. D. 61, 12. Ich übersetze hier *τμήματα* mit *Sektoren* und glaube, daſs dies das erlösende Wort ist, durch das der Bann gebrochen wird, der bisher noch auf dem ganzen SIMPLICIUSschen Berichte gelastet hat. Da die beiden Sätze von *ὡς γὰρ* (D. 61, 11) an bis zu *τριτημορίῳ* (D. 61, 14) in dem Sinne zusammengehören, daſs in ihnen *τμήματα* beide Male dasselbe bedeutet, und da sie offenbar auch von derselben Hand herrühren, so sind vier Fälle möglich: Entweder bedeutet *τμῆμα* beide Male *Segment* oder beide Male *Sektor*, in jedem dieser Fälle können die Sätze von SIMPLICIUS oder EUDEMUS herrühren.

Angenommen *τμῆμα* habe die übliche Bedeutung *Segment* und die beiden Sätze stammten von SIMPLICIUS. Dies ist die Ansicht von DIELS,

Usener, Tannery und Heiberg. Der Annahme steht aber Folgendes entgegen. Zunächst schliefst sich ὡς γὰρ offenbar unmittelbar an ἐδεί-κνυεν an. Das meint auch Tannery, indem er sagt: „Il veut faire lui-même la démonstration indiquée par Eudème.“ Für Simplicius wären aber die eigenen Worte ὅπερ Εὐκλείδης ... τετράγωνα, die sich nur auf den von δεῖξαι abhängigen Satz bezogen, entschieden hinderlich gewesen, nun mit ὡς γὰρ fortzufahren, um damit an etwas für ihn weit zurückliegendes anzuknüpfen. Sein Sprachgefühl hätte ihn sicherlich eine andere Wendung wählen lassen. Gesetzt aber, es sei doch Simplicius, der spreche. Dann wäre seine Beweisführung mit dem ersten jener beiden Sätze, nämlich mit ὡς γὰρ ... τμήματα eigentlich zu Ende gewesen. Denn wenn er den Eudemus von den ähnlichen Segmenten hatte sprechen lassen, ohne es für nötig zu finden, sofort eine Definition hinzuzufügen, so brauchte er eine solche auch nicht am Schlusse des Beweises zu geben, wo sie nicht hingehört. Sehen wir aber auch darüber hinweg nnd wenden wir uns zu der Hauptsache, nämlich zu der gegebenen Definition. Ähnliche Segmente sollen also solche sein, die denselben Teil des Kreises ausmachen. Was soll man nun zu einer solchen Definition sagen! Die ist doch total unbrauchbar. Wie wollte man mit ihrer Hülfe in einem gegebenen Falle die Ähnlichkeit zweier Segmente prüfen! Und nun noch gar die Veranschaulichung durch den Drittelkreis! Wenn dies eine wirkliche Erläuterung sein soll und nicht nur leere Worte, so müfste doch ein Drittelkreis, im Sinne eines Segmentes, ein geläufiges Beispiel sein, wovon gar keine Rede ist. Und dann kommt endlich noch das διὸ. *Deswegen* also, weil ähnliche Segmente solche sind, die denselben Teil des Kreises ausmachen, *deswegen* nehmen ähnliche Segmente auch gleiche Winkel auf!

Nun hat ja Tannery (Mém., p. 227) für alle diese fatalen Situationen, in die man da gedrängt wird, eine sehr einfache Erklärung gegeben: Wir haben es eben hier mit einem typischen Beispiele von der Ungeschicklichkeit des Simplicius in geometrischen Dingen zu thun. Dazu wird man aber doch füglich fragen dürfen: Was giebt nns denn ein Recht, ein so vernichtendes Urteil über Simplicius zu fällen? Denn wenn man sich nicht in einem circulus vitiosus bewegen will, so mufs man doch die Ungeschicklichkeit des Simplicius zunächst durch andere Beispiele begründen, bevor man sie zur Erklärung der vorliegenden Stelle heranziehen darf. Wer aber auch nur bis hierher den Bericht gelesen hat, der mufs von Simplicius einen Eindruck erhalten haben, der ihm einfach nicht erlaubt, mit gutem Gewissen so geringschätzig zu urteilen, und dieser gute Eindruck wird sich gegen den Schlufs des Berichtes hin nur noch steigern. Es liegt in der That nicht der Schatten einer Berech-

tigung vor, dem SIMPLICIUS eine solche Ungeschicklichkeit, wie sie hier erforderlich wäre, zuzutrauen. Ungeschicklichkeit wäre in diesem Falle übrigens eine euphemistische Bezeichnung, denn die Sache liegt noch viel schlimmer: Kurz vorher hat SIMPLICIUS gesagt, er wolle nur einige wenige Erläuterungen hinzufügen, und nun läfst er sich beikommen, sogar eine ganz neue Definition zu erfinden, und diese Definition erfindet er überdies ganz zwecklos, denn nach der Interpretation TANNERYS kommt er ja doch nicht zum Ziele, und er erfindet sie schliefslich sogar — was besonders gravierend ist — angesichts der ihm vorliegenden und ihm wohl bekannten euklidischen Definition, die er selbst einige Zeilen später (D. 61, 32) ganz richtig citiert!

Bevor man sich entschliefsen wird, alle diese Ungeheuerlichkeiten zu glauben, wird man zunächst doch wohl untersuchen wollen, ob die Stelle nicht noch andere Interpretationen zuläfst. Das Wort τμῆμα wieder in der Bedeutung *Segment* zu nehmen und jene beiden Sätze dem EUDEMUS zuzuschreiben, würde aber nicht viel ändern. Einiges würde gemildert, anderes aber verschärft werden. Denn nun müfste man schliefslich den HIPPOKRATES für den ganzen Unsinn verantwortlich machen, was doch wohl nicht sein darf und was auch auf keinen Fall befriedigt. Dann bleibt aber nichts anderes übrig, als τμῆμα einmal die Bedeutung *Sektor* beizulegen. Über die Berechtigung dieser Interpretation werde ich nachher noch sprechen und hier nur noch annehmen, der Autor jener beiden Sätze sei EUDEMUS. Der Leser aber möge entschuldigen, wenn sich diese Untersuchungen etwas in die Länge ziehen. Allein es handelt sich hier nicht nur um die weitaus wichtigste und schwierigste Stelle des ganzen eudemischen Referates, sondern zugleich auch um eine Stelle, deren Interpretation von ausschlaggebender Bedeutung ist für die Beurteilung des Zustandes der geometrischen Wissenschaft zur Zeit des HIPPOKRATES.

EUDEMUS führt also jetzt den durch ἐδείκνυεν angekündigten Beweis, wenigstens der Hauptsache nach, wirklich durch. Schon *dafs* er es thut, ist befriedigend. Denn die Andeutung, die der Satz τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ... τοῖς κύκλοις giebt, wäre nicht ausreichend gewesen, und das Fehlen einer weiteren Ausführung dürfte füglich befremden. Der Satz ὡς γὰρ ... τμήματα schliefst sich jetzt in bester Ordnung an ἐδείκνυεν an. Dafs τμήματα nun eine andere Bedeutung hat als zuvor, dafür spricht schon die Thatsache an sich, dafs *überhaupt* jetzt eine Definition folgt. Das wäre nicht nur unnötig sondern sogar ungehörig, wenn ὅμοια τμήματα dasselbe bedeutete wie zuvor. Und nun die Definition selbst! Die ist für Sektoren so typisch, so unzweideutig bezeichnend, dafs sie, aus dem Zusammenhange herausgenommen, sicherlich von jedem, der τμῆμα nur in der allgemeinen Bedeutung „ein abgeschnittenes Stück" kennt, sofort auf

Sektoren bezogen würde. Wer wird denn jemals aus zwei Kreisen entsprechend gleiche Stücke anders als in Sektorenform herausschneiden! Und wer noch zweifeln wollte, dem müfste der letzte Zweifel durch das Beispiel des Drittelkreises genommen werden. Der Drittelkreis als *Sektor* aufgefafst, ja das ist ein Beispiel, das sich sehen lassen kann. Der Sektor mit dem Centriwinkel von 120 Grad, dessen Sehne die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, das ist ein Beispiel, das auch in den ältesten Zeiten jedem geläufig war und das sehr wohl durch ein οἷον eingeführt werden durfte. Nunmehr steht denn auch der ganze Beweis des von Hippokrates an die Spitze gestellten Hauptsatzes in seinen Grundlinien deutlich vor uns: Zuerst hat Hippokrates die Proportionalität der Kreise und der Quadrate ihrer Durchmesser bewiesen, vermutlich ebenso wie Euklid, dann ergab sich das Entsprechende für die Sektoren und nach Abzug der Dreiecke, von denen er nicht zu sprechen brauchte, auch für die Segmente und daraus endlich jener Hauptsatz. (Mit Rücksicht darauf, dafs der Satz τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ... nach meiner Auffassung von Eudemus weiter ausgeführt wird, habe ich auch die Klammer, in die er bei Diels eingeschlossen ist, weggelassen.)

An den ersten Hauptsatz schliefst sich nun ein zweiter, eingeleitet durch διὸ. *Jetzt* ist dieses διὸ an seinem Platze: Weil die ähnlichen Sektoren denselben Teil des Kreises ausmachen, d. h. gleiche Centriwinkel besitzen, deswegen nehmen auch die ähnlichen Segmente gleiche Winkel auf. Jetzt braucht Usener dieses διὸ, mit dem auch Diels nichts anzufangen wufste, nicht mehr in ⟨δεύτερον⟩ δ' ὅτι aufzulösen, im Gegenteil, dieses διὸ ist jetzt für uns von ganz unschätzbarem Werte, denn es enthält die eigentliche Bestätigung der Thatsache, dafs die Beziehung zwischen Centriwinkel und Peripheriewinkel dem Hippokrates sehr wohl bekannt war. In der That, wie könnte sich auch Hippokrates an diese feinen Untersuchungen über die Möndchen, die sich ganz auf den Eigenschaften der ähnlichen Segmente aufbauen, herangewagt haben, ohne über die wichtigsten dieser Eigenschaften orientiert zu sein! Die Argumente, die Bretschneider dagegen ins Feld führt, sind ganz haltlos.

Zwei Hauptsätze sind es also, die Hippokrates an die Spitze seiner Abhandlung stellt: Der eine bezieht sich auf den Flächeninhalt, der andere auf die Winkel der ähnlichen Segmente. Usener (Praef., p. XXVII) hat darin vollkommen Recht, dafs auch der zweite von Eudemus ausdrücklich genannt werden mufste und genannt worden ist. Das ist schliefslich auch durch das πρῶτον (D. 61, 5) deutlich genug gesagt.

So zeigt sich denn also, dafs durch die hier zu Grunde gelegte Hypothese die ganze Stelle, die bisher in tiefem Dunkel lag, vollständig erleuchtet wird: jeder Satz hat seinen guten Sinn, jedes Wort hat seinen

richtigen Platz, alles fügt sich aufs beste zusammen zu einem vernünftigen und erfreulichen Ganzen. Aber von dieser Stelle aus dringt jetzt zugleich Licht in das ganze eudemische Referat. Denn die Beziehung zwischen Centriwinkel und Peripheriewinkel und die damit zusammenhängenden Sätze spielen in den folgenden Beweisen eine sehr wichtige Rolle, und wenn man sich dabei auch die Überzeugung bildete, dafs sie dem HIPPOKRATES mufsten zu Gebote gestanden haben, so fehlte doch bisher eine direkte Bestätigung. Eine solche giebt aber jetzt unsere Interpretation. Ich will übrigens nicht unterlassen hinzuzufügen, dafs auf diese Interpretation, in Form einer Vermutung, bereits ALLMAN hingewiesen hat. Denn er sagt (A., p. 69, Anm. 41): „Here τμῆμα seems to be used for sector . . .“ Aber er giebt dieser Vermutung gar keine Folge und wiederholt p. 75 die unbrauchbare Definition der ähnlichen Segmente.

Ich verzichte darauf, mich ausführlicher über die vierte Möglichkeit auszusprechen, nämlich mit Beibehaltung des Wortes *Sektor* jene zwei Sätze (nicht aber auch den mit διὸ beginnenden Schlufssatz, der sicher eudemisch ist,) dem SIMPLICIUS zuzuweisen. Für diese Annahme scheint mir nur wenig zu sprechen, gegen sie aber recht viel, was sich indessen zum gröfsten Teile schon aus dem Gesagten ergiebt.

Dafs nun mit meiner Erklärung, die ich auch in der Übersetzung befolgt habe, alle Schwierigkeiten überwunden seien, behaupte ich keineswegs. Vielmehr wird jetzt durch sie die neue Schwierigkeit eingeführt, dafs derselbe Autor dasselbe Wort, nämlich τμῆμα, hintereinander in verschiedener Bedeutung gebraucht haben mufs. Aber diese Schwierigkeit ist doch nur noch eine äufserliche, die gewifs nicht in Betracht kommt gegenüber dem Fortschritte, dafs nun für die wichtigste Stelle des eudemischen Referates endlich eine Erklärung gewonnen ist, die nicht nur an sich vernünftig, d. h. frei von inneren Widersprüchen ist, sondern die auch ganz sicher dem wirklichen Sachverhalte entspricht. Dafs nun zunächst τμῆμα ebenso gut für Sektor wie für Segment gebraucht werden kann, daran ist bei der allgemeinen Bedeutung dieses Wortes nicht zu zweifeln. Läfst doch sogar SIMPLICIUS zu, dafs man selbst ein Möndchen mit τμῆμα bezeichnen könne (s. Anm. 37). EUKLID hat ja allerdings für Sektor das besondere Wort τομεύς (EUKLID III def. 10). Ob aber dieses Wort, das schon bei EUKLID keine Rolle spielt, bereits früher gebraucht wurde, ist ungewifs, sicher dagegen ist, dafs τμῆμα auch in anderer Bedeutung wie Segment von griechischen Mathematikern benutzt wurde. Vermutlich mufste eben allemal erst der Zusammenhang oder eine besonders hinzugefügte Erklärung die Bedeutung des Wortes feststellen, wie es sich ja schliefslich auch im vorliegenden Falle verhält, wo die Definition sofort auf Sektoren hinweist. Wir werden übrigens später einem Falle

begegnen, der hierfür als weiteres Beispiel dienen kann (s. Anm. 90). Es wäre ferner auch denkbar, dafs sich in unserem Berichte ursprünglich noch genauere unterscheidende Bezeichnungen befunden hätten, die aber verloren gegangen sind.

Nach alledem beantworte ich nun die in der Einleitung aufgeworfenen Fragen durch folgende Thesen:

1) *Die Definition, dafs ähnliche Segmente solche seien, die gleichvielte Teile ihrer Kreisflächen ausmachen, ist weder von Hippokrates noch von Simplicius noch sonst jemals gegeben worden, vielmehr bezieht sich diese Definition auf ähnliche Sektoren.*

2) *Es ist nicht wahr, dafs Hippokrates die Beziehung des Peripheriewinkels zu seinem Centriwinkel nicht gekannt habe. Er hat diese vielmehr sehr wohl gekannt und daher natürlich auch die Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen.*

3) *Hippokrates hat die ähnlichen Segmente nicht wie Euklid als solche definiert, die gleiche Winkel aufnehmen. Vielmehr war dies für ihn ein Satz, den er mit Hülfe der ähnlichen Sektoren bewies. Vermutlich hat er daher ähnliche Segmente als solche definiert, die zu ähnlichen Sektoren gehören.*

68. D. 61, 20. Das in diesen Worten enthaltene Programm fehlt in der *Aldina*, in der dieser und der folgende Satz zusammengezogen sind. Allman ist hier wieder Bretschneider gefolgt.

69. D. 61, 27. Die Figur fehlt in den Handschriften, sodafs wohl angenommen werden darf, dafs auch Eudemus eine solche nicht gezeichnet hatte. Das hier konstruierte Möndchen ist natürlich identisch mit dem über der Quadratseite, von dem Alexander (D. 56, 1—21) sprach.

70. D. 61, 29. Im Griechischen wird hier immer der bestimmte Artikel gebraucht. Wörtlich wäre also zu übersetzen: „Über der gegebenen Geraden . . ., der dem gegebenen . . .“ Doch verträgt sich dies nicht mit unserem Sprachgebrauche.

71. D. 61, 33. Euklid III def. 11.

72. D. 62, 3. Mit Absicht wörtlich übersetzt. Wir sagen natürlich jetzt: „weil das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten ist“.

73. D. 62, 23. Die Figur fehlt in den Handschriften. Falls Eudemus überhaupt eine gezeichnet hatte, so hatte er doch jedenfalls keine Buchstaben dazu gesetzt, ferner die Hülfslinien BE, AE, ΓE, ΔE, AZ, ΓZ nicht gezeichnet und von den beiden Diagonalen $B\Gamma$, $A\Delta$ nur eine gezogen. Siehe hierzu Anm. 77, sowie Tannery (Praef., p. XXVIII); in Bezug auf die Konstruktion des Trapezes s. Tannery (l. c.) und Usener (Praef., p. XXIII).

74. D. 62, 28. Unter den Diagonalen sind hier die Verbindungslinien BE, $E\Delta$ verstanden.

75. D. 62, 30. Ich lese diese Stelle mit HEIBERG (Phil., p. 340) καὶ ⟨αἱ⟩ γωνίαι ⟨ἴσαι⟩, καὶ τὰ ἑξῆς. Von einer den Inhalt berührenden Lücke des Textes, die BRETSCHNEIDER (B., p. 111, Anm. 1) und ALLMAN (A., p. 71, Anm. 43) glaubten annehmen zu müssen, kann also kaum gesprochen werden. Die Andeutung ist ja für den angekündigten Beweis völlig ausreichend, denn mit καὶ τὰ ἑξῆς ist die Gleichheit von BE und $E\Gamma$ gemeint, an die sich dann die Gleichheit der vier in E zusammentreffenden Linien anschliefst.

Obwohl nach dem Vorgange von BRETSCHNEIDER dieser Beweis, dafs um das Trapez ein Kreis beschrieben werden kann, von CANTOR (*Vorl.* I², p. 197—198) noch immer dem HIPPOKRATES zugeschrieben wird, so kann doch kaum noch ein Zweifel darüber bestehen, dafs er von SIMPLICIUS herrührt. Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, dafs die Zuthaten des SIMPLICIUS im allgemeinen gar nicht so schwer zu erkennen sind. Wenn SIMPLICIUS etwas hinzufügt, so sagt er es entweder ganz direkt selbst, oder aber er deutet es in einer meist leicht zu verstehenden Weise an, z. B. dadurch, dafs er in der ersten Person spricht. Die Änderung der Sprechweise ist oft ein viel sichereres Erkennungszeichen als die Kriterien, von denen bald die Rede sein wird. Im vorliegenden Falle wird der Leser durch den Wechsel der Person, der sich in dem Übergange von ὑποτίθεται zu δείξεις ausspricht und auf den auch ALLMAN (l. c.) hinweist, darauf aufmerksam gemacht, dafs der Kommentator eine Erklärung einschiebt. Aber auch viele andere Umstände lassen dies deutlich erkennen, z. B. — von dem EUKLIDcitate natürlich gar nicht zu reden — der Umstand, dafs bei dem Beweise Buchstaben benutzt werden, während EUDEMUS keine gebraucht hat (s. Anm. 77). Vor allem aber würde sich der Beweis einer so einfachen Sache nicht mit der von SIMPLICIUS selbst hervorgehobenen bündigen Darstellungsart des EUDEMUS vertragen. Überläfst doch EUDEMUS viel wichtigere Dinge ruhig dem Leser, im vorliegenden Falle sogar die Hauptsache, nämlich die eigentliche Quadratur des Möndchens.

Ist nun aber der Beweis dem SIMPLICIUS zurückzugeben — und dies ist die übereinstimmende Meinung aller, die den Bericht kritisch untersucht haben —, so fallen auch die von BRETSCHNEIDER und CANTOR daran angeknüpften, auf HIPPOKRATES bezüglichen Bemerkungen dahin. Gerade dieser Beweis war es nämlich, auf den die Behauptung gegründet wurde, HIPPOKRATES habe die Beziehung zwischen Peripheriewinkel und Centriwinkel noch nicht gekannt.

HEIBERG (Phil., p. 340) giebt zwar zu, dafs der Beweis von SIMPLI-

cius stamme, glaubt aber, dafs die Worte D. 62, 24—26 von Eudemus herrühren, der hier wie öfters nur den Ausgangspunkt des Beweises des Hippokrates kurz angedeutet habe. Seine Worte seien: „καὶ ὅτι μὲν περιληφθήσεται κύκλῳ τὸ τραπέζιον δείξεις διχοτομήσας τὰς τοῦ τραπεζίου γωνίας". Ich kann dieser Ansicht aber nicht beistimmen. Denn abgesehen von dem auffallenden δείξεις steht auch selbst nur der Andeutung des Beweises das entgegen, was vorhin in Bezug auf die bündige Art des Eudemus gesagt worden ist. Zudem sind die Gründe Heibergs nicht zwingend. Denn die Worte καὶ ὅτι μὲν ... sind als Gegensatz zu ὅτι δὲ ... (z. 30) durchaus nicht notwendig, vielmehr ist ὅτι δὲ ..., auch ohne vorausgehendes ὅτι μὲν ..., eine sehr beliebte Art, einen Satz zu eröffnen (s. z. B. D. 66, 10 und D. 66, 14). Auch der Hinweis auf D. 65, 9 ist nicht überzeugend. Denn als sicher eudemisch kann dort zunächst nur der erste Satz bezeichnet werden, der noch keinerlei Andeutung zu einem Beweise enthält. Und wenn auch der darauf folgende Beweis wirklich von Eudemus herrühren sollte (was ich nicht glauben kann), so könnte man daraus gar nichts auf den vorliegenden Fall schliefsen. Übergeht doch auch Eudemus das eine Mal die Quadratur des Möndchens, ohne auch nur eine Andeutung für nötig zu finden, während er sie das andere Mal demonstriert. Endlich aber darf man doch füglich dem Simplicius zutrauen, dafs er im stande gewesen sei, das Fehlen des Beweises empfunden zu haben, wenn doch der entsprechende Beweis bei dem folgenden Möndchen — sei es von Eudemus oder ihm — ausdrücklich geführt wird.

76. D. 62, 32. Unter Durchmesser ist hier verstanden, was wir Diagonale nennen würden, nämlich die Linie $B\Gamma$.

77. D. 63, 1—11. Diese ganze Herleitung: „Da nämlich $B\Delta$ ... und so auch wie $\Gamma\Delta$" darf mit Sicherheit dem Simplicius zugewiesen werden, obwohl sie von Diels-Usener (natürlich abgesehen von den beiden Euklidcitaten) dem Eudemus zugeschrieben wird. Auch Allman (A., p. 71), Tannery (Praef., p. XXVIII; Mém., p. 221 und p. 228—229) und Heiberg (Phil., p. 340) betrachten die Ausführung als nicht eudemisch. Simplicius nimmt sich hier unnötigerweise die Mühe, noch ausdrücklich nachzuweisen, dafs der Winkel $B\Delta\Gamma$ ein stumpfer sei, was eigentlich schon der Augenschein lehrt. Wenn aber auch dieser Beweis entbehrlich ist, so hat ihn doch Simplicius, entgegen der Meinung von Tannery (l. c.) und Usener (D. 63, 6n. und 9n.), ganz korrekt und lückenlos geführt. Nur darf nach Εὐκλείδου (D. 63, 8) kein Punkt gesetzt werden, vielleicht ist auch zwischen αἱ und ὑπὸ (D. 63, 6) ein μὲν ausgefallen, wie ich bei der Übersetzung angenommen habe. Auch das zweite Euklidcitat ist ganz in der Ordnung und eine Lücke nach ἐντὸς (D. 63, 9) liegt

nicht vor. Der Winkel $AB\Gamma$, von dem die USENERsche Note spricht, kommt überhaupt gar nicht in Betracht.

Nun folgt allerdings noch im Texte auf das zweite EUKIDcitat der merkwürdige Satz: „ἡμίσεια ἄρα ἡ ὑπὸ ΓAZ γωνία ἐστὶ τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$“. Diesen Satz, von dem TANNERY (Praef., p. XXVIII) sagt: „de ἡμίσεια ... $BA\Gamma$ despero“, habe ich in der Übersetzung unterdrückt, denn er ist einfach ein Unsinn, der weder mit dem Vorhergehenden noch mit dem Folgenden in Zusammenhang steht. Wäre nämlich ΓAZ die Hälfte von $BA\Gamma$, so wäre das Dreieck $A\Gamma Z$ gleichseitig, woraus dann weiter folgen würde, dafs $B\Delta = 2A\Gamma$ wäre, was nicht der Fall ist. Wie schon BRETSCHNEIDER (B., p. 112, Anm. 3) ganz richtig vermutet, handelt es sich hier um ein blofses Einschiebsel, das irgend ein Unkundiger, wahrscheinlich in der Meinung, der Aufsenwinkel $BA\Gamma$ sei gleich $A\Gamma Z + \Gamma AZ$, also gleich $2\Gamma AZ$ (ein Fehler, der übrigens auch noch heute sehr beliebt ist), an den Rand geschrieben hat und das dadurch in den Text geraten ist. Dafs ein so offenkundiger und zudem noch so völlig zweckloser Unsinn, der plötzlich mitten in einer sonst ganz korrekten Entwickelung auftaucht, nicht auf Rechnung des SIMPLICIUS gesetzt werden darf, ist wohl selbstverständlich. Amüsant ist übrigens, wie sich BRETSCHNEIDER mit diesem Einschiebsel abfindet: erst korrigiert er den Satz, dann übersetzt er den korrigierten Satz falsch und schliefslich erklärt er ihn als überflüssiges Einschiebsel.

Dafs nun der vorliegende Beweis, es sei $BA\Gamma$ ein stumpfer Winkel, wirklich von SIMPLICIUS herrühre, geht nach TANNERY (l. c.) erstens daraus hervor, dafs für EUDEMUS keine Veraulassung vorlag, für eine so einfache Sache einen ausdrücklichen Beweis in seine *Geschichte der Geometrie* aufzunehmen, und zweitens daraus, dafs EUDEMUS zu dieser zweiten Quadratur entweder überhaupt keine Figur gezeichnet oder doch wenigstens keine Buchstaben dabei benutzt hatte. Dies erkennt man deutlich, wenn man die Sätze, die unzweifelhaft von EUDEMUS herrühren, nämlich D. 62, 13—23; 62, 30—63, 1; 63, 11—14; 63, 15—18, genauer betrachtet. Man sieht dann, wie sich EUDEMUS mühsamer Umschreibungen bedient, die mit Sicherheit darauf schliefsen lassen, dafs die auftretenden Linien nicht durch Buchstaben bezeichnet waren. Diese Umschreibungen scheinen mir für das Fehlen der Buchstaben noch beweiskräftiger zu sein, als die Art der Bezeichnung, die SIMPLICIUS benutzt und die nach TANNERYS Meinung EUDEMUS nicht gewählt haben würde (s. Anm. 83).

78. D. 63, 11—14. Ich übersetze absichtlich wörtlich, auch mit Rücksicht auf die Ausführungen am Schlusse von Anm. 77. Mit Buchstaben macht sich die Sache natürlich viel kürzer: Da $B\Gamma^2 > 2\Gamma\Delta^2$ ist, weil der Winkel $BA\Gamma$ ein stumpfer ist, so folgt, dafs $B\Delta^2 < B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$.

Denn es ist $B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 > 3\Gamma\Delta^2$, während nach Voraussetzung $B\Delta^2 = 3\Gamma\Delta^2$ ist. Diese letztere Begründung (D. 63, 14—15) ist wieder dem Simplicius zuzuweisen und nicht, wie bei Diels, dem Eudemus.

79. D. 63, 20. Vor οἶμαι sollte ein Komma stehen. Dann würde man auch nicht in Versuchung kommen, mit Bretschneider (B., p. 113) zu übersetzen „wie ich sicher glaube“. Diese Übersetzung ist allerdings unrichtig, denn σαφής hat nicht die Bedeutung „sicher“, und im Texte müfste dann auch nicht σαφῆ sondern σαφῶς stehen. Wäre die Übersetzung Bretschneiders richtig, so würde in der Stelle geradezu ein direkter Beweis für die Richtigkeit der Ansicht Tannerys liegen, dafs Simplicius das Werk des Eudemus selbst nicht vor sich gehabt, sondern vielmehr aus zweiter Hand citiert habe. Die Übersetzung Bretschneiders ist aber, wie gesagt, unzulässig.

80. D. 64, 6. Der Beweis für die Quadratur dieses Möndchens ist ja gewifs nicht schwer, sonst hätte ihn Eudemus auch nicht übergangen. Immerhin mufs auch hier wieder hervorgehoben werden, dafs die beiden Wendungen, die Simplicius dem Beweise giebt, doch gewifs ganz korrekt gestaltet sind und dafs von einer Ungeschicklichkeit auch hier nicht wohl gesprochen werden kann.

81. D. 64, 9. Die Figur fehlt in den Handschriften. In Bezug auf die Konstruktion s. Allman (A., p. 72, Anm. 46), Usener (Praef., p. XXIV —XXV) und Tannery (Praef., p. XXIX und Mém., p. 229—230).

82. D. 64, 13. Hier beginnt nun die viel besprochene altertümliche Ausdrucksweise: ἡ ἐφ' ᾗ *AB*, d. h. die (Gerade), bei der *A*, *B* (stehen), τὸ ἐφ' ᾧ *K*, d. h. der (Punkt), bei dem *K* (steht). Euklid und die folgenden griechischen Mathematiker sagen dafür bekanntlich kürzer ἡ *AB* und τὸ *K*. Diesem Unterschiede in der Bezeichnung ist auch in der Übersetzung Rechnung getragen worden, insofern die umständliche, ältere Schreibweise stets durch „die Gerade *AB*“ und „der Punkt *K*“, die neuere dagegen kurz durch „*AB*“ und „*K*“ wiedergegeben ist.

Der Umstand nun, dafs sich Eudemus bei der vorliegenden und bei der folgenden Quadratur wiederholt der altertümlichen Ausdrucksweise bedient, ist von Bretschneider (B., p. 114, Anm. 2) dahin gedeutet worden, dafs Eudemus hier allemal die eigenen Worte des Hippokrates anführe. Aber diese ältere Ausdrucksweise findet sich neben der neueren auch noch bei Aristoteles, sodafs die Interpretation Bretschneiders nicht ausreichend begründet ist. Inwieweit nun das Vorkommen der älteren Schreibweise als Kriterium benutzt werden kann, um zwischen Hippokrates und Eudemus oder aber zwischen Eudemus und Simplicius zu unterscheiden, darüber wird bald noch ausführlicher zu sprechen sein. Hier sei nur noch bemerkt, dafs dieses Kriterium es war, auf Grund

dessen ALLMAN die erste Ausscheidung zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS vorgenommen hatte (s. Anm. 10, sowie A., p. 72, Anm. 45).

83. D. 64, 18. Wir treffen gleich hier an einer unzweifelhaft eudemischen Stelle auf die neuere Bezeichnungsweise *ἐπὶ τὸ B*, die sich in den folgenden sechs Zeilen nicht weniger als *neunmal* wiederholt. TANNERY (Praef., p. XXIX) würde gerne *ἐπὶ τὸ ἐφ' ᾧ B* korrigieren, sieht sich aber mit Rücksicht auf das doch etwas zu häufige Auftreten dieser neueren Schreibart genötigt, darauf zu verzichten. Immerhin meint er, dafs EUDEMUS nur in der Bezeichnung von Punkten, nicht aber auch in der von Linien abwechsele, worauf DIELS (l. c.) erwidert, dafs sich EUDEMUS nach dem Vorgange des ARISTOTELES gewifs auch bei Linien der kürzeren Bezeichnung bedient habe, und dafs überhaupt dieses Hülfsmittel nicht ausreiche, um zwischen EUDEMUS und SIMPLICIUS zu unterscheiden. In der That ist zunächst schlechterdings gar nicht einzusehen, warum sich EUDEMUS zwar bei Punkten, nicht aber auch bei Linien die Freiheit der Bezeichnung gewahrt haben sollte. Macht doch die sprachliche Konstruktion absolut keinen Unterschied zwischen Punkten und Linien. In Wahrheit findet man denn auch eine ganze Reihe von Stellen, an denen Linien und Liniengebilde nach der neuen Art bezeichnet sind und die von DIELS, wie mir scheint mit Recht, dem EUDEMUS zugewiesen werden: 64, 23; 65, 7; 65, 8; 65, 25; 65, 26; 65, 29; 67, 36; 68, 6 u. s. w. TANNERY schreibt nun allerdings diese Stellen, mit Ausnahme von 67, 36, einfach dem SIMPLICIUS zu, aber offenbar nur jenem Kriterium zuliebe, während ein anderer als dieser formelle Grund nicht vorliegt, nun auch gleich alle diese Stellen zu streichen. Im übrigen würde auch schon die eine Stelle 67, 36, die von TANNERY dem EUDEMUS gelassen wird, zur Bestätigung der Ansicht von DIELS ausreichen.

Hat sich nun aber nachweisbar EUDEMUS auch bereits der neueren Bezeichnung bedient, so ist es doch gewifs nur natürlich, wenn man annimmt, er habe für seinen eigenen Gebrauch die neuere, einfachere Schreibweise der älteren, umständlicheren vorgezogen. Diese Annahme wird noch wesentlich durch die Thatsache gestützt, dafs von HIPPOKRATES den EUDEMUS etwa hundert Jahre, von EUKLID aber nur etwa dreifsig Jahre trennen, und dafs bei EUKLID die ältere Bezeichnung bereits verschwunden ist. EUDEMUS wird daher diese Bezeichnung nur da benutzt haben, wo er durch seine Vorlage, also hier durch die Worte des HIPPOKRATES, dazu aufgefordert wurde. Denn dafs HIPPOKRATES zu der vorliegenden komplizierten Konstruktion eine Figur gezeichnet hatte, wäre auch ohne die ausdrückliche Bestätigung durch EUDEMUS selbstverständlich, und ebenso selbstverständlich dürfte die Benutzung von Buchstaben sein. Auf Grund dieser Überlegungen gewinnt daher die Hypothese, die BRET-

SCHNEIDER allerdings etwas voreilig und ohne ausreichende Begründung aufgestellt hatte, nachträglich doch etwelche Berechtigung. Dafs sich die eudemische Darstellung der vorliegenden und der folgenden Quadratur verhältnismäfsig enge an den Wortlaut des Originaltextes anschliefst, wird auch noch durch andere Überlegungen wahrscheinlich gemacht. Verglichen nämlich mit der ersten und zweiten Quadratur bieten die dritte und vierte nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar. Während daher EUDEMUS über jene frei referieren konnte, wird er sich bei diesen mit gutem Grunde nicht allzu weit von seiner Vorlage entfernt haben. Die beiden letzten Referate nehmen denn auch in der That mehr als doppelt so viel Raum ein wie die beiden ersten und sie sind so ausführlich gehalten, dafs der Unterschied zwischen der Darstellung des EUDEMUS und der des HIPPOKRATES nicht sehr grofs gewesen sein wird.

84. D. 64, 23. Die Handschriften haben ἡ μὲν ἐφ' ᾗ *EZ* ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ *E* πεσεῖται. Da hier ein offenkundiger Schreibfehler vorliegt, so korrigierte BRETSCHNEIDER (B., p. 114, Anm. 1) ἐπὶ τὸ *B*, eine Korrektur, die auch von DIELS adoptiert wurde. Die Korrektur ist aber falsch. Denn dafs die Verlängerung von *EZ* nach *B* gelange, ist ja vorausgesetzt worden und braucht nicht noch einmal durch φανερὸν δὴ (und zum Überflusse sogar noch ein weiteres Mal durch die folgende Parenthese) bestätigt zu werden. Die Konstruktion φανερὸν δὴ ὅτι ἡ μὲν ... ἡ δὲ ... läfst vielmehr deutlich erkennen, dafs jetzt von den beiden zuletzt genannten Verbindungslinien von *B* nach *Z* und *H* etwas ausgesagt werden soll. Die richtige Korrektur lautet daher vielmehr umgekehrt ἡ μὲν ἐφ' ᾗ *BZ* ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ *E* πεσεῖται.

85. D. 64, 23—24. TANNERY (Praef., p. XXIX) weist diesen in der Parenthese befindlichen Satz dem SIMPLICIUS zu, was mir aber nach der eben gegebenen Korrektur nicht mehr erforderlich erscheint.

86. D. 64, 27. Hier endlich begeht jetzt SIMPLICIUS eine wirkliche Ungeschicklichkeit — nach der in Anm. 31 hervorgehobenen und leicht entschuldbaren allerdings die einzige, die ihm zum Vorwurfe gemacht werden kann. Über diese kann nun jeder, dem noch nie im Leben ein Beweis mifsglückt ist, so hart urteilen, als er will. SIMPLICIUS beweist nämlich die Gleichheit von *BH* und *EK* mit Benutzung des dem Trapeze umgeschriebenen Kreises, den man zu diesem Beweise natürlich gar nicht braucht. Nachträglich empfindet er dann das Bedürfnis, doch noch ausdrücklich zu beweisen, dafs es wirklich einen solchen Kreis giebt, und bei diesem Existenzbeweise benutzt er dann wieder umgekehrt die Gleichheit von *BH* und *EK*.

87. D. 64, 32—65, 1. Dem Wortlaute von EUKLID III 3 zufolge ist mit TANNERY (Praef., p. XXIX) die ursprüngliche Lesart der Hand-

schriften ἡ οὖν ΓΔ διὰ τοῦ κέντρου τὴν EH μὴ διὰ τοῦ κέντρου beizubehalten.

88. D. 65, 9. Diese Worte schliefsen sich offenbar direkt an die Konstruktion des Trapezes (D. 64, 7—24) an. Darin sind auch DIELS-USENER (D. 65, 7 n.) und TANNERY (Mém., p. 219) einig. Die beiden Zeilen 65, 7—8, die vorausgehen, müssen daher anderswo untergebracht werden, wovon noch die Rede sein wird (s. Anm. 92). Dafs nun von dem hier gegebenen Beweise der erste Satz (der einfach die Thatsache ausspricht, dafs dem Trapeze ein Kreis umgeschrieben werden könne) dem EUDEMUS angehört, wird von niemandem bestritten; er ist auch unentbehrlich. Ausgenommen ist natürlich φημι, womit SIMPLICIUS an seine erste, voreilige Erwähnung des umgeschriebenen Kreises anknüpft. Schon dieses φημι läfst eigentlich erwarten, dafs das, was jetzt gesagt werden soll, von SIMPLICIUS gesagt werden wird. In der That mufs ich mit TANNERY gegen DIELS-USENER und gegen HEIBERG (Phil., p. 341) annehmen, dafs der ganze Beweis von 65, 10 τὸ μὲν γὰρ . . . an bis zu 65, 23 τὸ τμῆμα von SIMPLICIUS herrühre. Die Gründe sind ähnliche wie die bei der zweiten Quadratur angeführten: Der Beweis einer so einfachen Thatsache verträgt sich nicht mit der Bündigkeit des EUDEMUS. Hat dieser doch auch mit Recht darauf verzichtet, einen Beweis für $EK = KB = BH$ zu geben.

Da aber gerade die vorliegende Stelle so sehr verschieden interpretiert worden ist, so mufs sie doch noch eingehender besprochen werden. Aufser dem ersten unbestrittenen Satze werden von DIELS-USENER noch als eudemisch angesprochen: der zweite (τὸ μὲν . . . κύκλος), der vierte (ἐὰν οὖν δείξω . . . τραπέζιον) und der Schlufssatz (65, 23 γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα). Dafs der zweite und vierte von derselben Hand stammen, ist klar, der vierte aber kann nach meiner Überzeugung nur von SIMPLICIUS herrühren. Wer in einer so aktnellen Sprache ankündigt: „ἐὰν οὖν δείξω“, der verpflichtet sich auch, den Beweis wirklich zu geben. Bei einer Ankündigung dieser Art kann man nicht stehen bleiben. Ganz entscheidend aber dürfte das folgende Argument sein. Wenn φημι (65, 9) auf SIMPLICIUS zu beziehen ist, was keinem Zweifel unterliegt, so kann das nur drei Zeilen später folgende δείξω ganz unmöglich plötzlich auf eine andere Person bezogen werden, ohne dafs auf einen Wechsel in der Person ausdrücklich hingewiesen worden wäre. SIMPLICIUS konnte überhaupt nicht zugeben, dafs in seinem Berichte irgend jemand in der ersten Person redete, dem er nicht durch eine Wendung wie „sagte er“ oder dergl. ausdrücklich das Wort erteilt hätte. Denn nach den vielen Einschiebungen, in denen er selbst in der ersten Person redete, war die allgemeine Einführung λέγει δὲ ὧδε (D. 60, 30) des EUDEMUS als Sprecher nicht mehr

ausreichend. Daſs also der Beweis von ihm herrühre, das sagt Simplicius im Grunde genommen auch hier wieder ganz deutlich selbst (s. Anm. 75). Mit diesem Beweise sind nun aber auch die Schluſsworte *γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα* so eng verbunden, daſs man sie ohne Gewalt nicht davon trennen kann. Man sieht und hört förmlich, wie Simplicius erleichtert aufatmet: Die verschiedenen Beweise haben ihm doch einige Mühe verursacht, jetzt ist er endlich am Ziele und er freut sich, sagen zu können *γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα*.

Nun ist aber noch eine Schwierigkeit zu überwinden. Denn mitten in dem Beweise des Simplicius befindet sich der Satz 65, 15—16 *ὅπερ τμῆμα καὶ τὸ τρίγωνον περιέξει τὸ ἐφ' οὗ EZH*, der zwar von Diels-Usener dem Simplicius, von Tannery (Praef., p. XXX) und Heiberg aber, wegen der altertümlichen Schreibweise, dem Eudemus zugewiesen wird. Diese Annahme ist indessen ohne die weitgehendsten Textänderungen nicht aufrecht zu erhalten. So glaubt Tannery (Mém., p. 219 und 222) zunächst *τμῆμα* streichen, sodann den ganzen Satz aus seinem Zusammenhange herausnehmen und ihn mit *γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα* vereinigen zu sollen. Und dies alles, um schlieſslich einen Satz zu erhalten, der niemanden befriedigen kann und der ohne Gewaltthätigkeit auch gar nicht so übersetzt werden darf, wie es Tannery thut. Zu alledem ist dann Tannery auch noch genötigt, eine Lücke im Texte anzunehmen. Heiberg, der die Unhaltbarkeit der Tannery'schen Erklärung erkennt, setzt an ihre Stelle eine andere, etwas weniger gekünstelte, die sich aber auch nicht halten läſst. Denn er nimmt an, daſs vor dem Satze *ὅπερ τμῆμα ... EZH* ein Satz ausgefallen sei, der die Vorschrift enthalten habe, über *EH* ein Segment zu beschreiben, das den Segmenten über den drei gleichen Trapezseiten ähnlich sei. An diesen Satz reihe sich dann in natürlicher Weise *ὅπερ τμῆμα ... EZH*. Aber jener angeblich ausgefallene Satz würde eine ganz falsche Vorschrift enthalten: denn nicht das um *EZH* beschriebene Segment, sondern jedes der beiden Teilsegmente *EZ* und *ZH* ist ähnlich jenen dreien *EK*, *KB*, *BH*. Und wenn man ein ähnliches über *EH* beschreiben wollte, so würde es ganz sicher nicht durch Z gehen.

Zu all diesen Verlegenheiten und Widersprüchen führt aber nur das starre Festhalten an dem besprochenen Kriterium, demzufolge die alte Ausdrucksweise stets auf Eudemus, die neue aber stets auf Simplicius zurückzuführen sei. Nun möchte ich fragen: Wäre es wirklich etwas so Unnatürliches, wenn Simplicius, nachdem er sich so und so oftmal als Referent der alten Schreibweise hatte bedienen müssen, nun auch einmal da, wo er selbst spricht, diese alte Bezeichnung, mit oder ohne Absicht, benutzt haben würde? Man mache doch die Probe an sich selbst. Wer

über eine Arbeit eingehend referiert, tritt zu ihr schliefslich in ein solches Verhältnis, dafs er sich dabei unwillkürlich der darin gebrauchten Ausdrücke gelegentlich auch selbst bedient. Und „τὸ τρίγωνον τὸ ἐφ' οὗ *EZH*" war für SIMPLICIUS doch schliefslich auch griechisch und nicht viel fremdartiger als für uns etwa „das mit *EZH* bezeichnete Dreieck". Ein Grund also, das Auftreten des τὸ ἐφ' οὗ mit „ecce EUDEMUS!" zu begrüfsen, liegt ganz gewifs nicht vor, und wenn DIELS den in Rede stehenden Satz dem SIMPLICIUS zuweist, so kann ich dem nur beistimmen.

Aber ὅπερ τμῆμα kann doch nicht auf das vorhergehende τμῆμα bezogen werden, meint HEIBERG. Und doch bezieht es sich in der That darauf. Nur darf περιέξει nicht in dem einseitig mathematischen Sinne von „umgeschrieben sein" gedeutet werden. SIMPLICIUS hat hier offenbar die später (D. 65, 24—25) folgenden Worte οὗ ἐκτὸς περιφέρεια ἡ *EKBH* im Auge und er will einfach der Vollständigkeit halber sagen, dafs dasselbe Segment, das dem Trapeze umgeschrieben ist, zugleich auch das Dreieck *EZH* *einschliefst*, dafs also dieses Segment wirklich den äufseren Bogen liefert. Es handelt sich also nur um eine ganz harmlose Bemerkung, die durch die alte Schreibweise zu einer unnötigen Berühmtheit gelangt ist.

„Cet endroit est peut-être celui qui se trouvait le plus défiguré par les interpolations de SIMPLICIUS, et dont par suite la restitution exacte est le plus difficile." Mit diesen Worten charakterisiert TANNERY (Mém., p. 230) die hier ausführlich besprochene Stelle. Ich glaube diese Stelle in einer Weise interpretiert zu haben, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läfst, und die jedenfalls das für sich hat, dafs sie den Text nicht als einen ganz korrupten, sondern als einen in bester Ordnung befindlichen erscheinen läfst.

89. D. 65, 9. Durch diese Wendung soll der alten Bezeichnungsart Rechnung getragen werden, während „das Trapez *EKBH*" der neuen entsprechen würde (s. Anm. 82). Es sei noch darauf hingewiesen, dafs hier und auch noch an mehreren anderen Stellen (65, 16; 67, 15; 67, 21; 67, 23 u. a.) ἐπί mit dem Genetiv konstruiert wird.

90. D. 65, 13. Die griechischen Mathematiker hatten kein eigenes Wort für „Radius", sie sagten dafür ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (SIMPLICIUS sagt 65, 12; 65, 13; 65, 22 ἀπὸ statt ἐκ). Aber nicht umgekehrt bedeutet ἡ ἐκ τοῦ κέντρου jedesmal soviel wie Radius. Das kann erst der Zusammenhang entscheiden (s. den Schlufs der Anm. 67). Im vorliegenden Falle soll nun gerade bewiesen werden, dafs die aus dem Mittelpunkte nach *B* gezogene Gerade ein Radius sei.

91. D. 65, 18. Ich schliefse mich der Vermutung von DIELS (65, 18 n.) an, dafs die Lesart der *Aldina* hier die richtige sei.

92. D. 65, 7—8. Hier finden nun die beiden Zeilen ihren Platz, die eine ungeschickte Umstellnng erfahren hatten (s. Anm. 88). Dafs diese Umstellung durch Simplicius verschuldet worden sei, halte ich nicht für wahrscheinlich, wenigstens wüfste ich dafür keine rechte Erklärung zu geben. Vielmehr glaube ich, die verkehrte Anordnung auf Rechnung eines Abschreibers setzen zu sollen, da die Stelle in der vorliegenden Form (bei Diels wie auch in der *Aldina*) korrupt ist. Denn nicht das ganze Segment EZH, sondern die beiden Teilsegmente EZ und ZH sind den drei Segmenten EK, KB, BH ähnlich. Dies hat auch Bretschneider (B., p. 116, Anm. 2) ganz richtig erkannt, sodafs ich die Worte von Diels (65, 7 n.) nur so verstehen kann, dafs Bretschneider vielleicht nicht den richtigen sprachlichen Ausdruck gefunden hat; denn in der Sache hat er unzweifelhaft recht. Ich lese daher, wie Bretschneider, etwa: ... τμῆμα κύκλου, δῆλον ὅτι τὰ τμήματα EZ ZH ὅμοια ἑκάστῳ ... Tannery hatte also eigentlich gar keine Ursache, eine Lücke im Texte anzunehmen, denn der vorliegende Satz ist nach der einfachen Korrektur genau der, mit dem er die angebliche Lücke ausfüllt.

Dafs nun die genannten Segmente, z. B. EK und EZ, ähnlich sind, liegt auf der Hand, da sie den Peripheriewinkel EHK gemeinschaftlich haben. Der Umstand aber, dafs Eudemus mit keiner Silbe die Ähnlichkeit begründet, darf doch wohl so gedeutet werden, dafs er sie für einleuchtend hielt und dafs er in der von Hippokrates allenfalls gegebenen Begründung nichts gefunden hatte, was ihm mitteilenswert erschienen wäre. Kurzum das Stillschweigen des Eudemus spricht deutlich für die Richtigkeit der Interpretation, die in Anm. 67 seinen einleitenden Worten gegeben wurde. Zugleich fällt auch, soweit es sich um die vorliegende Stelle handelt, der Vorwurf dahin, Simplicius habe das eigentlich Wichtige unerklärt gelassen und sich nur mit Unwichtigem befafst.

93. D. 65, 24—66, 2. Diese Sätze weist Diels, wie mir scheint mit Recht, vollständig dem Eudemus zu, während Tannery (Praef., p. XXX), nur wegen der neuen Schreibweise, verschiedene Kürzungen vornimmt. Dadurch aber beeinträchtigt er ganz unnötiger Weise die Deutlichkeit. In dem ersten Satze z. B. hat Eudemus sicherlich nicht unterlassen und auch nicht unterlassen dürfen, die drei Dreiecke ausdrücklich zu nennen, aus denen sich die dem Möndchen gleiche geradlinige Figur zusammensetzt.

Wenn übrigens Bretschneider (B., p. 117) diese geradlinige Figur ein Fünfeck nennt, so kommt dem ebenso wenig Berechtigung zu wie den Betrachtungen, die Cantor (I², p. 195) an dieses angeblich erste „Vieleck mit einspringendem Winkel“ anknüpft.

Endlich ist zu bemerken, dafs in dem letzten der hier bezeichneten

Sätze δυνάμει ausgefallen ist, was sich in der Folge noch einige Male wiederholt. In der Übersetzung wurde „in der Potenz“ allemal in Klammern beigefügt.

94. D. 66, 10—12. In diesem Satze streicht Tannery (Praef., p. XXX) als nicht endemisch EKH, was aber schon Heiberg (Phil., p. 342) als unzulässig bezeichnet hat.

95. D. 66, 14—22. Auch diese Stelle, die zweite der beiden schon in der Einleitung hervorgehobenen, ist gar nicht so korrupt, wie sie gewöhnlich bezeichnet wird. Vielmehr läfst sie sich durch ganz geringfügige Änderungen auf die ursprüngliche Form zurückführen. Dazu ist aber vor allem nötig, dafs die von Usener (D. 66, 18 n.) vorgenommene Korrektur, durch die die ganz richtige Lesart BE der Handschriften in die unrichtige BK verwandelt wurde, wieder zurückgenommen werde. Lassen wir in der That nach dieser notwendigen Restitution einfach die Formeln sprechen, so wie sie der Text liefert. Dieser aber liefert in dem angegebenen Intervalle genau die folgenden sieben Relationen:

1) Nach Voraussetzung ist

$$EZ^2 = \tfrac{3}{2} EK^2$$

(also $EZ > EK$).

2) Ferner ist

$$KB > BZ,$$

weil der Winkel bei Z stumpf ist.

3) Es ist aber

$$BK = KE$$

(also auch $KE > BZ$ und erst recht $EZ > BZ$).

4) Hieraus aber *folgt:*

$$BE > 2BZ.$$

5) Es mufs daher sein:

$$KE^2 > 2KZ^2,$$

denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt:

6) $$\frac{EB}{BK} = \frac{EK}{KZ},$$

oder

$$EK \cdot BK = EB \cdot KZ;$$

folglich wegen 3) und 4)

7) $$EK^2 > 2KZ^2,$$

w. z. b. w.

Man sieht also, dafs die Formelsprache, wie sie sich aus den Handschriften ergiebt, absolut korrekt ist: es ist nichts hinzuzufügen, nichts wegzulassen, nichts zu ändern. Ist dies aber einmal festgestellt, so ist für die Textkritik jetzt ein sicherer Boden gewonnen. Und nun ergiebt

sich, dafs die *Worte*, die im Texte die Relation 4) begleiten, nämlich κἂν ἡ ἐφ' ᾗ *BE* μείζων ᾖ τῆς ἐφ'. ᾗ *BZ* ἢ διπλασία μήκει einer Korrektur bedürfen, *aber nicht dic Relation selbst*. Diese Relation $BE > 2BZ$ hat nämlich den Charakter einer *Schlufsfolgerung*, und keineswegs den einer *Bedingung* oder einer *Konzession*. Gegen die ungehörige Wendung κἂν ᾖ hat sich also die Kritik zu richten: *hier* liegt der Irrtum. Die richtige Erkenntnis des Irrtums führt aber auch sofort zu einer Vermutung über seine Entstehung. Die Stelle wird (unzweifelhaft wenigstens dem Sinne nach) ursprünglich geheifsen haben: „φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ᾗ *BE* μείζων τῆς . . .“ Irgend ein Abschreiber schrieb nun zunächst μείζων ἢ statt μείζων, da dies eine geläufige Kombination ist, die leicht in die Feder fliefst. Ein folgender bemerkte, dafs μείζων ja schon mit dem Genetiv konstruiert sei, und dafs also ἢ wohl ein Schreibfehler sein müsse. Er korrigierte daher ἢ in ᾖ, und nun mufste dem Konjunktiv zuliebe καὶ in κἂν verwandelt werden. Dieses κἂν ᾖ hat dann (wenn es gestattet ist, in der Reihe dieser Vermutungen auch noch die letzte auszusprechen) in unseren Tagen Usener dazu verleitet, *BE* in *BK* zu verwandeln, und so ist die vorliegende Stelle zu stande gekommen. Zu der Usenerschen Lesart ist übrigens doch noch zu bemerken, dafs sie auch an und für sich ganz unstatthaft ist. Denn $BK > 2BZ$ bedeutet, dafs eine Dreiecksseite gröfser sei als die Summe der beiden andern, und das ist eine so offenkundige Verkehrtheit, dafs sie niemandem, auch nicht in Form einer Hypothese, in den Mund gelegt werden kann. Darauf läfst sich so wenig eine Betrachtung aufbauen als etwa auf der Voraussetzung „auch wenn 2 gröfser wäre als 5“.

Zur Restitution des Folgenden ist jetzt nur noch nötig, das Komma vor καὶ ἡ ἐφ' ᾗ *KE* zu streichen, ὥστε mit Usener als ἔστει zu lesen und das darauf folgende μήκει καὶ als verkehrt zu unterdrücken.

Nachdem nun, wenigstens dem Gedankengange nach, der Beweis für die Relation $EK^2 > 2KZ^2$ mit Sicherheit wiederhergestellt ist, entsteht allerdings die zweite Frage, nämlich ob der Beweis auf Eudemus-Hippokrates zurückzuführen ist. Diese Frage glaube ich entschieden verneinen zu müssen. Schon der Satz 66, 14—15: ὅτι δὲ . . . οὕτως schliefst sich seinem ganzen Tone nach an die vorangehenden Worte des Simplicius, nicht aber an die des Eudemus an, was sich namentlich auch in der Wiederholung von ἡ ὑπὸ *EKH* γωνία bekundet. Sodann aber halte ich es aus bereits früher entwickelten Gründen (s. Anm. 88) für unerlaubt, δείξω (66, 17) anders als auf Simplicius zu beziehen. Eudemus würde es übrigens auch gar nicht der Mühe wert gefunden haben, für die in die Augen springende Thatsache, dafs der Winkel bei *Z* ein stumpfer ist (ist doch sein Nebenwinkel ein spitzer, da er der Seite

$EK < EZ$ gegenüberliegt), einen besonderen Beweis anzukündigen. Endlich aber scheint es mir unzulässig, anzunehmen, dafs HIPPOKRATES die Relation $EK^2 > 2KZ^2$ auf einem so umständlichen Wege abgeleitet habe. Der Satz, dafs die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite in der Potenz gröfser sei als die beiden andern zusammen, gehörte gewissermafsen zum alltäglichen Handwerkszeuge des HIPPOKRATES. Mit diesem Satze arbeitete er, damit führte er seine Beweise, nichts konnte ihm vertrauter sein als dieses Hülfsmittel. Auch im vorliegenden Falle ist es wieder dieser Satz, mit dem alles erledigt wird und um den sich alles dreht, wie es ja auch bei der zweiten Quadratur der Fall gewesen war. Und diesen Satz sollte HIPPOKRATES in seiner einfachsten Erscheinung, nämlich bei dem stumpfwinkligen Dreiecke KZB, übersehen haben? Er sollte nicht auf den ersten Blick die Relation $KB^2 > 2KZ^2$, die ja mit $EK^2 > 2KZ^2$ identisch ist, erkannt haben? Und wenn er auch wirklich diese Relation zunächst auf einem andern Wege gewonnen hätte, — er sollte dann auch nachträglich nicht bemerkt haben, dafs die Relation eigentlich selbstverständlich ist? Dies zu glauben, ist mir einfach unmöglich.

An den Satz D. 66, 10—12 dürfte also EUDEMUS-HIPPOKRATES einfach die Worte angeschlossen haben: „*ἡ γὰρ ἐφ' ᾗ BK μείζων ἐστὶ τῆς ἐφ' ᾗ KZ ἢ διπλασία δυνάμει, διότι καὶ γωνία ἡ πρὸς Z μείζων ὀρθῆς, ἴση δὲ ἡ BK τῇ KE· ὥστε* . . . (66, 21). Wenn SIMPLICIUS gefunden hatte, dafs dieser kurze Beweis nicht verständlich genug sei, und wenn er ihn daher durch einen etwas weiter ausgeführten, immerhin aber ganz korrekten ersetzte, so war er als Kommentator durchaus entschuldigt.

96. D. 66, 24—67, 2. Bei DIELS ist dieser Satz dem EUDEMUS zugeschrieben. Er dürfte aber doch wohl mit Sicherheit von SIMPLICIUS herrühren, was auch die Meinung von ALLMAN (A., p. 74), TANNERY (Praef., p. XXX) und HEIBERG (Phil., p. 342) ist. Der Satz ist übrigens ganz lückenlos, denn die Zahlen sollen nur als ungefähres Beispiel dienen, das aber nicht wörtlich zu nehmen ist.

97. D. 67, 4. In diesem von EUDEMUS herrührenden Satze streicht TANNERY (Praef., p. XXX) mit Unrecht *πάντα* und *εἴπερ* als nicht eudemisch. Durch *εἴπερ* wird ja aber gerade *πάντα* in einschränkendem Sinne erklärt. Es ist also gar nicht die Meinung des EUDEMUS, dafs HIPPOKRATES wirklich ganz allgemein alle Möndchen quadriert habe. SIMPLICIUS erklärte allerdings (D. 60, 23—27), offenbar im Hinblick auf diese Stelle, man könnte wohl sagen, HIPPOKRATES habe den Beweis allgemein geführt. Aber auch er ist keineswegs dieser Meinung, wie er bald genug zeigt (s. auch Anm. 59).

HEIBERG (Phil., p. 343) hält den Satz, wenigstens der Form nach,

für nicht eudemisch. Eudemus hat aber doch jedenfalls ein zusammenfassendes Schlufswort gesprochen, und die Übereinstimmung seiner Worte mit denen des Simplicius dürfte darauf zurückzuführen sein, dafs sich Simplicius (l. c.) fast wörtlich auf diese Stelle bezieht. Insbesondere bezieht sich sein καθόλου offenbar gerade auf das πάντα des Eudemus.

98. D. 67, 8. Diese Stelle hat Bretschneider wieder gänzlich mifsverstanden, denn er übersetzt (B., p. 119): „Allerdings aber suchte er den Kreis durch Monde auf der Sechsecksseite zu quadrieren, wie Alexandros dies gleichfalls angiebt.“ Es ist das gerade das Gegenteil von dem, was Simplicius sagt (s. auch Anm. 44).

99. D. 67, 14. Die Figur fehlt in den Handschriften.

100. D. 67, 27. Usener (67, 27 n.) fügt nach *ΘI* noch *HI* hinzu, was ich nicht für erforderlich halte.

101. D. 67, 28—29. Tannery (Praef., p. XXX) und Heiberg (Phil., p. 343) weisen, vermutlich wegen der neuen Bezeichnung, diesen Satz dem Simplicius zu. Sachlich gehört der Satz aber zur Vervollständigung der Beschreibung und stilistisch ist hier die neue Bezeichnung (die für mich überhaupt nicht mafsgebend ist) ganz wohl begründet, sodafs ich mit Diels den Satz dem Eudemus lasse.

102. D. 67, 32—36. Heiberg (Phil., p. 343) möchte diese langatmige Parenthese dem Simplicius zuweisen. Da aber wenigstens der erste Teil für das Verständnis durchaus notwendig ist, so schliefse ich mich der Interpretation von Diels an. Wenn übrigens Allman (A., p. 74, Anm. 50) die Parenthese dem Simplicius zuschreibt mit der Motivierung: „the word ἡ ὑποτείνουσα could scarcely have been used by Eudemus in the sense of sub-tense, as it is in this passage“, so vergifst er, dafs dieses Wort bereits an einigen früheren Stellen (D. 62, 33; 63, 13) in derselben Bedeutung vorgekommen ist, und zwar an Stellen, die er selbst als eudemisch anerkannt hat. Das Wort ὑποτείνουσα hatte eben früher thatsächlich eine allgemeinere Bedeutung als unser Wort Hypotenuse.

103. D. 68, 3—6. Dafs dieser Satz von Simplicius stammt, ergiebt sich durch die auch von Usener (68, 3 n.) hervorgehobene Übereinstimmung mit Euklid XII 2. Eudemus hatte die beiden Satzteile mit ganz anderen Worten ausgedrückt (D. 61, 6—9). Nicht uninteressant ist übrigens das von Simplicius vor κύκλοι hinzugefügte ὅμοιοι.

104. D. 68, 6—11. Diese Ausführungen, die Tannery (Praef., p. XXX) und Heiberg (Phil., p. 343) gegen Diels dem Simplicius zusprechen (vermutlich wieder wegen der neuen Schreibweise), schliefsen sich so enge an die Worte des Eudemus an (während ihr Anschlufs an die vorausgehende Erklärung des Simplicius nicht natürlich erscheint), dafs ich sie ebenfalls als eudemisch betrachten mufs.

105. D. 68, 16—24. Tannery (Praef., p. XXX) weist, wieder wegen der neuen Bezeichnung, diese Sätze dem Simplicius zu, womit auch Heiberg (Phil., p. 343) einverstanden ist. Ich mufs sie aber mit Rücksicht auf ihren Inhalt mit Diels für eudemisch halten. Dafür spricht auch die auffallende Übereinstimmung der Worte: *κοινοῦ οὖν ... τοῦ τριγώνου* mit der entsprechenden eudemischen Wendung D. 62, 5—6.

106. D. 68, 28—30. Auch diesen Satz halte ich mit Diels für eudemisch. Mit Rücksicht auf die von Simplicius (D. 60, 28) gegebene Erklärung sollte, wie mir scheint, überhaupt keine Stelle ohne zwingenden Grund dem Eudemus aberkannt werden.

107. D. 68, 32. Damit schliefst das eudemische Referat. Ich glaubte deswegen auch den Absatz schliefsen zu sollen, was bei Diels nicht geschieht.

Nach meiner Überzeugung ist nun der Ausscheidungsprozefs zwischen Eudemus und Simplicius soweit gefördert, dafs nur noch ganz wenige Stellen, und jedenfalls nur solche von untergeordneter Bedeutung, als zweifelhaft angesehen werden können.

108. D. 68, 34. Mit diesen Worten kehrt nun Simplicius wieder zu dem eigentlichen Thema seines Kommentares zurück. Er hat jetzt alles erforderliche Material gesammelt, die Berichte von Alexander und Eudemus (den er als den Kompetenteren bezeichnet) entwickelt und er wendet sich nun zur Beantwortung der Frage, was Aristoteles mit der Quadratur vermittels der Segmente gemeint habe. Darüber hatte er schon früher (D. 55, 26 *λέγοι δὲ ἂν* s. Anm. 36) eine Vermutung geäufsert, die er nun aber zu Gunsten einer anderen aufgiebt.

109. D. 69, 1. Das war eben diese erste Vermutung, die sich auf die Möndchen über den Seiten des Sechsecks bezog.

110. D. 69, 2. An dieser Stelle schliefst Bretschneider (B., p. 121), in der Meinung, der Satz sei zu Ende (die *Aldina* stimmt aber, abgesehen von einem ausgefallenen *διὰ*, wörtlich mit der Ausgabe von Diels überein), seine Übersetzung ab, indem er diesen Satzteil folgendermafsen wiedergiebt: „Die Quadratur des Kreises aber durch Segmente, die Aristoteles als irrig angreift, oder die durch Monde, die er gleichfalls bekrittelt, stellt auch Alexandros sehr richtig in Zweifel, wobei er bemerkt, sie sei die nämliche wie die durch Monde.“

Nach allen den mitgeteilten Proben glaube ich nicht zu viel gesagt zu haben, wenn ich in der Einleitung zu meiner Arbeit bemerkte, es dürfte an der Zeit sein, wenn die mathematische Litteratur endlich einmal in den Besitz einer wirklich zuverlässigen Übersetzung des so wichtigen Simpliciusschen Berichtes gelangen würde.

111. D. 69, 3. Gemeint ist die von Alexander mitgeteilte Quadra-

tur, die durch Zerlegung des ganzen Kreises in Möndchen angestrebt wurde (D. 58, 1—9).

112. D. 69, 6. Im Texte heifst es *τῶν τριῶν ἐν τῷ ἐλάττονι*. Die hier gegebene Ergänzung der verstümmelten Stelle, nämlich *τῶν τε τριῶν ⟨καὶ τῶν⟩ ἐν τῷ ἐλάττονι* (scil. *κύκλῳ*), rührt von Tannery (Praef., p. XXX) her.

113. D. 69, 8. Euklid III def. 6.

114. D. 69, 9—10. Mit dieser Wendung (s. auch Anm. 37) giebt also Simplicius die zuerst geäufserte Vermutung (D. 55, 26) auf. Er findet, dafs es der Bedeutung von *τμῆμα* besser entspreche, anzunehmen, Aristoteles habe die vierte Quadratur des Hippokrates (Kreis mit Möndchen zusammen) im Auge gehabt. Diese Annahme unterzieht er nun einer genauen Prüfung.

115. D. 69, 30—34. Wer die überaus verständigen Darlegungen des Simplicius, der die Situation hier vollkommen beherrscht, vorurteilsfrei liest, wird nicht wohl mit Tannery (Praef., p. XXXI) einen Irrtum annehmen wollen. Simplicius kann doch mit *ἀορίστων* nicht gemeint haben, diese Seiten seien gänzlich unbestimmt oder willkürlich, so wenig er einige Zeilen später (D. 69, 34) mit *πως* hat sagen wollen, die Segmente seien in ganz beliebiger Weise bestimmt. Wer mit solcher Sachkenntnis und mit solcher Sicherheit die Gründe zu entwickeln weifs, warum die Quadraturen des Hippokrates nicht als allgemeine bezeichnet werden können, der sollte doch wohl vor Mifsverständnissen dieser Art geschützt sein. Es ist aber zu hoffen, dafs nun überhaupt das Mährchen von der Ungeschicklichkeit des Simplicius aus der Welt verschwinde.

Was nun endlich das angebliche *ψευδογράφημα* des Hippokrates anbetrifft, so ist hier nur zu wiederholen, was bereits früher (Anm. 44) gesagt wurde: Ein Geometer von dem Range des Hippokrates ist eines solchen Trugschlusses einfach nicht fähig. Wenn auch sehr wohl zugegeben werden kann, dafs Hippokrates bei seinen Konstruktionen als letztes Ziel die Quadratur des Kreises im Auge hatte, so fehlt doch jede Berechtigung, anzunehmen, er habe geglaubt, durch die uns überlieferten Quadraturen die Aufgabe bereits gelöst zu haben. Wenigstens giebt Eudemus keinerlei Anhaltspunkte für eine solche Annahme. Wenn nun aber auch der Vorwurf des Aristoteles, sofern er sich wirklich auf Hippokrates bezog, jeder Begründung entbehrte, so haben wir doch alle Ursache, uns darüber zu freuen, dafs er überhaupt erhoben wurde. Denn diesem Umstande allein verdanken wir den Bericht des Simplicius.

Zürich, Januar 1902.

Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

Kürzlich hatte ich Gelegenheit zwei Handschriften Cod. Basil. F II 33 und Cod. Paris. 9335[1]), die beide für die Geschichte der Mathematik im Mittelalter sehr wertvoll sind, zu vergleichen. Beide sind im 14. Jahrh. geschrieben und enthalten gröfstenteils (der Pariser Codex vielleicht ausschliefslich) lateinische Übersetzungen aus dem Arabischen von Gerhard v. Cremona. Beide sind vielfach verwendet worden, obwohl sie keineswegs gleichwertig sind; denn der Baseler Codex (B.) ist nur mit Vorsicht zu benutzen, während der Pariser Codex (P.) in jeder Beziehung zuverlässig ist.

Folgende Schriften, die in beiden Codices stehen, habe ich verglichen: Theodosius *De habitationibus* (περὶ οἰκήσεων[2]), Alkindi *De aspectibus*[3]), Pseudo-Euklid *De speculis* und *Liber trium fratrum.*[4])

Was Theodosius *De habitationibus* betrifft, genügt es zu konstatieren, dafs B. nur einen Auszug der Gerhardschen Übersetzung enthält, während wir in P. das ganze Werk finden. Für eine Ausgabe kann also P. zu Grunde gelegt werden, während B. wertlos ist.

Von den zwei optischen Werken geben die zwei Codd. wohl den-

---

1) Vgl. P. Tannery, *Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham*; Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 45—47.

2) Unediert; eine Ausgabe des griechischen Textes hat Hultsch in Vorbereitung.

3) Unediert; handschriftlich auch im Cod. Cracoviens. 569 (14. Jahrh.). In Cod. Coll. Corp. Chr. 254 (Oxford) stehen nicht zwei Werke von Alkindi, sondern nur das hiesige; nur ist die Vorrede später hinzugefügt.

4) Herausgegeben von M. Curtze (Nova acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher **49**, Nr. 2). Den Inhalt von B. giebt Curtze hier p. 111—112 an. In B. fol. 129^r—130^r steht, wie Curtze annimmt (cf. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 381), der Text (*de tribus notis*), den er nach Cod. Vindob. 5277 ebenda ediert. Letztere Handschrift (von J. Vögelin im Anfang des 16. Jahrhunderts geschrieben) ist, wie ich beim Kollationieren von Menelaos' *Sphärik* und Clavus' *Radices Geographiae* erfahren hat, auch mit gewisser Vorsicht zu benutzen.

selben Text, B. aber in einer ziemlich verdorbenen Form. Der betreffende Abschreiber (es sind mehrere, die an B. gearbeitet haben) schreibt flüchtig und recht schwer leserlich; was aber schlimmer ist, er schreibt ganz ohne Verständnis und Interesse ab und hat aufserdem seine Vorlage sehr oft mifsverstanden. Wir warnen deshalb vor unkritischer Benutzung von B. fol. 65—172. Wo andere Abschreiber thätig waren, ist B., wie es scheint, besser, so z. B. fol. 197—219, die Ptolemaios' Perspective (ὀπτικά), die ich mit Govis[1]) Ausgabe oberflächlich verglichen habe, enthalten.

Um unsere Kritik von B. mit Beispielen zu belegen, führen wir einige Varianten von *liber trium fratrum*, für dessen Ausgabe B. die Hauptquelle ist, an:

In der Ausgabe steht p. 116 Zeile 4: „et declinabitur ex eo, quod
In P. heifst derselbe Passus: „et *declarabitur* ex eo, quod

narravimus . . . . . .“. — p. 118 Z. 10: „causa autem in utendo orthogonio
narrabimus . . . . . .“. — in P.: „causa autem in utendo orthogonio

supra aliis non est, nisi mensurans, quoniam cum oportet, ut sit quanti-
sine aliis non est, nisi *quoniam mensurans rem* oportet, ut sit quanti-

tas . . . . . .“. — p. 118 Z. 17: „Incipiamus ergo, nam manifestum⟨est⟩illud,
tas . . . . . .“. — in P.: „Incipiamus ergo *nunc narrare* illud,

quod voluimus.“ — p. 158 Z. 19: „ . . . . . . que sit innitamentum in aliis
quod uoluimus.“ — in P.: „ . . . . . . que sit *iuuamentum* in aliis

ex sua geometria.“
ex *scientia geometrie*.“

Im letzteren Beispiel korrigiert der Herausgeber „in aliis“ in „Milei“ (d. h. Menelai, der im *liber trium fratrum* mehrmals erwähnt wird). Nach P. fällt diese Korrektur weg, was eine weitere Bedeutung hat, weil es sich hier um eine Nachricht über Menelaos aus Alexandria handelt, die mit unseren sonstigen Kenntnissen durchaus nicht übereinstimmt[2]), so dafs die Glaubwürdigkeit der drei Brüder dadurch beeinträchtigt werden könnte.

Um nicht mifsverstanden zu werden, füge ich noch die Bemerkung hinzu, dafs Curtze, die erste Autorität, was die Mathematik des Mittelalters betrifft, den Baseler Codex natürlich tadellos interpretiert; es ist eben der Codex selbst, der so schlecht ist, dafs Scharfsinn und Kritik einen im Stiche lassen. Es wäre zu wünschen, dafs Curtze, der es am besten kann, eine neue Ausgabe vom *liber trium fratrum* besorgen wollte, und zwar auf Grundlage der Pariser Handschrift.

---

1) *L'Ottica di Claudio Tolomeo da* Gilberto Govi, Torino 1885 (nach cod. Ambros. T. 100).

2) Vgl. Curtze, l. c. p. 167.

Dafs der Pariser Codex in der That ein überaus guter ist, was schon öfters hervorgehoben ist, dafür habe ich weitere Proben, weil ich den darin enthaltenen Mileustext (MENELAOS' Sphärik) mit mehreren anderen, und zwar mit Cod. Parisin. Arsenalis 1035, Cod. S. Marco Venet. Cl. XI 63 & 90 und Cod. Vindobon. 5277 verglichen habe. Es zeigt sich wieder, dafs P. über den anderen gleichzeitigen Mss. vom 14. Jahrh. steht.

Ein genaues Inhaltsverzeichnis von P. habe ich nirgends gefunden. LIBRIS[1]) Angaben, die sich hauptsächlich auf das alte Verzeichnis in P. selbst stützen, sind ungenau. In DELISLES[2]) Katalog kommen auch Fehler vor. Ich benütze deshalb die Gelegenheit diese Lücke auszufüllen.

Die Handschrift führt die Bezeichnung »Codex Parisinus latinus 9335 (olim Suppl. 49)«, besteht aus 160 paginierten Textfolien und einem Vorsatzblatt mit einem alten Inhaltsverzeichnis. Der Beschreibstoff ist Pergament. Die Schrift (mittelalterl. italien. Minuskel) steht auf eingeritzten Zeilen (immer 51 auf jeder Seite) in zwei Kolonnen. Blattfläche $36 \times 23,5$ cm. Schriftfläche (ein bischen variirend) c. $23,3 \times 13,6$ cm. Die 16 Quaternionen zu je 5 Doppelfolien sind ganz in Ordnung[3]), der Codex also vollständig. Der Einband ist neu. Der ganze Codex ist ungewöhnlich gut erhalten und hübsch geziert mit rot-blauen Initialen. Die Schrift, teils mit schwarzer, teils (die Überschriften) mit roter Tinte, ist leicht leserlich. Orthographie und Abkürzungen, die nicht zu reichlich vorkommen, ziemlich konsequent.

Der ganze Text ist von einer Hand geschrieben. Wenigstens zwei neuere Hände haben aber Korrekturen, Erklärungen, Zahlenbeispiele und Randfiguren hinzugefügt, die indefs vom Grundtext leicht zu unterscheiden sind.[4]) Die erste Hand schreibt Zahlen mit Buchstaben oder (an den Figuren und in den Tafeln) mit römischen Zahlzeichen, die älteste der anderen Hände (die zweite) mit arabischen. Die ursprünglichen Figuren sind sehr genau und hübsch, die später hinzugefügten flüchtig hingeworfen.

Die erste Hand hat wenigstens zwei Muster vor sich gehabt; denn die Varianten vom zweiten Muster sind am Rande angegeben, und zwar immer mit den Worten: »in alio libro ...«. Es steigert dies natürlich den Wert des Textes.

---

1) LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, p. 297 ff.

2) L. DELISLE, *Inventaire des Mss. latins conservés à la bibl. nation. sous les numéros 8823—18613* (Paris 1863—1871), p. 28.

3) Auf der Kehrseite des letzten Blattes jeder Quaternion stehen unten die Anfangsworte der ersten Seite der folgenden.

4) TANNERY, l. c. pag. 45, hat eine andere Auffassung. Diese wird er jedoch, glaube ich, nicht festhalten, wenn er die Randnoten mit dem unten erwähnten Inhalt von fol. 134[r] vergleicht.

Von Subskriptionen giebts nur zwei, deren keine von der ersten Hand herrührt.

fol. 1r steht unten »Ismael Bullialdus[1]) fol. 160.«

fol. 134r (ursprünglich unbeschrieben) steht »dicta atque notata per me Johannem Pontana[2]) (vielleicht Fontana) physicum uenetum et probata pro declaratione speculi ardentis quedam sunt principia declaranda.« Die ganze Seite 134r ist von Pontana beschrieben, während die Kehrseite 134v unbeschrieben ist. In dieser bisher übersehenen Subskription haben wir, glaube ich, die, wie die Orthographie zeigt, ziemlich alte zweite Hand, die den ganzen Codex überarbeitet hat.[3]) Ein Beispiel einer dritten Hand haben wir fol. 82r col. 1 unten, wo »Euclidis« (von der ersten Hand mit roter Tinte geschrieben) in »Ptolomei«[4]) (von einer neueren Hand mit brauner Tinte) korrigiert ist.

Aus den Subskriptionen darf man vielleicht schließen, daß der Codex ziemlich früh in Venedig in Pontanas Besitz war, und später von Ismael Bouillaud nach Paris gebracht worden ist.

Einen Wink darüber, wo der Codex ursprünglich geschrieben wurde, giebt uns vielleicht der Umstand, daß Cod. Arsenalis 1035[5]) folgende Subskription führt: »Ego frater Jacobus Carpensis, prior monasterii Sancte Marie extra Neapolim, ordinis Montis Oliveti, subscripsi«. Dieser Codex, der im Jahre 1525 im Besitz von Franciscus de Medicis war, ist um die Mitte des 15. Jahrh. geschrieben. Die Schrift ist der in P. sehr ähnlich, und der im Cod. Arsenal. stehende Mileustext ist eine Abschrift von dem in P.

---

1) Ismael Bouillaud, franz. Astronom (* Loudun 1605, † Paris 1694), seiner Zeit berühmter Gelehrter, hat viel gereist; so war er mehrmals in Italien.

2) Diesen Johannes Pontana kann ich leider mit keinem der unter diesem Namen bekannten Gelehrten identifizieren: a) Joh. Jovianus Pontanus (* Cerreto 1426, † Napoli 1503) berühmter Staatsmann in Napoli; er schrieb über Physik und scheint sich auch für Mathematik interessiert zu haben (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1901, 353). b) Joh. Pontana (* Helsingör 1571, † Holland 1639), Arzt, Physiker und Mathematiker, war wahrscheinlich nie in Italien. c) Joh. Pontana († 1572), Königsberger Professor, war wahrscheinlich nie in Italien. — Johannes Fontana (1540—1610) hat 1599 Bemerkungen über eine Überschwemmung in Rom publiziert.

3) Ist Tannerys Auffassung richtig, so ist Pontana der, der den ganzen Pariser Codex geschrieben hat.

4) Dasselbe bemerkt Steinschneider, *Hebr. Übers.* II, p. 512.

5) Vgl. *Catalogue des manuscrits de la bibl. de l'Arsénal par* H. Martin II, p. 246. Paris 1886. — Das hier erwähnte Olivetanerkloster wurde bald nach dem Jahr 1411 gegründet; vgl. Cappelletti, *Le chiese d'Italia* XIX, p. 509. Ein Jacobus Carpensis (ursprünglich Arzt) war Ordensgeneral 1476—1480, ein anderer desselben Namens 1492—1493; vgl. S. Lancelotti, *Historiae Olivetanae* (1623), lib. 1, p. 54—56.

Der Inhalt von Cod. Par. 9335 ist folgender[1]):

1. Theodosios: σφαιρικά (fol. 1^r—19^r).[2]) fol. 1^r: *Pars prima libri theodosii de speris incipit.* Spera est figura corporea, una quidem superficie contenta, intra quam ...... [22 Sätze] ....
fol. 5^r: *Expleta est pars prima libri theodosii de speris, uiginti duas continens figuras. Pars secunda libri theodosii incipit* ...... [22 Sätze] ......
fol. 12^v: *Pars secunda libri theodosii de speris expleta est. Incipit pars tertia libri theodosii de speris.* ...... [13 Sätze] ....
fol. 19^r: ..... Et propter hoc etiam erit arcus $\overline{tk}$ maior arcu simili arcui $\overline{ze}$. Et illud est quod demonstrare uoluimus. *Explicit pars tertia libri theodosii de speris, que est eius pars ultima, cum qua totus finitur liber.*

2. Autolykos: περὶ κινουμένης σφαίρας (fol. 19^r—21^v).[3]) fol. 19^r: *liber autoloci de spera mota incipit.* Punctum equali motu dicitur moueri, cum quantitates equales et similes ....
fol. 21^v: ...... ergo unusquisque duorum circulorum $\overline{abgd}$, $\overline{bed}$ est maior, quoniam centrum eorum est centrum spere. Et illud e. q. d. u. *Expletus est liber autoloci de spera mota.*

3. Hypsikles: ἀναφορικός (fol. 22^r—23^r).[4]) fol. 22^r: *Liber esculei de*

---

1) Das kursiv Gedruckte ist im Codex rot geschrieben oder doch rot unterstrichen.

2) Ich habe nicht das genügende Material zur Verfügung, um feststellen zu können, ob dieser Theodosios-Text ediert ist. In der Druckausgabe von Antonio Giunti (Venetiis 1518) steht ein anderer Theodosios-Text mit bezw. 33, 31 und 15 Sätzen, den ich auch in cod. S. Marco Venet. Lat. VIII 32 (Valentinellis Katalog XI, 90), cod. reg. Suec. 1261, cod. Palatin. 1351, cod. S. Marco Florent. 213 und in B. (Basil. F II 33) gefunden habe, während der hiesige Text (Paris. 9335) auch in cod. S. Marco Venet. 332 (Valentinellis Katalog XI, 6) steht. In der hiesigen Text (P), der kürzeren, vermute ich die Übersetzung von Gerhard von Cremona, in der anderen die von Plato von Tivoli. Sicher feststellen kann ich vorläufig nur, daſs in der That zwei verschiedene Übersetzungen vorliegen, von denen die kürzere aus dem Arabischen übersetzt, während die andere von Campanus überarbeitet und kommentiert ist; denn in der kürzeren kommt das Wort „meguar" (vgl. unten) vor, und die längere wird in dem obengenannten cod. S. Marco Venet. VIII 32 mit folgenden Worten bezeichnet: „liber theodosii de speris cum commento capani (Campani)". Es stimmt dies mit den Berichten überein, nach welchen sowohl Gerhard von Cremona wie Plato von Tivoli die Sphärik des Theodosios aus dem Arabischen übersetzten; vgl. Leclerc, *Historie de la médecine arabe* II, p. 392, 410 und Boncompagni, Atti dell' accademia pontif. dei Nuovi Lincei 4, 1851, 251 ff. und 447.

3) Ob diese Übersetzung ediert ist, habe ich nicht feststellen können. Daſs sie nach dem Arabischen gemacht ist, zeigt der Umstand, daſs die Weltachse oder der Kugeldurchmesser „meguar spere" genannt wird (vgl. Leclerc, l. c. II, p. 392, 416).

4) Ediert von K. Manitius, der die Übersetzung in P. dem griechischen Text zur Seite gestellt hat. (Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz. Dresden 1888). — Die Übersetzung steht auch in B. (fol. 64).

ascensionibus incipit. Si fuerint quotlibet quantitates ....
fol. 23r: ...... modum quo operati fuimus. *Expletus est liber esculei de ascensionibus.*

Anhang 1. (fol. 23r—23v).[1]) fol. 23r: Figura per quam monstratur, quod omnis trianguli in semicirculo cadentis unius duorum laterum in alterum multiplicatio est equalis multiplicationi diametri in perpendicularem que cadit super basim trianguli ....

Anhang 2. (fol. 23v): Postquam cordam gradus siue regulam ptolomi sciuerimus et uoluerimus scire cordas medietatis gradus .....

4. Tábit ibn Korrah: Einleitung in's Almagest (fol. 23v—25r).[2]) fol. 23v: *liber quem edidit tebit filius chore de his que indigent expositione antequam legatur almagesti.* Quatuor[3]) diei est circulus maior qui describitur super duos polos ....
fol. 25r: ...... Et cum fuerint in oppositione solis, aut propinque oppositioni, erunt retrogradi. *Expletus est liber tebit filii chore de his que indigent expositione antequam legatur almagesti.*

5. Theodosios: *περὶ οἰκήσεων* (fol. 25r—28v).[4]) fol. 25r: *liber theodosii de locis in quibus morantur homines incipit, qui sic exorsus est.* Illis quorum habitationes loca sub polo consistant septemtrionali, spere medietas apparens semper eis apparet. ....
...... [12 Sätze] ....
fol. 28v: ...... Et manifestum est nobis, quod totum residuum dierum ad residuum noctium est secundum proportionem. Et illud est q. d. u. *Expletus est liber theodosii de locis habitationum.*

Anhang (fol. 28v): *Ordo qui est post librum euclidis secundum quod inuenitur in scriptis iohanicii.*[5]) | *Euclidis de aspectibus tractatus unus* | *Theodosii de speris tractatus tres* | *Autolici de spera mota tractatus unus* | *Euclidis de apparentibus tractatus unus* | *Theodosii de locis habitabilibus tractatus unus* | *Autholici de ortu et occasu duo tractatus* | *Theodosii de die et nocte duo tractatus* | *Esculei de ascensionibus tractatus unus* | *Arsodochi de elongationibus planetarum et earum magnitudinibus tractatus unus* |.

---

1) Der Ursprung von Anhang 1 und 2 ist mir nicht bekannt.

2) Vgl. Steinschneider, Zeitsch. für Mathem. 18, 1873, p. 335.

3) Cod. Vindob. 5277 (Vögelin) hat „aequator".

4) Dieses Werk ist von Auria in lat. Übers. ediert (Rom 1587, 4°, sehr selten). Der hiesige Text ist wahrscheinlich nicht ediert.

5) Diese Aufrechnung der mittleren Bücher ist mehrmals abgedruckt. Vgl. Steinschneider, Zeitsch. für Mathem. 10, 1865, p. 464; Heiberg, *Litt. Stud. üb. Euklid*, p. 152; K. Manitius, l. c. XI ff. — „Johannicius" ist nach Steinschneider Honain ben Isak.

6. ARCHIMEDES: κύκλου μέτρησις (fol. 28v—30r).[1]) fol. 28v: *Liber Arsamithis de mensura circuli.* Omnis circulus triangulo orthogonio est equalis ....

fol. 30r: ...... Et illud est q. d. u.

7. AHMED BEN JUSUF: de arcubus similibus (fol. 30r—31v).[2]) fol. 30r: *Epistola abuiafar ameti filii josephi de arcubus similibus.* Hic, postquam optauit ei bona euenire, cui epistolam mittit, inquit: Si loqui inceperis de arcubus similibus ....

.... [9 Figuren] ....

fol. 31v: ...... Nam differt conparationis in eis: sunt equalitas et diuersitas et similitudo et dissimilitudo.

8. JAKOB ALKINDI: De quinque essentiis (fol. 31v—32v).[3]) fol. 31v: *liber de quinque essentiis* [in margine prima manu: uel substantiis][4]), *quem iacob alchildus filius ysaac compilauit ex dictis aristotilis.* Sapiens [id est aristocilis], ubi dialecticam incepit, dixit, quod scientia cuiusque rei que inquiritur, cadit [uel continetur] sub phylosophia ...... (5 Kapitelüberschriften: „*De yle*", „*de forma*", „*De motu*", „*De loco*" & „*de tempore*") ....

fol. 32v: ...... Et ipsa est instans meditatum quod coniungit [uel continuat] inter preteritum ex eo et inter futurum. *Expletus est liber de quinque substantiis secundum aristotelem phylosophum.*

9. MENELAOS: σφαιρικά (fol. 32v—54v).[5]) fol. 32v: *Tractatus primus libri milei de figuris spericis.* Declarare uolo qualiter faciam supra punctum datum ....

fol. 54v: ...... qui transit per spacium quod est inter duo puncta $\bar{e}$, $\bar{d}$, scilicet per punctum $\bar{l}$, et equidistat arcui $\overline{bg}$, et illud est q. d. u.

Anhang (fol. 54v—55r).[6]) fol. 54v: Volo ostendere quod omnium trium linearum proportionalium proportio prime ad secundam duplicata est proportio prime ad terciam ....

---

1) Genau dieselbe Übersetz. ist von HEIBERG nach cod. Dresd. Db. 86 ediert (Zeitschr. für Mathem. 35, 1890, p. 464 ff.).

2) Ediert von CURTZE als Anhang zur Ausgabe der Geometrie des JORD. NEMORARIUS; Mitteil. des Coppernicusvereins 6 (Thorn 1887).

3) Ob diese Schrift ediert ist, weiß ich nicht.

4) Die Randbemerkungen der ersten Hand, die fast immer Angaben von Varianten sind, werden wir im folgenden immer in [ ] setzen.

5) Zwischen dieser Übersetzung und den lateinischen Ausgaben von MAUROLYCUS (Messana 1558) und HALLEY (Oxford 1758) sind große Abweichungen. Eine Ausgabe dieser Übers. (über die nähere Aufschlüsse bei STEINSCHNEIDER, Zeitschr. für Mathem. 10, 1865, 483 ff.) habe ich in Vorbereitung.

6) Über den Ursprung dieses Anhangs ist mir nichts bekannt.

10. Muhammed, Hamed et Hasan ibn Musa ibn Schakir: liber trium fratrum (fol. 55r—63v).[1]) fol. 55r: *Verba filiorum moysi filii sekir, id est, maumeti, hameti, hasen.* Propterea quia uidimus, quod conueniens est necessitas scientie mensure figurarum superficialium .... fol. 63v: ...... qui uocet ut sciatur demonstratio super operationem eius. *Completus est liber auxilio dei.*

Anhang. (fol. 63v—64r).[2]) fol. 63v: Iste modus est sufficiens in arte eptagoni cadentis in circulo. Sit ergo circulus $\overline{abd}$ in circuitu centri $\bar{g}$. Quando ergo uoluerimus facere in eo eptagonum equalium laterum ..... [3 Figuren].

11. Ahmed ben Jusuf: de proportione et proportionalitate (fol. 64r—75r).[3]) fol. 64r: *Epistola ameti filii iosephi de proportione et proportionalitate incipit.* Iam respondi tibi, ut scias, quod quesiuisti de causa geometrice proportionis .... fol. 75r: ...... qui est sufficientia nostra et tutor bonus. *finit epistola ameti filii ioseph de proportione et de proportionalitate.*

12. Jakob Alkindi: de aspectibus (fol. 75r—82r).[4]) fol. 75r: *liber iacob alkindi de causis diuersitatum aspectus et dandis demonstrationibus geometricis super eas.* Oportet, postquam optamus complere artes doctrinales, et exponere in eo quod antiqui premiserunt .... fol. 82r: ...... Ergo $\overline{dg}$ minor sentitur angulo minore, qui est $\overline{dag}$, et maior angulo maiore, qui est $\overline{bag}$. Et i. e. q. d. u. *Explicit liber de aspectu.*

13. Pseudo-Euclid: de aspectibus (fol. 82r—83v).[5]) fol. 82r: *Tractatus Euclidis* [corr. in „Ptolomei" von der dritten Hand] *de speculis.* Preparatio speculi in quo uideas alterius ymaginem et non tuam. sit $\overline{ab}$ paries supra superficiem $\overline{bg}$ orthogonaliter erecta .... fol. 83v: ...... Neque etiam aliquid uisibilium simul cum omnibus uidetur. Et i. e. q. d. u.

1) Über Curtzes Ausgabe vgl. oben.

2) Dieser Anhang, dessen Ursprung mir unbekannt ist, steht nicht in Curtzes Ausgabe. Al-Hazen ibn Heitham hat eine Schrift über das Siebeneck im Kreise verfafst. Vgl. Leclerc l. c., I, 520.

3) Eine Ausgabe dieser Übersetzung hat Curtze in Vorbereitung. Er wird dazu aufser P. auch cod. Vind. 5277 anwenden. Vgl. Curtze, *Anaritii Comm. in Euclidem*, Prolegom. XXVII—XXIX.

4) Das Werk ist meines Wissens unediert. Eine Ausgabe der hiesigen Übers. habe ich in Vorbereitung. Vgl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* II, p. 512.

5) Diese Schrift ist wahrscheinlich arabischen Ursprunges, wenigstens nicht identisch mit Euklids Katoptrik. Vgl. Rose, *Anecd.* II, p. 21; Heiberg, Euclidis *opera* VII, Prolegom. LI. Dieser Text ist unediert; ich habe ihn mit dem vorhergehenden kollationiert. Vgl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* II, p. 512.

14. TIDEUS: de speculis (fol. 84r—88v).[1]) fol. 84r: *Sermo de eo, quod homo in speculo et in eo, quod non est speculum (?), et de causis illius, quem collegit ea ex libris antiquorum tideus filius theodori aRuegoiu (?) medicus.* Scias quod illud, quod uidet homo in speculo terso boni ferri, uidetur uerius; ferrum enim bonum tersum .... fol. 85v col. 1: ...... propter paruitatem que accidit lumini egredienti ab oculo scilicet strictura [id est piramidis que est ut pinea procedens ab oculo] pinealis oculi. *Ista*[2]) *que sequuntur sunt in principio libri apolonii de piramidibus. Ee (?) sunt axiomata que premitit in libro illo.* Cum continuatur inter punctum aliquod et lineam continentem circulum .... fol. 86r col. 1: ⟨De speculis comburentibus⟩[3]) De sublimiori quod geometre adinuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt .... (Kapitelüberschrift fol. 86r col. 2): *Radices super quas est conuenienta.* Radius solaris egreditur ex corpore solis .... fol. 88v: ...... Et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quoniam radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum.

15. EUKLID: ὀπτικά (fol. 88v—92r).[4]) fol. 88v: *liber de aspectibus euclidis incipit.* Radius egreditur ab oculo super lineas equales rectas et accidit post ipsum ...... [38 Sätze] .... fol. 92r: ...... cum fuerit linea que protrahitur ex loco uisus ad centrum circuli secundum dispositionem quam diximus. Et i. e. q. uoluimus declarare.

16. AL-NARIZI (??): Commentar zu EUKLIDS Elementen Buch X (fol. 92v—110r).[5]) fol. 92v: *Abbacus.* Cum quautitates ad inuicem comparantur,

1) Unediert.

2) Das folgende (fol. 85v—86r) ist abgedruckt in der HEIBERGschen APOLLONIUS-Ausgabe, Prolegomena S. LXXV ff.

3) Der erste Teil des hiesigen Tideustextes (fol. 84r—85v) steht in B. (fol. 109—110) unter dem Titel: „Thydeus, de speculis." Der Anhang nach APOLLONIOS (fol. 85v col. 1—86r col. 1) steht nicht in B. Der letzte Teil des hiesigen Textes (fol. 86r col. 1—88v) steht in B. (fol. 105—106) und in Cod. S. Marco Venet. XI 90 (fol. 90r—94v) bezw. mit den Überschriften „Thides, de speculis comburentibus vel de sectione mukesi" und „Liber de speculis comburentibus".

4) Dieser Text, der, wie ich von der Verwechselung der Figurbuchstaben ū und z schliefse, eine Übersetzung nach dem Arabischen ist, ist nicht ediert. Vgl. HEIBERG, l. c. Prolegom. XL, und STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* II, p. 511.

5) Das hiesige Werk ist identisch mit dem letzten Teil vom Kommentar des AL-NARIZI zu EUCLID X, und es nimmt in CURTZES Ausgabe (s. oben) die Seiten 252—386 ein. Übrigens ist es als zweifelhaft zu betrachten, ob dieses Stück wirklich dem AL-NARIZI gehört. Vielleicht haben wir hier vielmehr den: »liber jndei super decimum euclidis tractatus I« (vgl. BONCOMPAGNI, *Della vita e delle opere di GHERARDO CREMONESE*, Roma 1851, p. 3—7, wo ein Verzeichnis der Übersetzungen von GERHARD v. CREMONA nach c. Vatic. 2392 abgedruckt ist). STEINSCHNEIDER (*Hebr. Übers.* II, p. 532—533) ist unsicher, glaubt aber das „jndei" = SAID (d. h. SAID ABU OTHMAN, X. Jahrh.). LECLERC sieht in „jndei" den SIND BEN ALI (LECLERC, l. c. II, p. 507). Über die Mög-

alie earum sunt communicantes, alie incommunicantes; communicantes uero sunt, quibus una quantitas inuenitur communis ....
fol. 110r: ...... et est radix radicis illius surda. Et similiter faciemus semper usque in infinitum. Et i. e. q. d. u. *Expletus est liber* ....

17. Alchwarizmi: Algebra (fol. 110v—115v).[1]) fol. 110v: *liber maumeti filii moysi alchoaresmi*[2]) *de algebra et almuchabala incipit. Hic* post laudem dei et ipsius exaltationem inquit ....
fol. 115v: ...... *liber hic finitur.*

Anhang (fol. 115v—116v). fol. 115v: *In alio tamen* [*libro*] *repperi interposita suprascriptis.* Quod si quis dixerit tibi: diuisi decem in duas partes et multiplicaui .... [keine Figuren] ....
fol. 116v: ...... et proueniunt uiginti quinque dragme, cuius radix est quinque.

18. Abubekr (?): Liber mensurationis (fol. 116v—125v).[3]) fol. 116v: *liber in quo terrarum corporumque continentur mensurationes abhabuchri, qui dicebatur heus, translatus a magistro Girardo cremonensi in toleto de arabico in latinum, abreuiatus incipit. Cuius hec sunt Verba:* Cum aliquis tibi dixerit: est quadratum equilaterum et orthogonium cuius quodque latus est decem ....
(Kapitelüberschriften: *Capitulum quadrati altera parte longioris. — C. quadrati cuius caput est breuius. — C. aride diuerse uel [quadrati] diuerse latitudinis. — C. dimidii aride. — C. aryde [uel latitudinalis] expanse. — C. de triangulis. — C. trianguli duorum equalium laterum et acutorum angulorum. — C. trianguli orthogonii. — C. trianguli ambligonii. — C. men-*

lichkeit, dafs ursprünglich Pappos Verfasser dieses Kommentars ist, vgl. Heiberg, *Litt. Stud. üb. Euklid*, p. 169—170, und Woepcke, Mémoires présentés à l'ac. des sc. XIV, p. 658—720. — Der ganze Anaritiustext steht in cod. reg. Suec. 1268 fol. 144—205 (saec. XIII—XIV). Ein Vergleich mit Curtzes Anaritiusausgabe zeigt, dafs diese dem Herausgeber unbekannte Handschrift eine sehr gute ist, aber leider giebt sie keine sicheren Aufschlüsse über die Echtheit des letzten zweifelhaften Teiles des Kommentars zum 10. Buche der Elemente.

1) Ediert von Libri, l. c. I, p. 253—297, und zwar nach P.; vgl. auch Boncompagni, l. c. p. 28—53.

2) Man kann hier auch »alchoarismi« lesen. Vgl. Tannery, l. c., p. 46.

3) Meines Wissens ist dieses Werk unediert; vgl. Boncompagni, l. c. p. 55 und Suter, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 10, 1900, p. 216. — Im Verzeichnisse über Gerhards Übersetzungen steht dies Werk nicht, dagegen ein »liber de practica geometrie tr. I«, der vielleicht die hiesigen Nummern 18—20 einschliefst; keine dieser Nummern stimmt jedoch mit der „Geometria practica" in B. (fol. 154—159) überein. Bemerke auch »Liber abubecri rasis qui dicitur almansorius tract. X« und »Liber divisionum almansoris continens CLIIII capitula cum quibusdam confectionibus eisdem«; vgl. Boncompagni, l. c. p. 55—56, und Chasles, Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris t. XIII, p. 503 ff.; vgl. Leclerc, l. c. II, 413 und 512—513.

surationis circuli. — C. mensurationis semicirculi. — C. portionis semicirculo maioris. — C. portionis que est minor semicirculo. — C. corporum. — C. solidi longioris altera parte et scientie mensurationis eius. — C. aree solidi similis fanethei. — C. solidi similis cuidam pisci triangulo chaburi nomine. — C. solidi serratilis. — C. corporis domui similis. — C. aree columne. — Area corporee piramidis que est similis cumulo tritici. — C. mensurationis spere.)

....

fol. 125ᵛ: ...... et hec est eius forma. *Expletus est totus liber mensurationis.*

19. Seid Abuothman: Anhang zu 18. (fol. 125ᵛ—126ʳ).[1]) fol. 125ᵛ col. 1: *Incipit liber Saydi abuothmi.* Scias quod scientia figurarum superficialium et corporearum est, ut noscas, quid in figura, cuius area queritur ...... (nur 2 Figuren [Quadrat und Würfel oder Parallelepipedon] und fol. 125ᵛ col. 2 die Kapitelüberschrift: »*Capitulum quadratorum*«) ....
fol. 126ʳ: ...... hec ergo sunt ea que in omni contingunt quadrato ⟨corr. ex: triangulo⟩.

20. Abd-el-Rahman (?): Anhang zu 18. (fol. 126ʳ—126ᵛ). fol. 126ʳ: *Incipit liber aderameti.*[2]) Scias, quod aree cuiusquo quadrati orthogonii, siue sit equalium laterum siue diuersorum, noticia est, ut multiplices unum laterum suorum continentium angulum rectum in secundum, et quod fuerit, erit eius area ...... [keine Figuren] ....
fol. 126ᵛ: ...... et propterea multiplices quod aggregatur in terciam altitudinis. Quod enim prouenerit, erit area illius corporis.

21. Abraham (?): liber augmenti et diminutionis (fol. 126ᵛ—133ᵛ).[3]) fol. 126ᵛ: *liber augmenti et diminutionis, uocatus numeratio diuinationis, ex eo quod sapientes indi posuerunt, quem abraham compilauit et secundum librum, qui indorum dictus est, composuit.* In ipso est capitulum de censibus. Deinde de ....
fol. 133ᵛ: ...... tunc dic ei, quod nihil accepit. Expletus est liber.

Anhang (fol. 133ᵛ col. 1)[4]) von nur 17 Zeilen: Si tres uiri tenuerint tres res diuersi generis, et uolueris scire, quam illarum quisque eorum teneat, noscas ....

1) Unediert; vgl. Leclerc, l. c. II, p. 511—512; Steinschneider, *Hebr. Übers.* II, p. 532, 670—671; und Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. 18, 1864, p. 166 ff.

2) Unediert; Tannery liest hier »aderamen«, was kaum richtig sein kann, selbst wenn das Wort so gelesen werden könnte. Im alten Inhaltsverzeichnis steht: »liber Aderameti«.

3) Ediert von Libri, l. c. I, p. 304 ff. Über den unbekannten Verfasser s. Tannery l. c.; Eneström, Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 27, und ebenda 1896, p. 39, 1899, p. 94—95. Wie Tannery kann auch ich versichern, dafs Libris Ausgabe ganz zuverlässig ist.

4) Ursprung unbekannt.

fol. 133ᵛ col. 2 ist leer. — fol. 134ʳ (unliniert und ohne Kolonnen) enthält die oben erwähnten »dicta atque notata per me Johannem Pontana [Fontana?] physicum uenetum ....«
fol. 134ᵛ ist leer.

22. Jakob Alkindi: de gradibus (fol. 135ʳ—139ᵛ).[1]) fol. 135ʳ: *liber iacob alkindi phylosophi de gradibus. Verba ipsius:* Quja primos ueteres, ut de uirtutibus cuiusque medicine singillatim in caliditate[2]) et frigiditate et humiditate[2]) et siccitate loquerentur, ualde sollicitos fuisse cognoui .... [mit mehreren medicinischen Tafeln] ....
fol. 139ᵛ col. 2 Mitte: ... *Explicit liber alkindi de gradibus compositarum medicinarum.*

Anhang (letzte Hälfte von fol. 139ᵛ col. 2): Medicine galieni compositio quam secundum andromachum edidit in octaua parte libri X tractatuum. Receptio huius medicine que in libro galieni ......

23. fol. 140ʳ—141ʳ: *Capitulum cognitionis mansionis luna* [2 grofse Tafeln mit einem kleinen Text am Rande fol. 140ʳ].[3])

24. Tâbit ibn Korrah: de motu octavae sphaerae (fol. 141ʳ—143ʳ).[4]) fol. 141ʳ. *Tractatus patris asen thebit filii core in motu accessionis et recessionis. Tractatus de narratione motus accessionis et recessionis et descriptione figure illius secundum ipsius qualitatem in orbe.* Imaginabor speram equationis[5]) diei et tres circulos in ea signatos ...... (eine grofse Figur, 3 Tafeln und eine Kapitelüberschrift: »*Capitulum qualiter equetur hic motus*«) ....
fol. 143ʳ (nach dem Schlufs von Tafel 3): *Expletus est tractatus ascein* (oder *asceni* oder *ascem*) *tebit filii core de accessione et recessione.*

25. Al-Farabi: de scientiis (fol. 143ᵛ—151ᵛ).[6]) fol. 143ᵛ: *liber Alfarabii de scientiis, translatus a magistro Girardo cremonensi in toleto de arabico in latinum. Cuius in eo hec sunt uerba:* Nostra in hoc intentio est famosas scientias comprehendere ....
fol. 151ᵛ: ...... et licet ut deducatur homo ad illud, quod pertinet sibi ipsi cum mendacio et eo, quod errare facit, sicut sit mulieribus et infantibus. *Completus est liber.*

1) Vgl. Leclerc, l. c. I, p. 165.

2) Bemerke hier die Abkürzungen: calĭtate = caliditate und humĭtate = humiditate.

3) Meines Wissens nicht untersucht; vgl. Nr. 26 unten.

4) Über dieses Werk, welches die sog. Trepidationstheorie behandelt, siehe Steinschneider, Zeitschr. für Mathem. 18, 1873, p. 335; 19, 1874, p. 96; u. *Hebr. Übers.* II, p. 588—589. Die Ausgaben von 1480, 1509 und 1518 sind sehr selten.

5) Cod. Vindob. 5277 (vgl. oben S. 68, Anm. 3) hat „equatoris“.

6) Vgl. Steinschneider, *Al-Farabi, des arabischen Philosophen Leben und Schriften* (St. Petersburg 1869), und *Hebr. Übers.* I, p. 292—293. Ein anderer Text des Werkes findet sich in der Gesamtausgabe, Paris 1638.

26. Harib ibn Zeid: Liber Anoe (fol. 151ᵛ—160ᵛ).[1]) fol. 151ᵛ: *liber anoe hic incipit. In hoc libro est rememoratio anni, et horarum eius, et reditionum anoe in horis suis, et temporis plantationum, et modorum agriculturarum, et rectificationum corporum, et repositionum fructuum.* Harib filii zeid episcopi, quem composuit mustansir imperatori. Iste liber positus est rememoratio (sic!) ...... [Text bis fol. 152ᵛ incl.] .... fol. 153ʳ —160ᵛ: Tafel mit Überschrift: »*hec est autem forma tabularum, et ordinis earum, et nominationis mensium in capitibus suis, et nominationis mansionum in eis*«).

Man sieht sofort, dafs der hier referierte Inhalt aus 4 Teilen, 4 Sammlungen, besteht, und zwar: 1—11 (mit Ausnahme von 8): die mittleren Bücher; 12—15: optische Lehrbücher; 16—21: Algebra und Rechenkunst (inkl. Flächen- und Körperberechnungen); 22—26: Nachtrag von einigen astronomischen, philosophischen, medicinischen und calendarischen Werken, d. h. Werken, die mit der Mathematik selbst nichts zu schaffen haben. Es ist deshalb kein Zufall, dafs eben zwischen Nr. 21 und 22 ursprünglich ein leeres Blatt (fol. 134) war. — Da der Codex also nicht, wie es sonst so oft der Fall ist, von einem Konglomerat zufälligerweise neben einander stehender Werke besteht, sondern von mehreren mit Umsicht geordneten Sammlungen, ist es sehr zu bedauern, dafs nicht jede Sammlung für sich ediert worden ist, um so mehr, weil wir annehmen dürfen, dafs sie abgeschrieben sind nach mehreren vom Abschreiber mit einander verglichenen ähnlichen Sammlungen, die dann direkt von Gerhard von Cremona herrühren dürften.[2])

1) Ediert von Libri, l. c. I, p. 393—458; vgl. Steinschneider, Zeitsch. der deutschen morgenl. Gesellsch. 18, 1864, p. 126 ff.; Leclerc, l. c. II, p. 425—426; Caussin, Notices des manuscrits de la bibl. nat. 12, 1831, p. 244—245, wo ein anderer Verfasser eines „liber Anua" und einer „tabula mansionis" erwähnt wird.

2) Steinschneider hat angenommen, dafs alle Werke, die in P. stehen, von Gerhard übersetzt worden sind (Zeitschr. der deutschen morgenl. Gesellsch. 18, 1864, p. 147). Andere oder vielmehr alle anderen hegen nach ihm dieselbe Ansicht, die sicherlich auch die richtige ist. Von den obigen Nummern 1—26 fehlen in dem von Boncompagni veröffentlichten Verzeichnisse über Gerhards Übersetzungen (nach Cod. Vatic. 2392) nur 13, 15, 18—21, von denen jedoch 18 ausdrücklich dem Gerhard zugeschrieben wird. 18—20 bildeten, wie oben erwähnt, vielleicht die »practica geometria«, es fehlen also nur noch 13, 15 und 21. Eine nähere Untersuchung von anderen Handschriften, die diese Werken enthalten, sowie eine genaue Identifikation der handschriftlich erhaltenen Übersetzungen mit den verschiedenen Verzeichnissen von Gerhards Übersetzungen wird wohl einmal diese Lücke ausfüllen.

Ein Beitrag zur Beurteilung des Pietro Antonio Cataldi.

Von G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Die Bibliotheca Mathematica hat in ihrer neuen Folge begonnen, auf kleine Ungenauigkeiten in der zweiten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* aufmerksam zu machen, damit die dritte Auflage dieses klassischen Werkes, die wohl nicht mehr lange auf sich warten lassen wird, möglichst fehlerfrei werde. Es scheint mir aber, dafs auch weitergehende Änderungen in demselben erforderlich sein werden, dafs das Gesamturteil über einzelne Mathematiker zu modifizieren sein wird, namentlich wenn der einzige Gewährsmann Cantors direkt oder indirekt der berüchtigte Libri war, den Cantor selbst neuerdings in seinem auf dem internationalen Mathematiker-Kongrefs in Paris 1900 gehaltenen Vortrag *Sur l'historiographie des mathématiques* zwar milde aber treffend charakterisiert hat.

Zu den mathematischen Schriftstellern, über welche durch Libri eine falsche Meinung verbreitet ist, gehört Pietro Antonio Cataldi. Eine solche Meinung, wenn sie einmal festen Fufs gefafst hat, zu erschüttern, ist nicht leicht, da der Irrtum vielfach ungeprüft von einem Schriftsteller in den andern übergeht, und auf diese Weise eine um so weitere Verbreitung findet, je bedeutender das Werk ist, das ihn übermittelt. So habe ich vor drei Jahren den Nachweis geführt, dafs die Kettenbrüche von Bombelli erfunden sind, mehr als 40 Jahre bevor Cataldi sich der Sache bemächtigt und dieselbe ungebührlich breit getreten hat. Trotzdem ist es nicht sicher, ob es in diesem Falle nicht ebenso gehen wird, wie mit der „Cardanischen Formel“ und der „Pellschen Gleichung“. Diese Erwägung hat mich veranlafst, einige Schriften Cataldis etwas genauer anzusehen, um mir ein Urteil über den Mann und seine Leistungen überhaupt zu bilden, und es sei mir gestattet, hier eine vollständige Analyse einer der ersten Schriften Cataldis zu gehen, und einige Bemerkungen daran zu knüpfen.

Es ist das die Schrift über vollkommene Zahlen, die aus 4 + 48 Quartseiten besteht. Auf dem Titelblatt steht oben: „Soli Deo Omnis Honor Et Gloria.“ Dann folgt der Titel: *Trattato De' Numeri Perfetti Di Pietro Antonio Cataldo.* In Bologna, Presso gli Heredi di Giovanni Rossi

M·DC·III. Con licenza de' Superiori.“ Das zweite Blatt ist überschrieben: „Deo Aeterno Omnipotenti· Cui sit semper omnis honor et gloria“ und enthält die Widmung an Gott, unter dessen Schutze die Schrift erscheine, und dem als dem vollkommensten und besten Wesen eine Abhandlung über die vollkommenen Zahlen gewidmet werden müsse, zumal er ihm die Gnade erwiesen habe, seinen Geist zu erleuchten, sodafs er trotz der vielen Gefahren, der Schwäche und der Krankheiten, aus denen ihn Gottes Allmacht und Barmherzigkeit, wie er hoffe, bald befreien werde, den Gegenstand leicht und klar von neuem habe bearbeiten können. Denn es sei ihm im Mai 1594 eine Kassette, welche aufser verschiedenen Wertsachen diese Arbeit und viele andere arithmetische und geometrische Erfindungen enthalten habe, gestohlen, und obwohl er bekannt gemacht, dafs ihm an dem Geld und den Gold- und Silbersachen nichts gelegen sei, und obwohl inzwischen das Jubeljahr gefeiert sei, nicht zurückgegeben. Er bittet Gott, die Herzen der Diebe zu rühren, dafs sie die Gefahr, in der ihre Seelen sich befinden, erkennen und das Gestohlene zurückgeben. Zuletzt fleht er, Gott möge ihm beständig Glauben, Hoffnung und Liebe verleihen, sodafs er in diesem Leben zum Ruhme Gottes und zum Nutzen des Nächsten arbeite und in der ewigen Glückseligkeit den Herrn lobe und anbete.

Aus der hierauf folgenden Vorrede an die Leser erfahren wir, dafs die Arbeit schon 1588 abgeschlossen war. Cataldi weist dann u. a. darauf hin, dafs Paciuolo in seiner *Summa* (fol. 8 recto) 9007199187632128 fälschlich für eine vollkommene Zahl erklärt habe, denn sie sei gleich $2^{26}(2^{27}-1)$ und $2^{27}-1$, d. i. 134217727 sei durch 7 teilbar. Zuletzt bittet er die Leser, denen die Werke von Carlo Bovilio (Charles de Bouvelles) bekannt seien, ihm Nachricht zu geben; dieselben enthielten eine Arbeit über vollkommene Zahlen; diese Arbeit wolle er prüfen und eventuell den Studierenden mitteilen, was für sie Nützliches darin vorkomme. Denselben Wunsch spricht er in Betreff des Werkes über Proportionen von Volunnio Rodolfo Spoletino (Rom 1516) aus.

Die Arbeit selbst beginnt mit der Definition der vollkommenen, der überschüssigen und der mangelhaften Zahlen und lehrt sodann die Auffindung der vollkommenen Zahlen nach Euklid IX, 36. Es sind danach bekanntlich die beiden Reihen

$$\text{(I)} \qquad 1,\quad 2\ ,\quad 2^2\quad ,\cdots,\qquad 2^n \text{ [1]}$$
$$\text{(II')} \qquad 1,\quad 1+2,\quad 1+2+2^2,\cdots,\quad 1+2+\cdots+2^n, \text{ d. i.}$$
$$\text{(II)} \qquad 1,\quad 2^2-1,\quad 2^3-1\ ,\cdots,\qquad 2^{n+1}-1$$

1) Der Kürze halber ist hier und im Folgenden die Potenzbezeichnung angewandt; Cataldi schreibt natürlich 1, 2, 4, 8, ···

zu bilden und die einander entsprechenden (die untereinander stehenden) Glieder zu multiplizieren. Wenn das genommene Glied von II eine Primzahl ist, so ist das Produkt eine vollkommene Zahl; ist aber das Glied von (II) zusammengesetzt, so hat das Produkt, wie Cataldi weiterhin darlegt, aufser den Divisoren, die einer Primzahl entsprechen würden, noch andere Divisoren, ist also eine überschüssige Zahl.

Cataldi sucht dann durch eine Reihe von Beispielen den Satz herzuleiten, dafs $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ nur dann eine Primzahl sein kann, aber nicht auch sein mufs, wenn $n + 1$ eine Primzahl ist. Er schliefst folgendermafsen:

Es ist $1 + 2 + 2^2 = 7$ durch 7 teilbar, und da $2^3, 2^4, 2^5$ bei der Division durch 7 wieder bezw. die Reste $1, 2, 2^2$ geben, so ist auch $2^3 + 2^4 + 2^5$, ebenso weiter $2^6 + 2^7 + 2^8$, u. s. w. durch 7 teilbar. Hieraus folgt, dafs jeder der Ausdrücke

$$2^3 - 1, \quad 2^6 - 1, \quad 2^9 - 1, \cdots$$

durch 7 teilbar ist, dafs mithin keiner derselben, mit Ausnahme des ersten, eine vollkommene Zahl liefern kann.

Weiter ist $1 + 2 = 3$ durch 3 teilbar, somit ist es auch $2^2 + 2^3$, ebenso $2^4 + 2^5$, u. s. w. Es ist daher jeder der Ausdrücke

$$2^2 - 1, \quad 2^4 - 1, \quad 2^6 - 1, \cdots$$

durch 3 teilbar, und keiner derselben, mit Ausnahme des ersten, kann eine vollkommene Zahl liefern.

Die Verbindung der beiden erhaltenen Resultate ergiebt, dafs die Summe der 6 ersten, die der 6 folgenden, u. s. w. Glieder von (I), ebenso die Summe der 12 ersten, die der 12 folgenden, u. s. w., die Summe der 18 ersten, die der 18 folgenden, u. s. w. Glieder von (I) sowohl durch 7 als auch durch 3 teilbar ist.

Ebenso folgt aus

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 &= 31, \\ 1 + 2 + \cdots + 2^6 &= 127, \\ 1 + 2 + \cdots + 2^{10} &= 2047 = 23 \cdot 89, \\ 1 + 2 + \cdots + 2^{12} &= 8191, \end{aligned}$$

dafs die Ausdrücke

$$\begin{array}{llll} 2^5 - 1, & 2^{10} - 1, & 2^{15} - 1 & \text{durch } 31, \\ 2^7 - 1, & 2^{14} - 1, & 2^{21} - 1 & \quad ,, \quad 127, \\ 2^{11} - 1, & 2^{22} - 1, & 2^{33} - 1 & \quad ,, \quad 23 \text{ und durch } 89, \\ 2^{13} - 1, & 2^{26} - 1, & 2^{39} - 1 & \quad ,, \quad 8191 \end{array}$$

teilbar sind, und so ergiebt sich, dafs nur diejenigen Ausdrücke $2^{n+1}-1$ Primzahlen sein, also zu vollkommenen Zahlen führen können, bei denen $n+1$ Primzahl ist, dafs aber, wie sich im Falle $n+1=11$ gezeigt hat, auch wenn $n+1$ Primzahl ist, $2^{n+1}-1$ trotzdem zusammengesetzt sein kann.

Man hat also in den Fällen, in denen $n+1$ eine Primzahl ist, die Summe der Reihe $1+2+2^2+\cdots+2^n$ zu bilden (das letzte Glied mit 2 zu multiplizieren und vom Produkte 1 abzuziehen) und zu untersuchen, ob diese Summe eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Das geschieht, indem man die Summe der Reihe nach durch alle Primzahlen dividiert, die kleiner als die Quadratwurzel[1]) aus derselben sind. Geht keine dieser Divisionen auf, so ist die Summe $2^{n+1}-1$ eine Primzahl und das Produkt $2^n(2^{n+1}-1)$ eine vollkommene Zahl.

Hieran schliefst Cataldi eine Reihe weiterer Bemerkungen:

Nicht blofs die Summe der beiden ersten, die der beiden folgenden Glieder, u. s. w. der Reihe (I) ist durch 3 teilbar, sondern überhaupt die Summe zweier beliebigen aufeinander folgenden Glieder, und zwar ist diese Summe gleich dem 3fachen des ersten der beiden Glieder.

Ebenso geht 7 in die Summe von je 3, 15 in die von je 4, 31 in die von je 5, 63 in die von je 6, 127 in die von je 7 aufeinander folgenden Gliedern von (I) auf.

Weiter ist 3 in der Summe der beiden ersten Glieder von (I) 1mal, in der Summe der beiden folgenden Glieder 4mal, in der Summe der beiden dann folgenden Glieder 16mal enthalten, u. s. w. Ebenso ist 7 in der Summe der 3 ersten Glieder 1mal enthalten, in der Summe der 3 folgenden Glieder 8mal, in der der 3 dann folgenden Glieder 64mal, u. s. w. Ähnlich verhält es sich mit den Divisoren 15, 31, 63 u. s. w.

Die Endungen der Glieder von (I) sind, wenn man das erste Glied unberücksichtigt läfst, 2, 4, 8, 6. Wenn das letzte Glied, das man nimmt, auf 8 endigt, so endigt die Summe auf 5, ist also eine zusammengesetzte Zahl und kann deshalb keine vollkommene Zahl liefern. Für die noch verbleibenden Endungen 2, 4, 6 endigt die Summe bezw. auf 3, 7, 1. Somit endigen die vollkommenen Zahlen auf 6 oder 8.

Nach diesen Vorbemerkungen, welche die Seiten 3—10 ausfüllen, berechnet Cataldi S. 11—22 die 7 ersten vollkommenen Zahlen. Um zu zeigen, dafs jede der Zahlen $2^{13}-1=8191$, $2^{17}-1=131071$,

1) Der Satz: Eine Zahl N ist eine Primzahl, wenn sie durch keine der Primzahlen teilbar ist, die $<\sqrt{N}$ sind, rührt nicht von Legendre her, wie man nach Bachmann, *Elemente der Zahlentheorie* S. 25 annehmen könnte, sondern ist schon von Leonardo Pisano angewandt worden (*Scritti*, ed. Boncompagni, Bd. I, S. 38).

$2^{19}-1=524287$, welche bezw. die 5ten, 6ten, 7ten vollkommene Zahl liefern, eine Primzahl sei, ist die erste durch die Primzahlen unter $\sqrt{8191} \sim 91$, die zweite durch die unter $\sqrt{131071} \sim 363$, die dritte durch die unter $\sqrt{524287} \sim 725$ zu dividieren. Diese Divisionen sind abgedruckt und nehmen natürlich sehr viel Raum ein. Bei der Untersuchung der dritten Zahl lehrt Cataldi einen Rechenvorteil. Da nämlich die dritte Zahl dadurch entsteht, dafs man die zweite mit 4 multipliziert und zum Produkt 3 addiert, so wird der Rest der dritten Zahl für irgend einen Divisor — und nur um den Rest, nicht auch um den Quotient handelt es sich hier — dadurch erhalten, dafs man den Rest der zweiten Zahl für denselben Divisor mit 4 multipliziert und zum Produkt 3 addiert. Die Divisionen der dritten Zahl durch die auch bei der zweiten benutzten Divisoren — der gröfste derselben ist 359 — lassen sich also abkürzen; die Divisionen mit den folgenden Primzahlen $367, \cdots, 719$ sind dann in gewöhnlicher Weise zu vollziehen. Ich erwähne noch, dafs die Darstellung S. 18 durch ein grofsgedrucktes „Laus Deo Semper" unterbrochen ist, und dafs Cataldi S. 20 vor dem ausführlichen Abdruck der Divisionen von 524287 durch die Primzahlen $367, \cdots, 719$, nach Ermittlung der 7ten vollkommenen Zahl die Studierenden auffordert, weitere derartige Zahlen auf die dargelegte Weise zu suchen „mediante la gratia di Dio, al quale eternamente sia ogni laude e gloria".

S. 23—27 werden die Divisoren-Summen einiger überschüssigen Zahlen ($2096128 = 1024 \cdot 2047$, $130816 = 256 \cdot 511$, $2016 = 32 \cdot 63$, $8386560 = 2048 \cdot 4095$) berechnet. Weiter enthalten die S. 28—40 eine Tabelle *aller* Zahlen von 2 bis 750 mit ihren sämtlichen Divisoren. Die Primzahlen dieses Bereichs sind dann zum Schlufs zusammengestellt, und mit einem „Laus Deo" schliefst S. 40 die Schrift.

Es folgt S. 41—48 noch ein Anhang. Cataldi hat die Abhandlung des Bouvelles über vollkommene Zahlen gelesen. Dieselbe steht fol. 171—180 eines der in Paris 1510 durch Henricus Stefanus gedruckten Folio-Bände des Bouvelles. Cataldi hat in der Arbeit nichts gefunden, was der Rede wert wäre, zumal Bouvelles seine Behauptungen nicht beweist, und er würde über die Arbeit schweigen, wenn sie nicht geradezu Falsches enthielte, und davon müsse er die Anfänger benachrichtigen, damit sie nicht im Vertrauen auf das Ansehen eines so berühmten Mannes irrige Ansichten in sich aufnehmen. Er widerlegt dann durch Beispiele eine ganze Reihe von Aussprüchen des Bouvelles[1]),

1) Die Schrift des Bouvelles war mir nicht zugänglich, wohl aber die in der Bibliotheca Mathematica 1896, p. 28 erwähnte Arbeit von M. Fontès, *Caroli Bovilli liber de numeris perfectis.*



die, wenn CATALDI die Wahrheit berichtet, allerdings recht befremdlich sind:

Die Summe $2^{n+1}-1$ ist immer eine Primzahl, wenn sie auf 1 oder 7 endigt.

Alle auf 4 oder 6 endigenden Potenzen von 2 liefern vollkommene Zahlen. U. s. w.

Ferner macht CATALDI darauf aufmerksam, dafs BOUVELLES den von ihm ausgesprochenen Satz: „Jede vollkommene Zahl, mit Ausnahme von 6, giebt bei der Division durch 9 den Rest 1" ohne Beweis gelassen habe. Er selbst giebt dann einen richtigen, aber sehr schwerfällig abgefafsten Beweis[1]), der sich kurz so ausdrücken läfst:

Nach der Definition ist $2^n(2^{n+1}-1)$ eine vollkommene Zahl für jedes n, für welches $2^{n+1}-1$ eine Primzahl ist. Nun ergeben sich für den Divisor 9 die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Reste:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2^n	1	2	4	8	7	5	1	2	4	8	7	...
$2^{n+1}-1$	1	3	7	6	4	0	1	3	7	6	4	...

Da $2^{n+1}-1$ eine Primzahl sein soll, so fallen die Reste 6, 0, 3 (mit Ausnahme des dem Falle $n=1$ entsprechenden Restes 3) weg. Es bleiben also für $2^{n+1}-1$ im Falle vollkommener Zahlen bei der Division durch 9 nur die Reste 1, 7, 4, denen als Reste von 2^n bezw. 1, 4, 7 entsprechen, und da sowohl $1\cdot 1$ als auch $4\cdot 7$ für den Divisor 9 den Rest 1 liefert, so ist der Satz bewiesen. Auch der Anhang schliefst mit einem „Laus Deo".

Dann kommt ein Druckfehler-Verzeichnis, und zuletzt wird die Tabelle der Zahlen mit ihren Divisoren von 751 bis 800[2]) fortgesetzt, worauf zum allerletzten Male „Laus Deo" gedruckt ist.

Das ist der Inhalt der Schrift, von der CANTOR (*Vorlesungen* II², S. 771) mit Recht sagt, dafs sie mehrere Jahrhunderte früher genau ebenso hätte verfafst werden können, da nichts neues darin zu finden sei. Freilich ist es sehr anzuerkennen, dafs sie den Gegenstand vollständig fehlerfrei und nicht ohne Geschick behandelt, auch dafs CATALDI den erwähnten Satz von BOUVELLES mit einem Beweise versehen hat. Einen wirklichen Fortschritt hat die Theorie der vollkommenen Zahlen erst durch FERMAT erfahren. Derselbe spricht 1640 in einem Briefe an MERSENNE (*Varia*

1) Hiernach ist die Bemerkung in CANTORS *Vorlesungen* II², S. 385 zu modifizieren.

2) Nicht bis 1000, wie CANTOR (*Vorlesungen* II², S. 771) nach LIBRI IV, S. 91 berichtet. Es müfste denn noch ein Nachtrag existieren, welcher in dem Exemplar der Königl. Hof-Bibliothek zu Berlin fehlte.

Opera mathematica S. 176 = *Oeuvres* T. II, p. 195) drei Sätze aus, die er gefunden und nicht ohne Mühe bewiesen habe, und auf welchen er ein grofses Gebände aufzurichten hoffe. Wichtig ist namentlich der dritte dieser Sätze, da er erheblich die Anzahl der Divisionen verringert, die man auszuführen hat, um zu erkennen, ob $2^p - 1$ eine Primzahl sei oder nicht. Der Satz lautet: „Wenn p eine Primzahl ist, so ist $2^p - 1$ nur durch Primzahlen von der Form $2kp + 1$ teilbar, wo k eine ganze Zahl bedeutet." Um z. B. mit Hülfe dieses Satzes $2^{11} - 1 = 2047$ zu prüfen, hat man die Division nur mit den Primzahlen der Form $22k + 1$, die kleiner als $\sqrt{2047} \sim 45$, also nur mit 23 zu versuchen; es ergiebt sich $2047 = 23 \cdot 89$, und dafs $2^{13} - 1 = 8191$ eine Primzahl ist, erkennt man daran, dafs es weder durch 53 noch durch 79 teilbar ist; ebenso erfordert die Untersuchung von 131071 nur die Division mit 103, 137, 239 und 307.

Auffallend ist bei Cataldi die häufige Anrufung Gottes.[1]) Nach Libri IV, S. 90 hat er auch den ersten 1602 unter dem Namen *Perito Annotio* veröffentlichten Teil seiner *Pratica aritmetica* Gott gewidmet. Libri sagt, er sei von einer tiefen Frömmigkeit gewesen, aber die Äufserungen dieser Frömmigkeit sind in fast allen seinen Schriften so übertrieben, dafs sie wahrhaft widerwärtig werden. Man lese z. B., was er in der Einleitung zu den 1613 in Bologna erschienenen *Due lettioni date nella Accademia erigenda* sagt. Bei einem Geistlichen mag dergleichen am Platze sein, aber bei einem Mathematiker ist es schwer, den Gedanken abzuweisen: Er spielt den Frommen, er spricht salbungsvoll, um sich bei den Machthabern in Gunst zu setzen und äufsere Vorteile zu erzielen.

Einen unangenehmen Eindruck macht auch das Prahlen mit Schriften, die er schon verfafst habe oder noch verfassen werde; das soll dem Senat imponieren. Die immer wieder vorgebrachten Klagen über seine körperliche Schwäche sollen einerseits Mitleid, andererseits Bewunderung über die trotz dieser Schwäche vollbrachten Leistungen und die Hoffnung auf grofsartige Werke erwecken, die von einem solchen Manne nach seiner Wiederherstellung zu erwarten seien. So versäumt Cataldi nichts, was ihn bei den einflufsreichen aber wenig sachverständigen Männern der Stadt in Gunst setzen kann. Er ergreift das Wort in Streitfragen, die längst abgethan sind[2]), und macht in salbungsvollem Stil und scheinbar im Interesse der Studierenden auf Fehler längst verstorbener Schriftsteller

1) Es war das durchaus nicht eine Sitte der Zeit. Ich habe eine ganze Reihe Bücher daraufhin angesehen und bei den meisten nichts derartiges, bei einigen wenigen nur am Ende „Laus Deo" gefunden.

2) Scaligers *Cyclometrica elementa* waren 1594 erschienen; gegen ihn waren Jacob Christmann 1595, van Roomen 1597, Ludolph van Ceulen vor 1597 aufgetreten;

aufmerksam, deren Bücher in die Hand zu nehmen, keinem Anfänger in den Sinn gekommen wäre.[1]) Genug, je mehr man sich mit CATALDI beschäftigt, um so mehr befestigt sich die Überzeugung, dafs er ein Streber im schlimmsten Sinne des Wortes gewesen ist.

Von einem solchen Manne kann es nun auch nicht Wunder nehmen, dafs er die Erfindung seines Vorgängers BOMBELLI, ohne denselben zu nennen, in einer besonderen Schrift breit getreten hat. Dafs diese Erfindung sein Eigentum sei, sagt er freilich nicht selbst; das hat erst LIBRI gethan, der sogar eine schon von HERON angewandte und von vielen italienischen Mathematikern dargestellte Methode der Quadratwurzel-Ausziehung als von CATALDI herrührend erklärt hat.

VIETA, der ebenfalls SCALIGER bekämpft hatte, war 1603, CLAVIUS 1612 gestorben und — 1620 kam CATALDIS *Diffesa d'Archimede.*

1) Die Schrift des BOUVELLES, die 1510 erschienen war, greift er 1603 an. BOUVELLES war schon 1553 gestorben, und es ist nicht anzunehmen, dafs Anfänger auf einer italienischen Universität die Schriften dieses Franzosen noch studiert haben sollen.

Galileis Atomistik und ihre Quellen.

Von Ernst Goldbeck in Berlin.

Galileis Atomistik, die uns im ersten Tage der *Discorsi* mitgeteilt wird, verdient das Interesse des Historikers besonders deswegen, weil sie die erste derartige in rein physikalischer Absicht aufgestellte Lehre der Neuzeit ist. Die Ansätze einer Atomistik, die wir bei Nicolaus v. Cusa und Giordano Bruno finden, entspringen, wie deren Systeme überhaupt, dem metaphysischen Bedürfnis und können nur in beschränkter Weise mit Galileis Lehre in Parallele gesetzt werden. Andrerseits scheint von einem besonderen Einflufs dieser Gedanken Galileis auf die Folgezeit nicht die Rede sein zu können. Es mag dies daran liegen, dafs er alle Probleme, die die Antike und das Mittelalter an die Atomistik angeknüpft hatten, ineinandergeflochten und so ein Gewebe hergestellt hatte, das dem eindringenden Verständnis die erheblichsten Schwierigkeiten entgegensetzte, sowie auch daran, dafs er manche entscheidende Wendung nicht allzudeutlich heraustreten liefs. Daher ist das Interesse an dieser Doktrin ein vorwiegend historisches. Gelingt es aber die einzelnen Fäden zu trennen, so ergiebt sich der Vorteil, dafs hier in engem Bezirk die Verbindungen zwischen Antike, Mittelalter und Neuzeit klar vor Augen treten und die Einflüsse deutlich werden, die sich in Galileis Denken kreuzen.

Galileis Atomistik ist schon in Kurd Lasswitz' eindringendem und umfassendem Buch über *Die Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton*[1]) Gegenstand einer ausführlichen Erörterung geworden. Aber diese Erörterung steht mehr im Dienste eines gewissen erkenntniskritischen Standpunktes, als des rein historischen Interesses, und so kommt es, dafs mancherlei Hinweise, die sich in dem grofsen Werke leicht auf Galilei hätten beziehen lassen, dennoch schliefslich, wo die Sprache auf ihn kommt, unerwähnt bleiben, so dafs die Arbeit einer Analyse in die einzelnen historischen Beziehungen trotz aller dankenswerten Unterstützung durch Lasswitz' Untersuchungen schliefslich doch von vorn an zu leisten war.

1) Hamburg und Leipzig, 1890, Bd. 2, S. 37 ff.

Wann und wie sich GALILEI zur Atomistik bekehrt hat, wird wenigstens aus den bis jetzt vorliegenden Quellen kaum zu entscheiden sein. Die grofse in der nationalen GALILEI-Ausgabe[1]) als „Juvenilia“ bezeichnete Kompilation vieler kurz und bündig gefafster Ansichten zahlreicher antiker und mittelalterlicher Denker über Probleme der Naturphilosophie thut auch der Lehren LEUCIPPS und DEMOCRITS einige Male Erwähnung, jedoch immer nur in wenigen Zeilen und darunter einmal in ablehnender Weise. Aber die „Juvenilia“ sind keine eigene Arbeit GALILEIS. Aus ihnen ist kein Aufschlufs über persönliche Meinungen des jungen GALILEI zu erwarten. Zur Zeit der von VENTURI um das Jahr 1590 angesetzten Abhandlungen „de motu“[2]) ist allerdings, wie wir später wahrscheinlich machen werden, eine Hinneigung zu atomistischen Anschauungen, vielleicht schon im Gefolge der allgemeinen Abneigung gegen ARISTOTELES zu vermuten. Jedenfalls lag die Möglichkeit, aus antiken Darlegungen sich über die atomistische Lehre zu unterrichten, bequem genug da. Wenn nicht anders konnte GALILEI aus ARISTOTELES' Polemik, die ihm sicher bekannt war, vielleicht auch schon früh aus LUCREZ sich ausreichend orientieren. Aber Genaueres und zeitliche Festlegungen über den ersten Eintritt in die atomistische Doktrin, sowie über die innere Angliederung der zugehörigen Probleme und die selbständige Weiterbildung zu ermitteln, dürfte recht schwierig sein. Verstreute Spuren können so gedeutet werden, dafs die Beschäftigung mit diesen Ideen nie völlig abrifs. Eine zusammenhängende Darstellung erfolgte erst, wie schon gesagt, gegen das Lebensende im ersten Tag der *Discorsi* (1638), aber auch da nicht ohne merkliche Vorsicht, die manche energische Wendung unterdrückt haben mag, eine Vorsicht, die nicht allein der Schwierigkeit des Stoffes, sondern auch besonders der Gefährlichkeit der vorgetragenen Ansichten der Kirche gegenüber entsprang.

GALILEIS Darstellung selbst ist dem Charakter des Dialogs entsprechend keine systematische. Sie wird durch die Bedürfnisse der inneren Konsequenz, aber auch durch das Bestreben nach leichter Fafslichkeit und lebensvoller Abwechslung beeinflufst. Die Analyse mufs dieses kunstvolle, aber undurchsichtige Gewebe auflösen. Mit den Fäden, die dann in die Vergangenheit zurückleiten werden, treten zugleich auch die Einzelheiten heraus, die GALILEI von den Denkern vor ihm übernahm. Diese sich von selbst herausstellende Sonderung in Problemgruppen der Einteilung unserer Untersuchung zu Grunde zu legen, mufste schon deswegen ratsam er-

1) *Le opere di* GALILEI. Edizione nazionale I (Firenze 1890).

2) VENTURI, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di* GALILEO GALILEI, p. II, p. 330 (das Buch war uns nicht zugänglich). Die Abh. „de motu“ s. GALILEI, *Opere*, ediz. naz. I, p. 243—419.

scheinen, als so vielleicht am ersten der Eindruck der Dunkelheit beseitigt wird, den Galileis eigene Darstellung trotz aller augenfällig von ihm aufgewendeten Kunst hervorruft.

1. Das Vakuum.

1. Die Atomistik fällt mit der Leugnung eines Vakuums. Daher hatte Aristoteles in seinem Kampfe gegen die mechanisch-atomistische Naturbetrachtung der Widerlegung eines leeren Raumes besondere Aufmerksamkeit geschenkt.[1])

Bereits die oben erwähnten Abhandlungen Galileis „de motu“ zeigen eine energische Bekämpfung der von Aristoteles gegen das Vakuum ausgesprochenen Gründe. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs demgemäfs schon damals Galilei das Vakuum in irgend einer Gestalt für möglich hielt. Wer die Gründe eines entschiedenen Gegners der Atomistik seinerseits an einem entscheidenden Punkt zu widerlegen trachtet, wird selbst leicht in den Verdacht kommen Anhänger einer Atomenlehre zu sein. Aber Galilei bekennt sich auf jenem Standpunkt gar nicht und auch späterhin nur vorsichtig zu der Lehre Demokrits. Eine sichere Entscheidung, ob er schon zu Anbeginn seines selbständigen Forschens in das feindliche Lager übergegangen sei, läfst sich nicht gewinnen. Zu beachten bleibt allerdings, dafs er in den *Discorsi*, also beinahe fünfzig Jahre später, in ganz ähnlichen Wendungen und diesmal deutlich in atomistischer Absicht auf die aristotelischen Einwände gegen das Vakuum ablehnend zurückkommt.

Was die Einzelheiten dieser Widerlegung der aristotelischen Angriffe gegen das Leere anlangt, so gehören sie nicht in den Rahmen dieser Untersuchung. Die blofs aus Begriffen abgezogenen, in der Konsequenz des Systems liegenden Einwendungen interessieren Galilei sowenig zu Beginn seiner Laufbahn, wie an ihrem Ende. Er würdigt nur die der Bewegungslehre entnommenen Gesichtspunkte einer eingehenden Betrachtung. Da aber diese Überlegungen mehr für die Bewegungslehre ins Gewicht fallen, als für die Atomistik, so mufs es genügen, hier den Grundgedanken anzugeben. Galilei giebt ihn folgendermafsen wieder (gekürzt): Ein und derselbe Körper bewegt sich in verschieden dichten Medien mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten, so dafs wenn die Dichtigkeit des Wassers 10mal so grofs ist, als die der Luft die Geschwindigkeit in der Luft 10mal gröfser sei, als die im Wasser. Dementsprechend mufs, da die Dichtigkeit des Vakuums 0 ist, jeder Körper

1) In der Physik.

der im erfüllten Medium in einer gewissen Zeit eine gewisse Strecke zurücklegt, sich im Vakuum momentan bewegen etc. Übrigens weicht diese Wiedergabe von der des Aristoteles einigermafsen ab. Dessen Darstellung ist zwar im Wesen dieselbe, ist jedoch in der Form viel verklausulierter und die Schlufswidersprüche sind anders ausgedrückt. Die Form, die Galilei der aristotelischen Widerlegung giebt, entstammt gewissen Kommentaren der aristotelischen Physik. Ob, wenn es ein Vakuum giebt, sich ein Körper in der Zeit oder momentan darin bewegen würde, ist eine alte Frage der Scholastik. Galilei vermag nun die Prämisse bereits nicht zuzugeben, wonach die Geschwindigkeit der Dichtigkeit des Mediums umgekehrt proportional sein soll, und damit ist die ganze Widerlegung hinfällig. Übrigens geht sein Interesse an dieser Stelle sowohl in „de motu" als in den *Discorsi* weit mehr auf die hierher gehörigen Fragen der Bewegungslehre, als auf die Atome und ihre Hohlräume. Denn, wenn auch wirklich eine Bewegung im Vakuum nicht stattfände, so würde doch die Annahme eines Vakuums dadurch nicht widerlegt. Daher entsteht jetzt die Frage, wie stellt sich eigentlich Galilei zur Existenz eines Vakuums?

2. Galilei knüpft seine Auseinandersetzungen über die Konstitution der Materie in den *Discorsi* an das Problem der Kohärenz der Körper an. Er führt die Kohärenz auf zwei Ursachen zurück, auf die Kraft „des vielbesprochenen Abscheus der Natur einen leeren Raum zuzulassen und, wenn diese nicht genügen sollte, auf ein zweites Bindemittel, einen Leim, der die Teile des Körpers fest zusammenhält".[1])

Zwei plangeschliffene Marmor-, Glas- oder Metallplatten haften aneinander und setzen ihrer Trennung beträchtlichen Widerstand entgegen. Diese Erscheinung führt Galilei auf den „horror vacui" zurück. „Die Natur will selbst auf kurze Zeit den leeren Raum nicht zulassen, der zwischen beiden Platten entstehen würde, bevor der Zusammenflufs der umgebenden Luftteilchen denselben einnehmen und ausfüllen konnte."[2])
Dieselbe Kraft, die hier zwischen den beiden Platten wirkt, bedingt auch das Zusammenhalten der Teile eines festen Körpers. Aber diese Kraft des „horror vacui" kann gemessen werden und zeigt sich dann kleiner als die Kohärenz der festen Körper. Sie kann also nur eine Teilursache sein. Daher ist noch das zweite Bindemittel nötig. Dieses ist allerdings kein Leim, vielmehr ist es wieder kein anderes als ein Vakuum, freilich aber

1) *Op.* XIII p. 15; Ott. p. 11. Die Ausgabe von Albèri bezeichnen wir als *Op.*, die Übersetzung der *Discorsi* von v. Oettingen (Ostwalds Klassiker d. exact. Wiss. 11) mit Oett. Wir citieren aus dieser hier und da verbesserten Übersetzung des „ersten Tages".

2) *Op.* l. c.; Oett. p. 12.

kein ausgedehntes, endliches, sondern ein intramolekulares, sehr kleines. Die Körper bestehen nämlich aus sehr vielen, sehr kleinen Teilchen, die durch entsprechende Vakuen getrennt sind. Diese Vakuen bilden das zweite Bindemittel.[1])

Zwei Faktoren werden also hier herangezogen: der „horror vacui“, d. h. der Abscheu der Natur ein endliches Vakuum zuzulassen; dann die Kraft der kleinen Vakuen, die das zweite Bindemittel ausmacht und die Festigkeit der Körper erklären soll, soweit das endliche Vakuum dies nicht zu leisten vermag.

3. Die Unterscheidung des endlichen Vakuums und des kleinen intramolekularen ist nicht Galileis Einfall. Sie ist ihm aus der Antike überkommen und zwar aus des Heron von Alexandria *Pneumatica*. Heron sagt in den „Druckwerken“ folgendes: Es giebt Forscher, welche überhaupt jedwedes Vakuum entschieden in Abrede stellen, andere hingegen vertreten die Behauptung, es gebe von Natur zwar kein kontinuierliches Vakuum (*ἄθρουν κενόν*), aber doch ein in kleinen Teilchen in der Luft, der Feuchtigkeit, dem Feuer und andern Körpern verteiltes. Die letzte Annahme verdient am meisten unsern Beifall“.[2]) Diese Aufstellung Herons gehört dem Physiker Straton an (3. Jahrh. v. Chr.).[3]) Dafs aber Galilei Heron gekannt hat, geht aus dem bei Venturi[4]) abgedruckten Brief Galileis über einen bei Heron erwähnten Leuchter hervor. Aufserdem befafs Galilei die italienische Übersetzung der *Pneumatica* des Heron von Aless. Giorgi.[5]) Eindringender als diese Notizen wird der Verlauf unserer Untersuchung Galileis Abhängigkeit von Heron aufzeigen.

4. Zunächst ist Galileis Stellung zum grofsen oder endlichen Vakuum zu kennzeichnen. Aristoteles hatte, wie wir sahen, jedwedes Vakuum für unmöglich erklärt und Galilei hatte diese Meinung, soweit sie sich in einem besonders exakt scheinenden Argument aufthat, bekämpft. Er schliefst diese Widerlegung mit den merkwürdigen Worten: „Also einigen

1) *Op.* XIII p. 23 ff.; Oett. p. 19 ff.

2) Heronis *Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. I.* Herons *von Alexandria Druckwerke und Automatentheater, griechisch und deutsch herausg. v.* Wilhelm Schmidt, Leipzig 1899 [citiert als Schm. I], S. 5, Z. 5.

3) Nach den Ausführungen von H. Diels, *Über das physikalische System des Straton*; Sitzungsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. in Berlin 1893, S. 110.

4) Venturi, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di Galileo Galilei.* Modena 1818, p. 12. Vergl. W. Schmidt, *Heron v. Alexandria im 17. Jahrh.*; Abh. z. Gesch. d. Mathem. 8, Leipz. 1898, p. 206.

5) Vergl. *La libreria di Galileo Galilei descritta ed illustrata di* Antonio Favaro. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem., 19, 1886, p. 271 = Nr. 271 des Katalogs: *Spiritali di Herone Alessandrino ridotti in lingua volgare da Alessandro Giorgi da Urbino* (1582? oder 1592).

wir uns dahin, dafs ein solches Argument nichts gegen die Annahme des Vakuums bringt; und wenn letzteres auch der Fall wäre, so würden doch nur jene grofsen Vakuen zerstört, welche weder ich, noch, wie ich glaube, die Alten als natürlich sich darbietend annahmen, obwohl sie vielleicht durch Kraft hervorgebracht werden können, wie aus manchen Versuchen folgt, die vorzubringen zu weitläufig sein dürfte.“[1])

Aus diesen Worten geht hervor, dafs Galileis Untersuchungen mit antiken Anregungen in Znsammenhang standen, dafs ein grofses Vakuum nach seiner Meinung zwar in der Natur nicht vorkomme, dafs es aber auf experimentellem Wege „gewaltsam, durch Kraft“ hergestellt werden könne, und dafs ihm solche Experimente bekannt waren. Es ist sehr bedauerlich, dafs Galilei sich nicht des Genaueren hier geäufsert hat, damit man ermessen könne, inwieweit er thatsächlich einem Otto von Guericke vorgegriffen habe.

Vielleicht aber sind seine Kenntnisse nicht nennenswert über die antiken Mitteilnngen hinausgegangen. Vergleicht man nämlich Herons Darlegungen, so ergiebt sich deutlicher, was Galilei eigentlich sagen will. Heron behauptet zunächst zu Eingang der *Pneumatica* an der bereits citierten Stelle, „es gäbe von Natur kein kontinuierliches Vakuum“. Im Verlauf der weiteren Darlegungen zeigt er dann, dafs ein solches sich künstlich herstellen lasse. „Nimmt man ein sehr leichtes Gefäfs mit enger Mündung, hält es an den Mnnd, saugt die Luft aus nnd läfst es dann los, so bleibt das Gefäfs an den Lippen hängen; denn das Vakunm zieht das Fleisch an, um den leeren Raum wieder zu füllen. Daraus ergiebt sich für das Gefäfs ein kontinuierliches Vakuum. Dies kann man noch anderweitig nachweisen. Will man die (sogenannten) medizinischen Eier, welche von Glas und enghalsig sind, mit einer Flüssigkeit füllen, so saugt man mit dem Munde die darin enthaltene Luft auf, hält ihre Mündung mit dem Finger zu und setzt sie umgekehrt in die Flüssigkeit. Läfst man dann den Finger los, so steigt das Wasser in das entstandene Vakuum hinauf, obwohl die Bewegung der Flüssigkeit nach oben nicht naturgemäfs ist.“[2]) Im weiteren Verlanf seiner Darlegungen sagt Heron: „Diejenigen, welche überhanpt ein Vakuum lengnen, mögen dafür wohl mancherlei Beweisgründe ersinnen können nnd in der Theorie vielleicht einigermafsen überzeugen, weil kein experimenteller Gegenbeweis vorliegt. Wird jedoch auf Grund wahrscheinlicher, sinnlich wahrnehmbarer Vorgänge gezeigt, dafs eine endliche Leere nur auf künstlichem Wege herbeigeführt werden kann, dafs ein Vakunm zwar natürlich ist, aber dafs es nur fein verteilt

1) *Op.* XIII p. 70; Oett. p. 61.
2) Schm. I p. 9.



vorkommt und dafs bei einer Verdichtung die Moleküle an die Stelle der feinverteilten Vakuen treten, so werden Die keine Ausflucht mehr haben, deren Hypothesen sonst die Wahrscheinlichkeit für sich hatten.“ Heron tritt hier in dem berechtigten Selbstgefühl des Physikers nnd Technikers den Philosophen, wie z. B. Aristoteles, gegenüber, die aus logischen Argumenten das Leere glaubten bekämpfen zu können. Er gelangt so zu dem mehrfach vorgetragenen Schlufs fast wörtlich, wie Galilei: „Wir können behaupten, dafs es ein kontinuierliches Vakuum ohne Einwirkung einer äufseren Kraft von Natur nicht giebt, und dafs andrerseits ein solches bisweilen künstlich herbeigeführt wird.“ Ziehen wir hierzu noch die kleinen Vakna, mit denen sich Heron ansführlich beschäftigt, und denen wir weiter unten nnsere Aufmerksamkeit zuzuwenden haben werden, so können wir seine Meinung in folgende Thesen zusammenfassen:

1. Es giebt kein natürliches kontinuierliches Vakunm,
2. Es giebt ein solches künstlich durch äufsere Kraft,
3. Die Körper bestehen aus kleinen Teilchen, zwischen denen feinverteilte Vakuen liegen. Diese kleinen Vaknen sind natürlich.

5. So spielen also bei Heron wie bei Galilei zwei Arten von Vakuen eine Rolle, das endliche und die sehr kleinen. Aber Galilei benntzt das endliche anders als Heron. Dieser führt nur einige Erscheinungen, die wir der Wirkung des Luftdrucks zuschreiben, auf die Kraft des künstlichen Vaknnms zurück, während Galilei das endliche Vakunm oder den stets an seine Stelle tretenden Abscheu der Natur, wie schon gesagt, benntzt, um wenigstens zum Teil die Kohärenz der festen Körper zu erklären.

Die Anregung zu dieser Auffassung ging von dem erwähnten Versuch der Adhäsionsplatten aus. Dieser Versuch mitsamt seiner Deutung ist Galilei wahrscheinlich aus Kommentaren zum Aristoteles bekannt geworden.[1])

Uns darf hier Galileis Stellungnahme zum „horror vacui“ nur insoweit beschäftigen, als über ihn hinweg der Weg zu der eigentlichen Atomistik zu bahnen ist. Da ist nun zunächst auffallend, dafs Galilei überhaupt mit dem Begriff eines „horror vacui“ hantiert. In sein klares Denken, das der Einmischung aller psychischen Potenzen in den Naturverlauf abhold war, pafst ein solcher Erklärungsgrund nicht hinein. Es ist für jeden, der Galileis Denken einigermafsen kennt, überflüssig hierfür Beweise zu bringen. Es möge genügen darauf hinzuweisen, wie deutlich diese

1) Er findet sich z. B. in den *Commentarii collegii Conimbricensis in octo libros physicorum Aristotelis* von 1610 vol. II, p. 90 und nach der Art des Vortrages daselbst wahrscheinlich schon früher, doch sind uns weitere Kommentare, die den Versuch enthielten, nicht in die Hände gekommen.

ablehnende Tendenz in den *Discorsi* wenige Seiten hinter der ausführlichen Beschäftigung mit den „horror vacui" bei anderer Gelegenheit hervortritt. Der Peripatetiker SIMPLICIO sagt da im Verlauf des Dialogs: Ich mufs fast lachen über die Antipathie des Herrn SALVIATI (GALILEI) gegen das Wort Antipathie, da er es durchaus nicht nennen will, obwohl es so gut alle Schwierigkeiten lösen könnte.[1] ... Nun mag ja in manchen anderen Fällen die Frage schwer zu entscheiden sein, ob GALILEI wirklich überall zu einer rein mechanischen Betrachtung des Naturverlaufs durchgedrungen ist. Hier liegt jedenfalls die Sache klar.

Bald nachdem nämlich GALILEI den „horror vacui" eingeführt hat, um die Kohärenz der Teile fester Körper zu erklären, geht er dazu über „die Kraft des Vakuums von andern Kräften zu sondern und zu messen". Es genügt für unsern Zweck hervorzuheben, dafs diese Sonderung und Messung in der bekannten an Saugpumpen gemachten Erfahrung gipfelt, dafs der „horror vacui" nur einem Wassercylinder von 18 Ellen Höhe das Gleichgewicht hält, ganz gleich wie grofs der Querschnitt des Cylinders sei.[2] Hiermit beginnt an die Stelle des unbestimmten Hin- und Herredens über den „horror vacui" die quantitative Bestimmung zu treten. Diese ersetzt die ursprünglich in der Bezeichnung liegende Vorstellung des Abscheus einer persönlich gedachten Natur durch einen exakten Wert und benimmt so dem Ausdruck mit seinem eigentlichen Sinn seine Gefährlichkeit für das mechanische Denken. Genau dasselbe vollzieht im Grunde GALILEI, wenn er über die Untersuchung des Wesens der Schwerkraft bewufst hinweggeht, um in den Fallgesetzen zu quantitativen Bestimmungen zu gelangen. An dieser Stelle leistet GALILEI Eigenes, hier thut er einen wichtigen Schritt auf ein modernes Denken hin, indem er die Kreise seiner Vorläufer überschreitet.

6. Zugleich gewinnt er mit der quantitativen Bestimmung des „horror vacui" eine Möglichkeit, diesen zu eliminieren und zu dem zweiten Bindemittel der Körper vorzudringen. Einem Wassercylinder von 18 Ellen Länge hält der „horror vacui" das Gleichgewicht. Man kann diesen Cylinder auffassen als an seinem oberen Ende in der Pumpe befestigt. Während des Pumpens wird der Cylinder immer länger und länger, bis er diejenige Grenze erreicht, über welche hinaus er zerreifst, wie ein Seil, das an seinem oberen Ende aufgehängt ist und seinem Eigengewicht erliegt. Nun hat aber das Wasser, anders als das Seil, gar keine eigene Kohärenz[3]; es wird allein durch den Widerstand des Vakuums festgehalten. Ein Marmorcylinder, den man ähnlich aufhängen wollte, würde vielmehr Gewicht

1) *Op.* XIII p. 74; OETT. p. 65.

2) diciotto braccia, *Op.* XIII p. 21; OETT. p. 17.

3) Über diese These hat GALILEI viel nachgedacht. Man vergleiche den *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono*; *Op.* XII p. 57 ff.

tragen können, als der gleiche Wassercylinder. Folglich sind seine Teile noch durch ein zweites Bindemittel aneinander gekettet.

7. Dieses zweite Bindemittel wird nun von den kleinen feinverteilten Vakuen hergegeben: Wie können aber diese zahlreichen zwischen den kleinsten Teilen der Körper eingelagerten Hohlräume die Ursache der Kohärenz der festen Körper werden?

Hier meint nun Galilei, „die kleinen Vakuen zögen sich gegenseitig an" und verhinderten so die Trennung der kleinsten Teile, zwischen denen sie gelagert sind. Würden an einem Körper, z. B. Gold, die Vakuen ausgefüllt, etwa durch Eindringen von Feuerteilchen, so verschwände die Festigkeit des Körpers mit den Vakuen und ihrer gegenseitigen Anziehung, denn die kleinsten Teilchen würden frei beweglich und der Körper wäre geschmolzen; zögen dann die Feuerteilchen wieder ab, der Körper würde kalt, so stellten sich die Vakuen wieder her, ihre Anziehung träte wieder in Kraft und das Metall wäre von neuem fest geworden.

Aber von einer „Anziehung" der Vakuen zu sprechen, ist an und für sich, besonders jedoch bei Galilei befremdlich. Galilei wendet sich bewufst und manchmal sogar mit Heftigkeit gegen die Vorstellung einer Anziehung, wie gegen alle „qualitates occultae" überhaupt. Er wundert sich darüber, dafs ein Gelehrter von der Bedeutung Keplers sich derartige Begriffe — nämlich bei Gelegenheit seiner Ausführungen über die Gravitation — bedienen konnte. Desto sonderbarer mutet es uns an, dafs er hier selbst eine Attraktion der Vakuen einführt.

Allerdings lag für ihn hier keine geringe Schwierigkeit vor. Die endlichen Vakuen, denen der „horror vacui" entsprang, zeigten eine deutliche, wenn auch mechanisch damals rätselhafte Kraftwirkung. Diese konnte aber bei den kleinen Vakuen nicht herangezogen werden, denn diese sind von anderer Art als die grofsen. Sie sind natürlich, während jene künstlich hergestellt waren. Hierin lag für Galilei die Schwierigkeit. Er hatte für die kleinen Vakuen keine angebbare Kraft zur Verfügung, denn über die aristotelische Unterscheidung des „Natürlichen" und „Gewaltsamen" hat sich Galilei nie völlig erhoben.[1])

Dafs Galilei den Ausdruck „Anziehung" gebrauchte, hängt vielleicht damit zusammen, dafs Heron den Vakuen „Anziehung" zuspricht. Diese hat, wie auch aus den citierten Stellen hervorgeht, den Zweck, die Ausfüllung der Leere herbeizuführen.

Wie dem auch sei, man hat sich in diese halbgeklärte Denkweise

1) Der Nachweis für diese Behauptung, der mit reichem Material ausgestattet werden kann, würde hier zu weit abführen. Übrigens ist die Bemerkung auch schon sonst hervorgehoben worden.

hineinzufinden, um GALILEIS Schwierigkeiten ernstlich würdigen zu können. Dann wird man auch den Einwand v. OETTINGENS[1]) hinfällig finden, den er gegen GALILEIS kleine Vakuen erhebt, die Gesamtkraft der kleinen Hohlräume könne nicht gröfser sein, als die Kraft des beim Wasser gemessenen endlichen Vakuums, das man sich an Stelle des Körpers denken könne. Die erwähnten Messungen beziehen sich aber auf die Kraft des bei den endlichen, künstlichen Vakuen auftretenden „horror vacui“ und sind daher für die kleinen, natürlichen Vakuen, denen kein Abscheu der Natur entspringt, gegenstandslos.

Wird also nicht deutlich, was für eine Art von Kraft von den kleinen Vakuen ausgeht, so ist doch verständlich, wie ihre Gröfsenwirkung zu stande kommt. Wenn auch die Wirkung eines einzelnen Hohlraumes sehr gering ist, so wird doch der Gesamteffekt sehr vieler Hohlräume, wenn nur ihre Zahl ausreichend grofs ist, durch Multiplikation ein sehr bedeutender sein können. Eine genügend grofse Menge von Ameisen könnte ein mit Korn beladenes Schiff ans Land ziehen.[2])

8. An dieser Stelle führt GALILEI, ohne dafs man einen inneren Grund angegeben findet, die unendlich grofse Zahl der kleinsten Teilchen und der dazwischen liegenden Hohlräume ein. Das bisher behandelte Problem der Festigkeit starrer Körper wird nun verlassen und in die Behandlung eines anderen Problems eingetreten, wie nämlich ein zusammenhängender Raumteil aus kleinsten Teilchen zusammengesetzt gedacht werden könne. An diese Frage knüpfen sich wieder einige Paradoxieen des Unendlichkeitsbegriffs, so dafs wir GALILEI nunmehr mit zwei neuen Problemen beschäftigt sehen, der Frage nach dem Wesen des Kontinuums und seiner kleinsten Teile, der Indivisibeln und der Frage nach dem Wesen des Unendlichen. Beide Probleme verschlingt unser Denker unter einander und wieder mit seiner endgiltigen Absicht eine atomistische Vorstellung vom Wesen der Materie zu geben. Wir versuchen die Probleme zu sondern und stellen die Frage nach der Natur des Unendlichen voran.

2. Das Wesen des Unendlichen.

1. Das Kontinuum besteht bei GALILEI aus unendlich vielen Indivisibeln, eine Linie z. B. also aus unendlich vielen Punkten. Aus dieser Annahme entspringen aber Schwierigkeiten für den Begriff des Unendlichen.

Eine endliche Strecke soll aus unendlich vielen Punkten bestehen.

---

1) OETT. p. 130, Anm. 1.

2) *Op.* XIII p. 24; OETT. p. 20.

Eine gröfsere endliche Strecke wird aber mehr Punkte enthalten. Also wird das eine Unendliche gröfser sein müssen, als das andere.

Nun ist aber für Galilei, wie man aus den hierauf bezüglichen Ausführungen sieht, das Unendliche immer nur ein absolut Unendliches, dem er nicht gestattet, eine verschiedene Gröfse anzunehmen. Dadurch entsteht für ihn die Denkschwierigkeit. Die Verschiedenheit der Länge der Strecken bedingt eine verschiedene Zahl der Punkte, die sie enthalten, und dabei soll die Zahl dieser Punkte beidemal eine unendliche sein. Die Lösung des Rätsels findet Galilei in dem Rückgang auf unsern Intellekt. Dieser ist ein endlicher, kann also nur Beziehungen zwischen endlichen Gröfsen fassen[1]), z. B. der Gleichheit, des Gröfser- oder Kleinerseins. Aber diese Beziehungen kommen dem Unendlichen nicht zu, denn der Intellekt kann nicht die Relationen dem Unendlichen zusprechen, die er dem Endlichen abgewonnen hat.

Ein Zahlenbeispiel mufs diese These erläutern.[2]) Man kann in der Reihe der natürlichen Zahlen Quadratzahlen und Nichtquadratzahlen unterscheiden. Es giebt also mehr natürliche Zahlen als Quadratzahlen. Nun hat aber jede Zahl eine Quadratzahl, also ist die Anzahl der Quadratzahlen wieder gleich der der natürlichen, wo sie doch soeben kleiner sein sollte.

Dieses Paradoxon löst sich unter Berufung darauf, dafs die Relationen der Gleichheit, des Gröfseren und Kleineren beim Unendlichen ungiltig sind.

2. Aber dieses Paradoxon hat noch einen weiteren Zweck. Es führt uns den eigentlichen Sinn der Ansichten Galileis über das Unendliche zu, die in den beiden folgenden Äufserungen hervortreten[3]): „Es kann weder gesagt werden, ein Unendliches sei gröfser als ein andres, noch auch es sei gröfser als ein Endliches. Denn, wenn die unendliche Zahl gröfser wäre z. B. als Million, so würde daraus folgen, dafs, wenn man von der Million zu andern und immer andern steigend gröfseren Zahlen fortschritte, man zur Unendlichkeit gelangen könnte, was indes unmöglich ist. Im Gegenteil wenn wir zu immer gröfseren Zahlen fortschreiten, so entfernen wir uns umsomehr vom Unendlichen, denn um so gröfser die Zahlen werden, desto seltener werden die in ihnen enthaltenen Quadratzahlen. Aber in der unendlichen Zahl können die Quadratzahlen in nicht geringerer Menge enthalten sein als alle Zahlen, wie wir soeben erschlossen. So ist also das Übergehen zu immer gröfseren und gröfseren Zahlen ein Sichentfernen von der unendlichgrofsen."

Diese merkwürdige Überlegung soll zunächst zeigen, dafs quantitative Relationen nicht allein zwischen unendlichen Gröfsen nicht bestehen, sondern auch nicht zwischen Unendlichem und Endlichem.

---

1) *Op.* XIII p. 35; Ottt. p. 30. 2) Ibid. 3) *Op.* XIII p. 37; Ottt. p. 32.

Aber das Eigentümliche dieser Aufstellungen steigert sich noch in ihrem weiteren Verlauf: „Wir fanden vorhin, dafs es in der unendlichen Zahl ebenso viele Quadrate (und Kuben) geben müsse, als es Zahlen giebt... Darauf sahen wir, dafs, je gröfsere Zahlen wir nahmen, um so weniger Quadrate unter ihnen vorkamen (und noch weniger Kuben). Nun ist es klar, dafs, zu je gröfseren Zahlen wir fortschreiten, wir uns um so mehr von der unendlich grofsen Zahl entfernen, woraus folgt, dafs, wenn wir die umgekehrte Richtung nach rückwärts einschlagen — denn das vorige Fortschreiten entfernt sich immer mehr von dem vorgesetzten Ziele — die Einheit es allein sei, die wir, wenn überhaupt irgend eine Zahl als unendlich bezeichnen können.“[1])

Man kann es Simplicio nicht verargen, wenn er erklärt, dies nicht zu verstehen. Aber Salviati-Galilei findet „die Sache gar nicht zweifelhaft“. Er fügt zur Erläuterung zweierlei hinzu: Er sagt, die Einheit ist ein Quadrat, ein Kubus u. s. f. Und dann gäbe es keine wesentliche Eigenschaft der Quadrate, Kuben u. s. w., die nicht auch der Einheit zukäme. So haben z. B. zwei Quadratzahlen stets eine mittlere Proportionale zwischen sich. Dasselbe gelte auch von einer Quadratzahl und der Einheit. Zwischen 9 und 1 sei es 3, zwischen 4 und 1 die 2. Kuben haben zwei mittlere Proportionalen zwischen sich. Ebenso z. B. auch 27 und 1, nämlich 9 und 3. „Wir schliefsen daraus, dafs die Einheit die einzige unendliche Zahl sei.“ Und Galilei fährt fort „das sind wunderbare Dinge, die über unsere Einbildungskraft hinausgehen, die uns aber belehren sollten, wie sehr man irrt, wenn man dem Unendlichen dieselben Attribute zuspricht, wie dem Endlichen, während die Wesenheiten dieser beiden unter einander keinerlei Übereinstimmung zeigen“.

3. Die blofse direkte Zergliederung wird das Befremdliche dieser Zahlenspekulationen nicht beseitigen können. Es genügt auch nicht, das Rätsel mit Hinweisen auf ähnliche Erscheinungen, wie sie die pythagoreische Zahlenmystik darbietet, in das Unbestimmte zu verschieben. Galileis sonstige Klarheit und die Tiefe seiner Analyse anderer Probleme legt die Pflicht auf, nicht vorschnell mit Schlagworten solche bisher unverstandenen Gedankenbildungen beiseite zu schieben. Soviel wir sehen, giebt es hier nur noch ein historisches Verständnis, und zwar liefert uns den Schlüssel der Gedankenkreis des Kardinals Nicolaus v. Cusa (1401—1464), dessen Einflufs auf den Beginn des modernen Denkens zwar anerkannt, aber nicht völlig umschrieben ist. Wir ziehen diese Spekulationen hier insoweit heran, als sie auf die vorliegenden Gedankenbildungen Galileis Einflufs gehabt haben.

1) *Op.* XIII p. 41; Oett. p. 35.

Im Mittelpunkt der Lehre des Cusanus stehen seine Aufstellungen über den Gottesbegriff. Gott ist zunächst das absolute Maximum, er ist dann die Einheit und wird endlich zum absolut Kleinsten, dem Minimum. Einige Andeutungen sind nötig, um diese metaphysischen Paradoxieen näher zu führen.

Gott ist zunächst das absolut Gröfste, das keinen Zuwachs kennt. Aber er ist auch das absolute Sein. Als solches fallen ihm die Merkmale der Unveränderlichkeit und Einheit zu. Es sind das Konzeptionen, die sich von dem Cusaner rückwärts mit Leichtigkeit in die Anfänge der griechischen Spekulation verfolgen lassen.

Aber diese Einheit des absoluten Seins, des Maximums, Gottes ist nicht nur Einzigkeit im Sinne des Monotheismus, sondern vielmehr völlige innere Geschlossenheit, Abwesenheit der Vielheit, jedes Andersseins, ja schliefslich Unteilbarkeit. Aus diesen Annahmen, die die Unveränderlichkeit und Einheit des absoluten Seins stützen sollen, gegenüber der Veränderlichkeit, Vielheit und Teilbarkeit der aus Endlichem zusammengesetzten, wechselvollen Welt, steigt der Kardinal zu der Paradoxie empor, das absolut Gröfste mit demjenigen gleichzusetzen, dem ebenfalls Abwesenheit jeder Vielheit, sowie Unteilbarkeit zukommt, mit dem Punkt, dem Minimum. Die Zurückverfolgung dieser Idee in die ausgehende griechische Philosophie, besonders auf den sogenannten Dionysius Areopagita und dessen Vorläufer, gehört nicht mehr in den Rahmen dieser Untersuchung.[1])

Jedenfalls besteht also die Thatsache, dafs der Cusaner drei Begriffe gleichsetzt, das absolute Maximum, die Einheit und das absolute Minimum. Die innere Bedeutung dieser Lehre, soweit sie das Maximum und die Einheit anlangt, ist leicht erkenntlich. Die Hineinziehung des Minimums wird im Weiteren noch klarer werden.

Auch Nicolaus v. Cusa fühlt das Bedürfnis seine Spekulation durch Beispiele, nämlich aus der Arithmetik und Geometrie näher zu führen. Die Zahlenreihe giebt ein Bild seiner Weltanschauung in engster Schematisierung. Entsprechend dem absoluten Maximum seiner Metaphysik bildet er den Begriff einer über alle denkbaren Zahlen hinausgehenden absolut gröfsten Zahl. Dieser gegenüber ist die Einheit die absolut kleinste Zahl, unteilbar, das Minimum. Die uns so seltsam anmutende Gleichsetzung des Minimums mit der Einheit entspringt der zu hochgetriebenen Wertschätzung einer Parallele zwischen dem Punkt als Grundelement der Linie und der Einheit als dem der Zahl und findet sich bereits gelegentlich bei Aristoteles[2]), weiterhin bei späten pythagoreisierenden Platonikern, bei

1) Siehe besonders die ersten Kapitel des Buches *De docta ignorantia.*

2) Topik, 1. Buch, cap. 18 gegen Schlufs.

Martianus Capella, bei Scholastikern. Aber diese Fäden zurückzuverfolgen, ist hier nicht unsere Pflicht, ebenso auch nicht, die Fülle der Ideen zu entwickeln, die bei Cusanus mit dieser seiner Aufstellung verknüpft sind.

Vergleicht man nun hiermit Galileis Zahlenspekulationen, so ergiebt sich zunächst, wie er dazu kam, die Einheit als die gröfste Zahl hinzustellen. Es sind dies nur die aus dem Ideenkreis des Kardinals zurückbehaltenen Exemplifikationen, deren eigentlicher, allerdings metaphysischer Inhalt abgestorben ist. Nun ist das Maximum bei Cusanus zugleich das Minimum und so gelangt er, wie Galilei, dahin, die Einheit als das Maximum aufzustellen.

In ganz entsprechender Absicht werden vom Kardinal die geometrischen Analogieen durchgeführt. Hier spielen Übergänge vom Endlichen zum Unendlichen eine grofse Rolle. Man soll, so lautet die Vorschrift, zunächst die Verhältnisse der Figuren ermitteln, so lange die Strecken endlich sind, und dann den Übergang zum Unendlichen vollziehen.[1]) Läfst man z. B. den Radius eines Kreises wachsen, so wird im Falle der Unendlichkeit die Peripherie zur geraden Linie. Dieses einfachste und andere Beispiele variieren dabei zwei Gedanken: Das Gröfste ist mit dem Kleinsten identisch, und der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen ist mit einer Änderung im Wesen verbunden, der Kreis z. B. wird zur geraden Linie. Für den Kreis verknüpft sich dies mit der Dreieinigkeit. Es sind bei ihm nämlich Zentrum, Durchmesser und Peripherie eins.[2]) Indem sich Cusa — übrigens ähnlich wie andere Denker, z. B. Kepler[3]) — hier in unergründliche Mystik verliert, setzt er das Zentrum mit der causa efficiens, dem Schöpfer, den Durchmesser mit der causa formalis, dem Regierer, die Peripherie mit der causa finalis, dem Erhalter gleich.

Hiermit vergleiche man die Grenzbetrachtung, die Galilei in seine Atomistik verwebt. Läfst man die Figur (Figur 1) um die Axe MN rotieren, so kann man für eine beliebige Lage der zu CD parallelen Ebene EF zeigen, dafs der Kegel MHJ gleich sein mufs dem ringförmigen Körper $AEGBFK$. Im Grenzfall, wenn die Ebene durch den Punkt M geht, wird der Kegel zu einem Punkt, der ringförmige Körper zu einem Kreis. „Es scheint mithin, dafs ein grofser Kreis einem Punkt gleich genannt werden

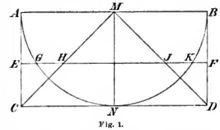


Fig. 1.

1) *De docta ign.* I cap. 12. 2) Ibid. cap. 21.
3) Kepler ist darin wohl von Cusa abhängig.

kann." Dies würde auch für die gröfsten Kreise des Himmelsgewölbes gelten. „Auf Grund solcher Spekulationen erkennen wir, dafs alle Kreisumfänge, seien sie auch noch so verschieden, einander gleich genannt werden können und ein jeder gleich einem Punkt."[1])

Es ist hier aus dem naiv geknüpften Netz der Spekulationen des Kardinals nur die mathematische Betrachtung, ausgeführt an einem komplizierteren Fall, zurückgeblieben. Aber auch die Wesensänderung beim Übergang vom Endlichen zum Unendlichen, die wir bei Galileis Vorläufer fanden, findet sich bei ihm selbst erhalten. Er erörtert dies an einem geometrischen Ort, auf den es hier nicht ankommt, betrachtet eine Schar von Kreisen, die im Grenzfall in eine gerade Linie übergehen. Er nennt dies „einen merkwürdigen Fall, der die unendliche Verschiedenheit, ja sogar das Widerstreben und die Abneigung der Natur zeigt, auf die eine endliche Gröfse beim Übergang in eine unendliche stöfst".[2]) Hier begegnen wir sehr merkwürdigen Gedankenbildungen bei Galilei. Diese noch lange nicht ausreichend beobachtet und zusammengefafst, sind bei ihm keineswegs vereinzelt. Sie zeigen, dafs er bei allem Streben, zu prinzipiell geklärten Methoden vorzudringen, dennoch hier und da dem unentwirrten Denken seines Vorläufers folgt.

Und der Einflufs dieses Vorläufers erstreckt sich gerade hier in der Atomistik noch weiter. Dieser Übergang ins Unendliche deckt auch die weiteren Rätsel der Zahlenmystik Galileis auf. Wir sahen, dafs man bei Galilei durch Aufsteigen in der Zahlenreihe nicht zum Unendlichen kommt, sondern sich eher von ihm entfernt. Dies wird in des Cusaners Denken verständlich. Er sagt: „Man kommt bei der Zahl in aufsteigender Richtung auf kein absolut Gröfstes."[3]) Über die Bedeutung dieses Satzes kann nur der Rückgang auf seinen metaphysischen Inhalt aufklären. Cusanus sagt: „Man kann nicht ins Unendliche aufsteigen, weil sonst das Gröfste von der Natur des Endlichen wäre." Gott umspannt, als ein dem Wesen nach von ihr verschiedenes, die gesamte Welt, die der Inbegriff des Endlichen ist. Wollte man vom Endlichen aufsteigend zum Unendlichen gelangen, so hiefse das Gott aus der Welt herleiten, wo doch umgekehrt Gott das Primäre, die Welt das Abgeleitete sein soll. Nun versteht man, wie der Übergang ins Unendliche mit einer Wesensänderung verknüpft sein mufs, und der Abscheu, den die Natur empfindet, Endliches zu Unendlichem werden zu lassen, ist ein Schatten jenes alten Gedankens, dafs Gott eben der Grund der Welt, nicht blos ihre Steigerung ist.

1) *Op.* XIII p. 31; Oett. p. 27.
2) *Op.* XIII p. 41; Oett. p. 35.
3) *De docta ign.* I cap. 6.

Im weiteren wird verständlich, warum die Relationen der Quantität nicht zwischen Unendlichem, aber auch nicht zwischen Endlichem und Unendlichem stattfinden. Was das Unendliche anlangt, so ist dies geschlossen Eines, es läfst keine Differenzen der Gleichheit oder quantitativen Verschiedenheit zu, die überdies nur dem endlichen Intellekt entspringen. Und was die Vergleichung des Endlichen mit dem Unendlichen anlangt, die der gemeine Verstand zu Gunsten des Unendlichen entscheiden würde, so ist das Unendliche = Gott in unfafsbarer Weise vom Endlichen verschieden. Kein Wissen, vielleicht nur ein ekstatisches Schauen können den endlichen Sinn diesem Unendlichen nähern. Nur im Nichtwissen sind wir Wissende des Absoluten.

In diesen Zügen, die sich übrigens noch in weniger wichtigen Punkten vermehren liefsen, zeigt sich die Verknüpfung Galileis mit Nicolaus v. Cusa, was die hierher gehörigen Fragen anlangt. Es bestünde noch die Möglichkeit, dafs diese Anregungen Galilei statt aus den Werken des Cusaners aus Giordano Bruno zugeflossen wären. Die Nachprüfung dieser Möglichkeit hat uns wahrscheinlicher gemacht, dafs Galilei hier vom Cusaner abhängt. Die Darlegung der Gründe führt aus dem Rahmen der Untersuchung heraus. Übrigens ist für die Einsicht in den Fortgang der Ideen, um die es sich hier handelt, nicht von Belang, ob Galilei von diesem oder jenem abhängt. Giordano Bruno ist in den hier angezogenen Konzeptionen völlig von Cusanus beeinflufst. Es ist genau derselbe Ideenzug, in dem beide stehen, und der ursprünglichere Denker ist auch zugleich der ältere. Es genügt gezeigt zu haben, dafs Galilei in derselben Linie sich bewegt.

Zusammenfassend für die weitere Darlegung heben wir noch einmal hervor:

1. Das Unendliche ist dem Wesen nach vom Endlichen verschieden;
2. Der Übergang vom Endlichen ins Unendliche führt demgemäfs einen Wechsel im Wesen herbei;
3. Das Unendliche erreicht man nicht durch Steigerung des Endlichen;
4. Das Unendliche findet man durch Rückwärtsbewegung in der Einheit.

4. Zu den somit wiedergegebenen Anschauungen über das Unendliche tritt bei Galilei nur flüchtig, aber sehr entscheidend noch eine ganz anders gerichtete hinzu, die das Gesamtbild zu ergänzen geeignet ist. Galilei spricht über die Frage, die uns im nächsten Abschnitt eingehender beschäftigen wird, ob die letzten Teile einer Strecke endliche oder nicht mehr von endlicher Ausdehnung, d. h. indivisibel sein müfsten. Diese

7*

letzten Teile würden die Produkte einer unendlichen Teilung sein müssen. Aber eine solche giebt es nicht. Es wird dies in Konsequenz der hier wiedergegebenen Ansichten gesagt. Die fortgesetzte Teilung kann eben nie zu einer unendlichen werden. Andererseits mifst er dieser fortgesetzten Teilung doch auch eine eigentümliche Bedeutung bei. Sie führt nämlich weder zu Endlichem noch auch zum letzten Unteilbaren, sondern zu einem dritten. Galilei sagt: „Zwischen Endlichem und Unendlichem (er meint jetzt das Unendlichgrofse) giebt es noch ein drittes, nämlich das jeder bezeichneten Zahl Entsprechenkönnen, sodafs auf die Frage, ob die Teile eines Stetigen endlich oder unendlich seien, die beste Antwort sein wird, sie seien weder endlich noch unendlich an Zahl, sondern sie seien soviel, als irgend einer angegebenen Zahl entspricht. Nur ist hinzuzufügen nötig, dafs die Teile nicht unter einer begrenzten Zahl liegen, weil sie sonst einer gröfseren Zahl nicht entsprechen könnten, aber es ist nicht nötig, dafs ihrer unendlich viele seien, denn eine angegebene Zahl ist niemals unendlich."[1]) Hier wird neben dem absolut Unendlichen eine neue Art des Unendlichen unterschieden, das durch Steigerung des Endlichen entsteht. Wundt[2]) sagt zur Erörterung des Gegensatzes zwischen infiniten und transfiniten Gröfsen: Der einzige Unterschied liegt in dem zu Grunde liegenden Erzeugungsprincip. Dieses besteht aber im ersten Falle darin, dafs man das Unendliche aus der *endlichen Gröfse* durch unbegrenztes Wachstum *hervorgehen* läfst, während man es im zweiten Falle als einen *fertigen* Begriff denkt, der von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Gröfsen zukommt, *nicht* besitzt." Mit diesen aus dem Endlichen gesteigerten infiniten Gröfsen giebt sich Galilei nicht weiter ab. Er beschäftigt sich sonst mit dem Unendlichen im absoluten Sinne. Aber die Tiefe seines Eindringens geht aus dieser Distinktion klar genug hervor.

3. Das Wesen des Kontinuums.

1. Mit seinen Spekulationen über den Begriff des Unendlichen zeigte sich Galilei von neuplatonischen Ideen abhängig, wie sie von Nicolaus v. Cusa zu Beginn des neuzeitlichen Denkens aufgenommen waren. Das zweite Problem, das er in seine Atomistik verwebt hat, die Frage nach dem Wesen des Kontinuums führt über die scholastischen Kommentatoren des Aristoteles auf diesen selbst zurück. Aristoteles hatte in seine Bekämpfung der Atomistik den als stetig aufzufassenden Raumteil an die Stelle des physischen Körpers gesetzt, um durch die Schwierigkeiten, die zwischen der Annahme eines Kontinuums und seinen Atomen, den

1) *Op.* XIII p. 29; Oett. p. 33. 2) *Logik*, Bd. II, 1883, p. 128.

kleinsten Teilchen oder, wie der scholastische Terminus ist, den Indivisibilien sich erheben, die atomistischen Vorstellungen zu zerstören. Die Scholastik hatte dieses Problem aufgegriffen und hin- und hergeschoben. Hier bei Galilei sehen wir es wieder auftauchen. Dabei ist zu beachten, dafs Galilei nicht zu bemerken scheint, dafs das Wesen der Problemstellung hier geändert ist, dafs es sich nicht mehr um eine Frage der physikalischen Atomistik, sondern der mathematisch-philosophischen Spekulation handelt. Aber gerade in dieser Vermengung oder Verknüpfung der verschiedenen, historisch so entwickelten Fragestellungen liegt die Eigenart der Lehre Galileis, aber auch der Grund für die Schwierigkeiten, die sie darbietet, und für den geringen Einflufs, den sie auf die Folgezeit ausgeübt hat, wie für die isolierte Stellung, die sie in seinem eigenen Denken einnimmt.

2. Die erste Frage ist, da doch das Kontinuum teilbar ist, sollen dessen letzte Teile der Gröfse nach als endliche „parte non quante", oder entsprechend, soll man ihre Anzahl als eine endliche oder unendlich grofse annehmen. Aristoteles löst die Frage durch Heranziehung der Begriffe der Potenzialität und der Aktualität. Potentiell, d. h. vor aller Teilung ist die Zahl der Teile unendlich, aktuell, d. h. nach vollführter Teilung ist sie endlich.

Diese Trennung des Potenziellen und Aktuellen schiebt Galilei beiseite, um statt dessen auf seinen Unendlichkeitsbegriff zurückzugehen. Das Kontinuum z. B. irgend einer Strecke — denn mit solchen beschäftigt sich Galilei vornehmlich, die Anwendung auf Flächen und Körper wird immer nur kurz angedeutet — ist zwar teilbar und fortgesetzt teilbar, aber durch solche fortgesetzte Teilung gelangen wir nicht zur unendlichen Teilung und auch nicht zu den letzten Teilen. Denn, wie wir schon sahen, durch blofse Steigerung erreichen wir nicht das absolute Unendliche des Galilei, vielmehr entsprechen wir immer nur einer beliebig grofsen Zahl, ohne je ins Unendliche zu kommen. Ob nun aktuell oder potenziell, wir erhalten immer nur solche Teile, die der oben bezeichneten Teilungszahl entsprechen.

3. Um also durch Teilung das Kontinuum in unendlich viele Teile zu zerspalten, wird man völlig anders vorgehen müssen. Galilei greift zu dem Zweck auf eine alte Bemerkung der Scholastiker zurück, die ihm aus irgend einem Kommentar zur Physik des Aristoteles im Gedächtnis geblieben sein mag. Wie für ihn war auch für die scholastischen Denker eine Teilfrage des Kontinuitätsproblems dahin gegangen, wie können die potentia im Kontinuum enthaltenen letzten Teilchen, die Indivisibeln, aktuell gemacht werden? Actu treten aber die Indivisibeln bei der Bildung von Figuren auf, nämlich an den Ecken. Dementsprechend begnügt sich

Galilei damit, die Indivisibeln in einer Strecke dadurch aufzuzeigen, dafs er sie nicht einzeln herauslöst, sondern eine Strecke zu einem Quadrat oder Sechseck zusammenknickt. Solche Knickungen genügen also, um den Übergang von der Potenzialität zur Aktualität zu bewirken.

Was ist nun dazu zn sagen, dafs eine Linie um einen Kreis gewickelt wird? Der Kreis ist ein Polygon von unendlich vielen indivisibeln Seiten. In diesem Falle einer ganz besonderen Art von Knickung ist die Strecke mit einem Schlage thatsächlich in unendlich viele Teile zerlegt. Die vorher potenziell waren, sind nun aktuell geworden. Zugleich ist von einer Steigerung der Knickung aus der endlichen Zahl der Ecken in die unendliche, die eine Unmöglichkeit wäre, nicht die Rede mehr. Weiter zeigt sich, dafs die letzten Teile Punkte sind, denn der Kreis berührt eine Gerade immer nur in einem Punkte und wir müssen schliefslich zngestehen, dafs das Kontinuum ans unendlich vielen Punkten zusammengesetzt ist.[1])

4. Dies ist überhanpt die endgültige Fragestellung, die Galilei sowie die Scholastik beschäftigt, kann man und wie kann man das Kontinuum aus seinen letzten Teilen, den Indivisibeln, zusammengesetzt denken? Galilei gelangt, im allgemeinen im Gegensatz zur Scholastik, dahin, die Frage zu bejahen Er sagt, das Kontinuum besteht aus unendlich vielen Indivisibeln oder unausgedehnten Punkten, die durch ebensoviele, ebensolche Vakuen getrennt sind. Es bleibt seine Aufgabe, diese These zu begründen.

Galilei bedient sich zu dem Zweck des unter dem Namen der „rota Aristotelis“ bekannten Paradoxons.[2]) Es rolle (Fig. 2) der Kreis AB auf der Geraden BF und es entspreche die Strecke BF einer Umdrehung des Kreises, so wird der mit dem Kreis AB fest verbundene Kreis AC nach einer Wälzung in E anlangen. Es ist also CE gleich dem Umfang des Kreises AC. Nun ist aber BF ebenso lang wie CE, während es doch länger sein mufs als CE, da auf ihm sich die längere Peripherie des Kreises AB abwickelte, auf CE jedoch die des kleineren AC.

Galilei löst das Problem, indem er an Stelle der Kreise reguläre Polygone setzt. Ein Blick auf die Figur 3 zeigt, dafs, wenn das Polygon AG mit seinem Umfang in steter Berührung mit der Geraden GS bleibt, das Polygon AH die Gerade HT immer in ebensoviel Strecken berührt, wie es andere leer läfst, die von den Bögen überdeckt sind.

Fafst man nun die Kreise als Polygone mit unendlich vielen unteilbaren Seiten auf, so sieht man, wie der kleinere Kreis das Problem löst, Linie CE in unendlich viele Punkte mit unendlich vielen dazwischen

1) *Op.* XIII p. 50; Oett. p. 43.
2) *Op.* XIII p. 25; Oett. p. 20.

liegenden unteilbaren Vakuen zu zerspalten. Hierin erblickt Galilei die Lösung des Kontinuitätsproblems. Das Stetige wird aufgelöst in unend-

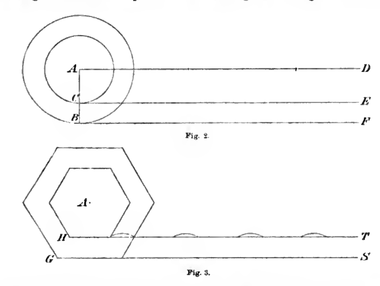


Fig. 2.

Fig. 3.

lich viele diskrete durch entsprechende Vakuen getrennte Punkte, aber diese Auflösung greift für ihn das Stetige als solches nicht an.

5. Diese Zusammensetzung des Kontinuums aus getrennten Punkten bietet dem Verständnis Schwierigkeiten dar. Man versteht nicht recht, wie Galilei den Begriff des geometrisch Stetigen mit der Zerlegung in getrennte unausgedehnte Punkte vereinigen will. Daſs das Paradoxon der „rota Aristotelis" ihm diese Auffassung zugeführt, ja, daſs dieses Problem mit der ihm eigenen Deutung auch nur eine hinreichende Begründung abgebe, kann nicht behauptet werden. Aber Galilei legt seinen Anschauungen über das Verhältnis von Kontinuum und Indivisibilien groſsen Wert bei im Verhältnis zu der sichtlichen Denkarbeit, die er der Frage geopfert hat.[1]) So entspringt für uns die Pflicht, wenigstens den Versuch zu wagen, die Bedeutung und innere Stellung seiner Lehre genauer festzulegen.

Galilei teilt selbst den Einwand des Aristoteles mit, daſs Unteilbares zu einander gefügt, keine teilbare Gröſse hervorbringe. Er begegnet ihm dadurch, daſs er sagt, allerdings könnten nicht 10, 100, 1000 Indivisibeln eine endliche teilbare Gröſse bilden, wohl aber unendlich viele.[2])

1) *Op.* XIII p. 63; Oett. p. 56 oben. 2) *Op.* XIII p. 35; Oett. p. 30.

Lasswitz versucht das Dunkel, welches dieser Aufstellung anhaftet, auf Grund seines eigenen erkenntniskritischen Standpunkts aufzuhellen. Wenn wir auch verzichten müssen, diesen Standpunkt mit den daran hängenden Fragestellungen hier zu bezeichnen, und deshalb auf Lasswitz' Buch selbst verweisen, so läfst sich doch die daraus hervorgehende beachtenswerte Auffassung losgelöst aussprechen. Lasswitz meint, Galilei denke jeden „unendlich kleinen Teil, das Raumelement als noch den Charakter der Körperexistenz besitzend, wenn auch seine räumliche Ausdehnung verschwunden ist" und glaubt, dafs sich bei Weiterausbildung dieses Ansatzes die Vorstellung von Kraftcentren ergeben haben würde.[1])

Für uns handelt es sich darum, an Stelle einer direkten systematischen Beurteilung, wie sie irgend ein psychologischer oder erkenntniskritischer Standpunkt diktiert, eine methodisch gesicherte, historische Betrachtung zu gewinnen. Nur an das sich anzuklammern, was Galilei selbst ausspricht, kann zu einem eindringenden Verständnis unzureichend sein. Gerade am Anfang prinzipiell neu gewendeten Denkens versagt die logisch und sprachlich kongruente Wiedergabe der Gedanken. Wir haben den Ausdruck „unendlich klein" in unserer Darstellung vermieden, weil wir ihn bei Galilei nicht angetroffen haben. Er spricht in gleicher Bedeutung von Punkten, Indivisibeln, atomi non quanti. Den Begriff des „Unendlichkleinen" hier anzuführen, ist bedenklich, und dennoch ist nicht unmöglich, dafs wir hier einen Keimpunkt dieser Begriffsbildung vor uns haben. Es gilt auch für mathematische Wahrheiten zumal prinzipieller Natur, dafs sie sich aus Regionen des Innenlebens emporringen, die ursprünglich sich dem Lichte einer logischen Klarheit entziehen. Die Anerkennung dieses Standpunkts, so wichtig sie für das Verständnis der ersten Anfänge einer neuen Denkweise ist, bringt aber die Gefahr eines geistreich klingenden, grundlosen Psychologisierens mit sich, das Geheimnisse und ihre Deutungen da sucht, wo keine zu finden sind. Dem gegenüber stehen der historischen Betrachtung zwei Wege offen. Der eine liegt in dem Rückgang auf die Quellen der Denkweise, der andere führt zur Untersuchung der Konsequenzen, die sie in den Arbeiten nachfolgender Denker gefunden hat. So können unter Umständen die hinter dem geradezu Ausgesprochenen mitschwingenden, aber stumm gebliebenen Gedankenansätze zu Gehör gebracht werden. In unserm Fall wird diesem Gesichtspunkt entsprechend auf Nicolaus v. Cusa zurückzugehen sein, während für die Weiterbildung Cavalieri mit seiner *Geometria indivisibilium* herangezogen werden kann.

6. Bei dem Cusaner kreuzen sich mehrere Auffassungen des Punk-

1) *Gesch. d. Atomistik*, Bd. 2, p. 50.

tes.[1]) Der Punkt ist zunächst die Grenze der Linie. Denkt man sich aber eine Linie in verschiedene Teile geteilt, so tritt auch der Punkt als Verbindungsstelle solcher Teilstücke auf (iunctura). Zwischen beiden Arten von Punkten ist kein Unterschied. Eine Strecke enthält also beliebig viele Punkte. Dieser Auffassung nach ist der Punkt ein Non-quantum, indivisibel und aus Punkten eine Quantität zusammenzusetzen, scheint unmöglich. Diese Ideen liegen ganz in der Richtung der an ARISTOTELES anknüpfenden Scholastik. Erst eine ganz anders geartete Auffassung des Punktes scheint für das Verständnis GALILEIS von Wichtigkeit zu sein.

Hiernach stellt sich der Punkt als die „Komplikation" der Linie und diese umgekehrt als „Explikation oder Evolution" des Punktes dar, ebenso wie die Fläche als Evolution der Linie, der Körper als Evolution der Fläche. Allerdings ist dieser Begriff der Evolution kein durchaus deutlicher. Es handelt sich um eine begriffliche Auswicklung. Der Punkt enthält die Linie dem Wesen nach; er ist überall in der Linie, aber nicht so, dafs sie aus Punkten zusammengesetzt sei, sondern nur so, dafs er ihr Wesen konstituiert. Mit den entsprechenden Gedanken für die Einheit und die Zahlenreihe verknüpft, heifst dies, die Einheit entwickelt die Zahlenreihe nicht durch additive Zusammensetzung, sondern durch begriffliche Explikation. Es giebt nur einen Punkt, nur eine Einheit, die aber überall in Gröfsen- und Mengenbegriffen anwesend sind.

Es versteht sich nach dem bereits aus CUSAS Anschauungen Hervorgehobenen, dafs hier Spiegelungen metaphysischer Ideen vorliegen. Das All entwickelt sich geradeso aus dem Minimum, welches mit dem Maximum oder Gott identisch ist, wie die Zahlenreihe aus der Einheit oder die Linie aus dem Punkte. Hier zeigt sich, dafs die Auswicklung der Welt aus dem Minimum kein Vorgang sein darf, der für das Minimum eine Bereicherung seines Inhalts bedeutet, denn dem Minimum oder Gott gehört die Fülle der Realität und die höchste Vollendung an. Ganz entsprechend ist der Punkt die Vollendung und Totalität der Linie.

Für uns genügt es die lebensvolle, wenn auch begrifflich unklare Ansicht der Entwicklung des Punktes über sich selbst hinaus angedeutet zu haben. Die verschiedenen Versuche diese für die Philosophie des CUSANERS im Gegensatz zur Scholastik charakteristische Denkweise mit den übrigen ihm historisch überkommenen Einflüssen zu vereinigen, sind dem Hauptgedanken gegenüber belanglos. Der Gesichtspunkt der Evolution selbst erscheint bei ihm in verschiedenen Wendungen. Mit Recht sagt FALCKENBERG in seiner Darstellung dieser vielfachen Wendungen, der Philosoph habe in der Freude, die neue und fruchtbare Idee der Entwick-

1) *De docta ign.* lib. 2, cap. 3; *De ludo globi* lib. 1.; *De mente idiotae* lib. 3 cap. 9.

lung gefunden zu haben, die mannigfachen Nuancen übersehen, welche derselben durch ihre Anwendung auf die verschiedenartigen Verhältnisse erwuchsen.[1])

Was nun Galilei anlangt, so wäre es zuweit gegangen behaupten zu wollen, dafs er diese Ideen durchaus geteilt habe. Bei dem Einflufs aber, den das Denken des Cusaners auf ihn gehabt hat, ist es doch möglich, dafs die hier auftretende dynamische Auffassung gegenüber der starren Inhaltslosigkeit der scholastischen Betrachtungsweise hinter seinen ausdrücklich formulierten Gedanken gestanden habe. Sieht man in dem Punkte die zur Evolution strebende Linie „kompliziert", so wird es daher begreiflich, wie man die Vorstellung der Stetigkeit des Kontinuums mit der Annahme diskreter Indivisibilien verbinden kann. Der Punkt ist eben nicht mehr das leere, letzte Unausgedehnte, sondern trägt eine Tendenz zur Ausdehnung in sich, die die Brücke zwischen dem Diskreten und dem Stetigen schlagen mufs. Begriffliche Klarheit ist es nicht, die diese Konjektur mit sich führt, aber eine gewisse psychologische Annäherung auf Grund nachgewiesener historischer Zusammenhänge. Weitere Durcharbeitung des überkommenen Materials nach noch unbekannten Richtungen kann vielleicht weitere Bestätigungen bringen.

7. Cavalieris *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* bleibt in ihrem Ursprung dunkel, so lange man nicht Galileis Einflufs auf seinen Schüler ausreichend heranzieht. Cavalieri spricht bekanntlich in seiner Geometrie nur sehr wenig von den Indivisibeln und dem Kontinuum, obgleich er beide Bezeichnungen im Titel seines Werkes anbringt. Einigen Aufschlufs gewährt die Praefatio, sowie besonders das Scholium lib. II, p. 17 (Ausg. v. 1635). Unter Indivisibilien werden Punkte als Elemente der Linien, Linien als solche der Flächen und Flächen als solche der Körper verstanden und zwar handelt es sich in der mathematischen Behandlung nur um äquidistante Linien, die zu Flächen, und entsprechende Ebenen, die zu Körpern zusammengesetzt werden. Cavalieri scheint solche Linien und Ebenen zusammenzuaddieren, um daraus kontinuierliche Flächen und Körper zu erhalten, insofern als er zum Zweck seiner Quadraturen und Kubaturen den Begriff „alle Linien resp. Flächen einer Figur" bildet. Aber er lehnt es ab, solche Elemente geradezu zu Kontinuen zusammenzufassen. Ihm sind die Disputationen der Philosophen über die Frage, ob eine solche Zusammenfassung möglich sei oder nicht, wohl bekannt. Seine eigenen Auseinandersetzungen darüber erheben sich um nichts über die fruchtlosen Distinktionen der scholastischen Kommentatoren der Physik des Aristoteles. Sie bieten weder einen

1) Falckenberg, *Grundzüge der Philosophie des Nicolaus Cusanus*, p. 51.

Fortschritt in der prinzipiellen Aufklärung, dar, noch sind sie überhaupt ausreichend durchsichtig. So versucht er um die philosophische Klarlegung herumzukommen, indem er statuiert, dafs er seine Inbegriffe „aller Linien oder Flächen“ nicht den entsprechenden Kontinuen selbst gleichsetze, sondern nur ihre Proportionalität behaupte. Seine Methode soll darin bestehen, dafs an Stelle der Kontinuen, Flächen oder Körper die Inbegriffe der Indivisibilien behandelt werden, die zu denselben Verhältnissen führen. Von der Kraft dieser Methode ist er durchdrungen. Er hält sie „für den goldenen Schlüssel zu mancher verschlossenen Thür der Hochburg Geometrie, die uns den Zugang zu den reichsten Schätzen eröffne.“

Guldin[1]) hat Cavalieri den Vorwurf gemacht, er habe seine Methode aus Keplers *Stereometria doliorum* entnommen, in der wir Anfänge einer infinitesimalen Methode vor uns haben. Die Frage, ob dieser Vorwurf berechtigt sei, ist von Cantor in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* erörtert worden. Es wird dort auch der Zusammenhang zwischen Cavalieri und Galilei erwogen. Dafs Galilei sich mit Forschungen über die Indivisibilien beschäftigte, geht aus dem Briefwechsel beider hervor. Die Frage ist nun die, ob Galilei und Cavalieri von der ihnen (was Galilei anlangt nur mit grofser Wahrscheinlichkeit) bekannten *Stereometria doliorum* des Kepler abhängen oder nicht. Galileis Buch über die Indivisibilien ist nicht erschienen. Aber wir müssen das, was die *Discorsi* im ersten Tag geben, und der Gegenstand unserer Untersuchung war, für ein Stück der geplanten Publikation ansprechen. Es geht dies aus dem Antwortschreiben Cavalieris an Galilei hervor, als jener ihm die *Discorsi* dediciert hatte.[2]) Cavalieri kommt da nach einleitenden Worten alsbald auf Galileis Behandlung der Indivisibilien. Er ergeht sich in Lobeserhebungen der Leistung Galileis, die freilich nicht ohne innere Einschränkung zu sein scheinen und sich auf die kühne Summation der Elemente zu Kontinuen beziehen. Dafs aber diese Versuche Galileis etwas anderes enthielten, als Cavalieri, dem seines Meisters Pläne in dieser Richtung lange bekannt waren, erwartet hatte, tritt in keiner Wendung hervor.

Die Frage, ob Galilei von Kepler abhängig war, erledigt sich demnach in negativer Weise. Das Kontinuumsproblem ist bei Galilei nicht aus mathematischem Interesse hervorgegangen. Ihn beschäftigte die Atomistik. In deren Gefolge gab es aber anschliefsend an die Einwendungen des Aristoteles eine durch die gesamte Scholastik sich hindurch-

1) S. bei Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Math.* II², p. 840, 842; auch Kepler, *Op. omn.* ed. Frisch, IV, p. 656.

2) *Op.* X p. 349.

ziehende Dialektik über das Kontinuitätsproblem, die in den Kommentaren zum Aristoteles niedergelegt ist. In dieser Fragestellung steht Galilei mitten drin. Von dort ist ihm dies Problem zugeflossen und er hat es auf Cavalieri übertragen. Ob nun freilich Cavalieris besondere mathematische Ausnützung des Problems auf den Anstofs Keplers zurückgeht oder ebenfalls schon mit Galileis Anregungen gegeben war, dürfte schwierig zu entscheiden sein. Unsere Aufgabe war es nur, die Stellung der Konzeptionen Galileis in der historischen Entwicklung zu präzisieren. Die Vorsicht gebietet aber, bindende Schlüsse aus dieser Festlegung über den Charakter von Galileis Auffassung des Indivisibeln noch nicht ziehen.

4. Die physikalische Anwendung.

1. Die im Vorhergehenden behandelten Untersuchungen Galileis knüpfen sich an Probleme an, die andern intellektuellen Bedürfnissen entsprangen, als der Frage nach der Konstitution der Materie, aber wie sie von dem physikalischen Interesse ihren Ausgang nahmen, so stellen sie sich schliefslich wieder in den Dienst desselben und fördern so eine physikalische Atomistik zu Tage, in der die historisch überlieferten Probleme sich in höchst eigenartiger Weise gegenseitig durchdringen.

Die erste Absicht dieser Atomistik geht dahin, den festen und flüssigen Aggregatzustand zu erklären. Die Festigkeit des Körpers wird, wie wir sahen, zum einen Teil durch die Abneigung der Natur gegen das grofse Vakuum, zum andern durch die unendlich vielen kleinen Vakuen bewirkt, die zwischen den Atomen eingebettet sind.

Der flüssige Zustand wird, wie wir ebenfalls schon angedeutet, dadurch herbeigeführt, dafs z. B. in Gold, wenn es schmelzen soll, Feueratome eindringen. Diese schlängeln sich zwischen die kleinsten Teilchen des Goldes, erfüllen die kleinen Vakuen und heben so deren Kraft auf. Ziehen dann diese Feueratome wieder ab, so entstehen die Vakuen wieder; ihre gegenseitige Anziehung tritt wieder ein und der Körper ist fest geworden.

Diese Hypothese der Feuerteilchen kommt bereits bei antiken Physikern vor. Die erwähnte Auseinandersetzung Herons am Eingang der „Druckwerke“ enthält sie ebenfalls, wenn auch nicht besonders ausführlich, vielmehr im Ton einer allbekannten Sache.[1]) Heron spricht vom Diamanten, dafs er sich nicht glühend machen lasse, und fügt hinzu: „Die Moleküle des Feuers haben einen gröfsern Umfang als die Vakua des Steines und dringen daher nicht ein, sondern berühren blofs die äufsere

1) Schm. I p. 17 ff.

Oberfläche. Eben deshalb, weil sie nicht hineinkommen, wie bei den übrigen Körpern, entwickelt sich auch keine Wärme.“ Andere Beispiele schliefst HERON mit den Worten ab „dafs also das Feuer alle Körper, die fester sind als dieses selbst, auflöst und verwandelt, ist klar.“

Dieser Auffassung der Entstehung des flüssigen Zustandes steht aber eine andere durchaus abweichende bei GALILEI gegenüber. „Nehme ich einen harten Körper, einen Stein oder ein Metall, und zerteile ich ihn mit einem Hammer oder einer äufserst feinen Feile in das allerfeinste, unfühlbare Pulver, so ist es klar, dafs die kleinsten Teile, trotzdem dafs wir sie einzeln weder sehen noch fühlen können, doch noch endlich, gestaltet und zählbar sind. Daher kommt es, dafs sie, angehäuft, sich gegenseitig zusammenhalten. Und höhlen wir das Häufchen bis zu einem gewissen Grade aus, so bleibt eine Höhlung nach, ohne dafs die umgebenden Teile dieselbe ausfüllen; schütteln wir, so schliefst sich das Ganze, sobald die Bewegung von aufsen aufhört. Dieselben Erscheinungen finden wir bei der Anhäufung immer gröfseren Körperchen jeder Gestalt, selbst bei kugelförmigen, wie z. B. bei einem Haufen Hirse, Weizen, Schrot oder jedem andern Stoffe. Wenn wir aber derartige Erscheinungen beim Wasser sehen wollen, so werden wir sie da nicht antreffen, da dasselbe, erhoben, sofort sich wieder ebnet, wenn es nicht vom einem Gefäfs oder einem andern äufseren Hindernis gehalten wird; ausgehöhlt schliefst sich sofort die Höhlung, und geschüttelt, fluktuiert es sehr lange und verbreitet seine Wogen weithin. Daraus kann man wohl schliefsen, dafs die kleinsten Teilchen des Wassers, in die dasselbe aufgelöst zu sein scheint (denn, da es weniger Konsistenz als das feinste Pulver hat, so hat es gar keine), etwas völlig anderes sind als die kleinsten, endlichen, teilbaren Teile, und ich finde keinen andern Unterschied, als den, dafs sie unteilbar sind. Mir scheint auch seine exquisite Transparenz dafür zu sprechen, denn nehmen wir den durchsichtigsten Krystall und fangen an ihn zu zerbrechen, zu stampfen, zu pulvern, so verliert er die Transparenz, und das umsomehr, je feiner er zerrieben ist, aber Wasser, welches völlig zerrieben ist, ist auch völlig diaphan.“[1])

GALILEI hat sich mit der Frage nach der Resistenz des Wassers lange beschäftigt.[2]) Hier ist die Antwort in dem Sinne gegeben, dafs die Wasserteilchen keine Spur von Kohäsion haben. Zur Erklärung werden die Aufstellungen herangezogen, die GALILEI bei seiner Behandlung des Unendlichen gewann. Die mechanische Teilung entspricht der fortgesetzten Zerlegung einer Strecke durch weitere und weitere Division. Wir sahen,

1) *Op.* XIII p. 43; OETT. p. 37.
2) Im *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua* etc. *Op.* XII.

dafs eine solche Teilung niemals bis zu den letzten Indivisibeln führen kann. Wird nun auf ganz andere Weise die unendliche Teilung erreicht, so mufs mit diesem Übergang ins Unendliche eine Wesensänderung verbunden sein. Diese Wesensänderung liegt hier im Übergang aus dem festen in den flüssigen Zustand. Auch die Zerpulverung des Krystalls enthält eine Anwendung seiner Unendlichkeitstheorie. Zerteilen wir den Krystall und pulvern wir ihn, so verliert er seine Transparenz, und das um so mehr, je feiner er zerrieben ist. Je weiter wir nämlich in der Teilung fortschreiten, desto mehr entfernen wir uns von der unendlichen Teilung, desto undurchsichtiger wird der Krystall.[1]) Das Wasser aber ist völlig, bis ins Unendliche zerrieben, und daher durchsichtig.

Diesen Auffassungen entsprechend, schliefst Galilei seine Erklärung des flüssigen Zustandes auch direkt an die Unendlichkeitsbetrachtungen an. „Was sollen wir sagen zu solchen Metamorphosen (nämlich dem Übergang eines Kreises in eine Gerade) beim Übergang aus dem Endlichen ins Unendliche? Und warum sollen wir uns dagegen sträuben, da wir beim Aufsuchen des Unendlichen bei den Zahlen es schliefslich bei der Einheit fanden? Wenn wir nun beim Zerbröckeln eines festen Körpers in viele Teile denselben aufs feinste zerpulvern in seine unendlich vielen Atome, die nicht mehr teilbar sind, warum sollten wir nicht sagen können, dieser Körper sei in ein einziges Kontinuum zurückgekehrt, vielleicht in eine Flüssigkeit, wie Wasser oder Quecksilber?“[2])

Hier spielt noch der Übergang zum Unendlichen, der bei Galilei der Rückgang zur Einheit ist, insofern hinein als in den Worten „der Körper sei in ein einziges Kontinuum zurückgekehrt“ eine physikalische Parallele angedeutet wird.

Die Annahme einer mangelnden Kohärenz der Wasserteilchen wurde ursprünglich durch Empirie gestützt. Hier soll uns der tiefere Grund für die Erscheinung gegeben werden in der Hypothese, das Flüssige sei ein solches, weil es in seine unendlich vielen indivisibeln Komponenten zerlegt sei. Den Übergang aber vom festen Zustand in den flüssigen soll eine mathematisch-metaphysische Spekulation über die Wesensänderung beim Übergang vom Endlichen zum Unendlichen verdeutlichen — eine höchst merkwürdige Verknüpfung zweier disparater Wissensgebiete.

Zu begreifen bleibt aber noch, wie denn die Auflösung in die indivisibeln Teile bewirkt werden kann, wo dies der fortgesetzten mechanischen Teilung unmöglich ist. Dazu wendet sich Galilei zu den Feuerteilchen zurück, freilich in anderer Absicht, als bei seiner ersten Heranziehung,

---

1) Hier bleibt die Transparenz des festen Körpers nicht erklärt.

2) *Op.* XIII p. 43; Oett. p. 37.

wo sie nur die Vakuen zu füllen haben.[1]) Jetzt fällt ihnen die Rolle zu, die letzte Zerlegung in die Uratome herbeizuführen. „Gold und Silber verflüssigen sich nicht eher, als bis die Indivisibeln des Feuers oder der Sonnenstrahlen (nämlich im Brennspiegel) sie auflösen und zwar in ihre ersten äufsersten unendlich vielen unteilbaren Komponenten." Dabei wird den Feuerteilchen eine äufserst heftige, schnelle Bewegung zuerteilt und diese Annahme wieder mit der Vermutung einer Lichtgeschwindigkeit verknüpft, die Galilei bekanntlich durch einen primitiven Versuch hoffte nachweisen zu können..

3. Endlich erklärt Galilei mit Hülfe seiner Atomistik noch die Erscheinungen der Verdünnung und Verdichtung. Die Anregung dazu kann ihm aus Aristoteles, vielleicht auch aus Heron zugeflossen sein. Heron zeigt ausführlich, dafs Vakuen angenommen werden müssen, wenn man die Verdünnung und Verdichtung z. B. der Luft begreifen will. Aber Galileis Auslassungen weichen hier weit von denen des Heron ab. Er stimmt diesem bei, wenn er ebenfalls Vakuen zur Erklärung der Phänomene für nötig hält, aber er möchte gern die Kontinuität des Stoffes mit den Peripatetikern beibehalten. Diesem Interesse entspringt die Auffassung des Kontinuums als einem von unendlich vielen indivisibeln Vakuen durchsetzten Apparate von ebensolchen Punkten. Wir sahen, dafs Galilei zur Erläuterung dieser Auffassung die „rota Aristotelis" heranzog. Diese löst nun für ihn die Aufgabe, Verdünnungen und Verdichtungen bei Erhaltung des Kontinuums herbeizuführen. Der mit dem gröfseren Kreise in Fig. 2 verbundene kleinere Kreis erzeugte eine von unendlich vielen Vakuen durchsetzte, also „verdünnte" Strecke. Denkt man sich entsprechend mit dem Kreise AB einen gröfseren Kreis verbunden, so würden entsprechende Überlegungen zeigen, dafs nach Galileis Auffassung bei der Wälzung Übereinanderlagerungen, d. h. Verdichtungen eintreten würden.[2]) In dieser Weise, deren nähere Erörterung keinen Gewinn für ein weiteres Eindringen mehr zeitigen würde, werden die Kontinuitätsbetrachtungen verwendet, um derartige Phänomene einer atomistischen Erklärung unter Beibehaltung der peripatetischen Forderung für den Körper zu erklären.

4. Nunmehr lassen sich die Einflüsse überblicken, die in Galileis Atomistik wirksam sind. Es ist dies zunächst die metaphysische Atomlehre der Alten überhaupt, die durch Aristoteles und vielleicht auch Lucrez vermittelt, damals Jedermann zur Kenntnisnahme offen dalag, und die erste Grundlage derartiger Betrachtungen der Materie abgeben konnte.

1) *Op.* XII p. 44; Oett. p. 38.

2) Erläuternde Figuren finden sich *Op.* XIII, Taf. I, Fig. 9; Oett. p. 45; Lasswitz *Gesch. d. Atomistik* II, p. 48.

Dazu tritt die physikalische Atomistik des Heron, die für die Auffassung des Vakuums wichtig war, aber auch in der eigentlich physikalischen Erörterung Galileis Einfluſs übte. Daneben führte das Studium der an die Atome anknüpfenden Fragen in die aristotelisch-scholastische Behandlung des Kontinuums und der Indivisibeln und wandte das Interesse von der Frage nach der Konstitution der Materie einer spekulativ-mathematischen Betrachtung zu. Schlieſslich verflochten sich hiermit neuplatonische Fäden, die über Cusanus zu unserm Denker führten und eine eigentümliche Auffassung und Einarbeitung des Unendlichkeitsbegriffs in den bisherigen Denkzusammenhang mit sich brachten.

Zugleich ergiebt sich, daſs Galileis Denken weit enger mit Ideenzügen aus dem Altertum und Mittelalter verknüpft ist, als gemeinhin angenommen wird, daſs die Verfolgung dieser Ideenzüge auch für das weitere Verständnis des Forschers lohnend sein dürfte und, daſs er intensiver in Bezug auf seine prinzipiell-philosophische Zergliederung gewisser Grundprobleme der Körperwelt betrachtet werden muſs, als bisher geschehen ist.

Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben.

Von G. Wertheim in Frankfurt a. M.

Johann Heinrich Rahn, latinisiert Rhonius[1]) (1622—1676), der Sohn des gleichnamigen Bürgermeisters von Zürich, hat 1659 ein Lehrbuch der Algebra veröffentlicht, das durch seinen Inhalt, mehr aber noch durch seine Form vor dem Schicksal bewahrt zu werden verdient, vollständig in Vergessenheit zu geraten. Der Titel des Buches lautet:

> Teutsche Algebra | Oder | *Algebraische Rechenkunst* | zusamt ihrem Gebrauch: | Bestehend | 1. In Auflösung verworner Mathematischer | Aufgaben. | 2. In Verhandlung allerhand Algebraischer Aequationen. | 3. In Erfindung unterschidlicher nuzlicher | Theorematum. | Dem Teutschen Liebhaber Mathematischer Künsten nach | einem neuen, und biebevor niemalen im Trukk ge- | sehenen Methodo zugefallen also | verfasset | Durch Johann Heinrich Rahn, Landvogt | der Grafschaft Kyburg. | Zu Zürich getrukt, Bey Johann Jacob Bodmer. | M DC LIX.

Der Zweck des Buches ist, wie Rahn in dem „Vorbericht" eingehend darlegt, die Algebra in ihrer neuen, von Vieta, Cartesius u. a. geschaffenen Form, die der Welt schon lateinisch und französisch mitgeteilt sei, in hochdeutscher Sprache darzustellen. Er habe dies auch dem Augsburger Edlen Leonhard Weisse versprochen, dessen Bekanntschaft er in Taynach, wo er sich zur Sauerbrunnenkur befunden, gemacht habe. Jetzt wolle er sein Versprechen, an das er inzwischen auch brieflich erinnert worden sei, halten und dadurch seinem Vaterlande deutscher Nation einen Dienst erweisen, obwohl seine eben erfolgte Ernennung zum Landvogt von Kyburg und der dadurch veranlaßte Umzug mit seinem weitläufigen Hauswesen nach seinem neuen Wohnort ihm nur wenig freie Zeit lasse.

1) Auf der letzten der zwölf nicht paginierten Seiten des Originalwerks, welche dem eigentlichen Text vorausgehen, kommt sowohl Rhonius wie Ronius vor. Der Artikel über Rahn in der *Allgemeinen deutschen Biographie* hat Moritz Cantor zum Verfasser.

In der That haben die Amtsgeschäfte des Verfassers, die auch mehrfach Reisen erforderlich machten, die Korrektheit des Druckes sehr beeinträchtigt. Da der Verleger sonst nicht weiter drucken wollte, wurde jemand, dessen Namen im Buche nicht genannt ist, mit der Revision der Bogen beauftragt. Es war dies ein alter Mann, dessen Augen schon schwach waren, und dem keine Brille mehr helfen wollte. Ihm war die Druckerei, wie dem Setzer die Materie ungewohnt. Ferner sagt er: „das bey meinen noch wenig übrigen tagen ich meine Soliloquia, Gott geheimer zu werden, mehrers haben sölle, alsz iemals, auf dasz im abscheid ich nicht ein frömdling seye vor Gott.“ Deshalb hat er mit Unlust, nur aus Pflichtgefühl die Arbeit übernommen, und es ist erklärlich, dafs sehr viele Druckfehler stehen geblieben sind (das Verzeichnis derselben umfafst sieben Druckseiten). Das hat aber nicht verhindert, dafs das Buch seiner Zeit grofsen Beifall gefunden hat. Leibniz rühmt es in seiner Arbeit: „De ortu, progressu et natura algebrae etc.“ (*Mathem. Schriften, herausgegeben von* C. J. Gerhardt, Bd. VII, S. 203), ein tüchtiger englischer Mathematiker hat es ins Englische übersetzt, und ein anderer englischer Mathematiker hat diese Übersetzung durch Zusätze bereichert.

Sehen wir jetzt, wie das Buch durch seinen Inhalt jenen Beifall verdiente.

Nach einer „Zuschrift“ an hochgestellte Gönner in Zürich und Schaffhausen (darunter seinen Vater), einem „Vorbericht“ und einem Lobgedicht des Pastors Georg Müller an den Verfasser behandelt dieser S. 1—60 an bestimmten Zahlen wie an Buchstabengröfsen die allgemeine Arithmetik. Er giebt und erläutert durch Beispiele die Gesetze der Operationen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen, einschliefslich der Potenzierung und der Radizierung. Die Ausziehung der Quadratwurzel und der Kubikwurzel wird an Beispielen eingeübt, die Ausziehung von Wurzeln höherer Grade wird nur allgemein berührt. Dem Rechnen mit Wurzelgröfsen ist ein besonderer Abschnitt gewidmet. In diesen ist S. 37—48 eine Tabelle aller ungeraden Zahlen unter 24000, soweit sie nicht durch 5 teilbar sind, eingeschaltet, welche wegen ihres doppelten Eingangs ein ganz modernes Aussehen hat. Jede der 12 Seiten ist in 21 Vertikalreihen geteilt, von denen die erste, die von den übrigen durch einen Doppelstrich getrennt ist, die beiden Endziffern der Zahlen 01, 03, 07, 09, 11, . . ., 99 enthält. Es sind das augenscheinlich 40 Endungen. Demgemäfs hat jede der 12 Seiten 41 Horizontalreihen, von denen die erste die Anfangsziffern der Zahlen enthält, 0, 1, 2, 3, . . ., 19 (soweit die erste Seite), 20, 21, . . ., 239. Wo die von den Anfangs- und den Endziffern einer Zahl ausgehenden Reihen sich schneiden, ist der Platz der Zahl, und hierhin hat Rahn den kleinsten Divisor der Zahl gesetzt, oder, wenn dieselbe eine

Primzahl ist, den Buchstaben p. Als eine besondere Eigentümlichkeit ist hervorzuheben, dafs bei den Quadraten der Primzahlen der kleinste Divisor, d. i. die Primzahl durch gröfseren Druck ausgezeichnet ist.

Der Rest des Buches (S. 61—188) ist der Algebra im engeren Sinne gewidmet. Zunächst sagt uns der Verfasser, wieviel Wurzeln eine Gleichung haben könne. „So gross das mäsz des vermögens ist, so vil wurzeln mag die Aequation befassen, sie seyen dann affirmat oder negat, oder ganz absurd oder unmöglich: Die *negat*-wurzeln heifset CARTESIUS *radices falsas*; weilen sie aber allein darum *negat* sind, dasz sie in der delineation sich in das gegenspil der *affirmat*-wurzeln kehren, so bedunken sie mich nicht weniger waarhaft seyn alsz die affirmaten: Darum so enthalte ich mich sie falsch zuheissen, und bleibe bey dem negat-wort, nach eigenschaft des zeichens — so solchen wurzeln angehenkt ist. Die ganz absurden wurzeln sind um ihrer selbs oder ihrer zeichen willen also bewandt, dasz sie den Aufgaben ganz unformlich entsprechen: solche nun werden mit dem zeichen ⁊ bemerket.

„So vil eine Aequation *dimensiones* oder vermögen hat, so vil mal mag sie dividiert werden durch ein *binomium* oder *residuum*, bestehende ausz der unbekanten quantitet und der wurzel.

„Die Aequation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$ kan dividiert werden durch $x - 4 \cdot x - 3 \cdot x - 2 \cdot x + 5$. Ist deszhalben

$$x = \begin{cases} +4 \\ +3 \\ +2 \\ -5 \end{cases} \text{ welches man probieren kan.“}$$

Weiter wird an den Beispielen 1) $zz - 6z - bb = 0$; 2) $zz + 6z - bb = 0$; 3) $z^3 + 12yzz + 27yyz - 27yyy = 0$ gezeigt, wie man durch Einführung einer neuen Unbekannten ($z - 3 = x$; $z + 3 = x$; $z + 4y = x$) das zweite Glied beseitigen kann. Wie man noch andere Glieder „auszlöschen“ oder „die ganze Aequation um einen grad des vermögens deprimieren“ könne, solle man bei CARTESIUS und anderen nachlesen, die alles genügend erklärt hätten. Dort finde man auch, wieviel positive und negative Wurzeln eine Gleichung besitze, wie dieselben zu vermehren und zu vermindern „und in widerwertige eigenschaft zu verwandeln“ seien, „wie in den unerfüllten Aequationen die lären stellen zuergänzen“ seien, „und was ein iede stell in den Aequationen gegen den wurzeln für eine relation habe“. Nach diesen Vorbemerkungen wird gezeigt, wie „alle 6 *species* der Algebraischen Arithmetic in den auflösungen gebraucht werden“, und nach Anführung des für die rechnende Geometrie wichtigen Pythagoreischen Lehrsatzes und des Satzes von der Proportionalität der Seiten zweier Dreiecke mit beziehungsweise gleichen Winkeln, wird eine grofse Anzahl

von Aufgaben, die teils rein arithmetisch sind, teils der rechnenden Geometrie angehören, eingehend behandelt. Nach dem „Vorbericht“ sind diese Aufgaben, soweit sie der Verfasser nicht selbst gebildet hat, aus Vieta, Cartesius, Schooten, Diophant, Clavius u. s. w. entnommen. Von den unbestimmten Aufgaben, die Rahn bringt, hebe ich Diophant II, 26; III, 3 und V, 19 hervor. Bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades verfährt Rahn zuerst „supputatorie“, d. h. „es wird durch blosses rechnen die Antwort auf die Aufgaben erforschet“. Sodann wird durch „den Stylum delineatorium oder Geometrischen Risz ein geleiches verrichtet.“ Weiter erörtert Rahn den Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen der einfachen und der halbierten (resp. verdoppelten), sowie der gedrittelten Winkel. Eine grofse Tabelle liefert, wenn 2 von den 7 Gröfsen: Radius, Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans, Cosecans gegeben sind, die Werte der 5 anderen. Nach diesen trigonometrischen Entwicklungen, die zum Teil für die Auflösung von Gleichungen Verwendung finden, wird die Aufgabe behandelt: Wenn die Radien von 3 (einander berührenden) Kreisen gegeben sind, den Radius des 4. Kreises zu berechnen, der die gegebenen berührt.

Den Schlufs des Buches bilden Bemerkungen über die Quadratur des Kreises. Ob dieselbe möglich oder unmöglich sei, läfst der Verfasser „an seinem ohrt gestelt seyn, dann in beyde wege gute gründ beygebracht werden könten“.

Was dem Buche ein besonderes Interesse verleiht, ist der Umstand, dafs der erläuternde Text, soweit er sich auf die verschiedenen Verbindungen der in Betracht kommenden Gröfsen oder Gleichungen bezieht, durch gut gewählte Zeichen ersetzt ist. Zu diesem Zwecke hat jede Seite einen dreiteiligen Rand; der innerste Teil enthält die Ordnungszahlen der betrachteten Gröfsen oder Gleichungen, der mittlere die Zeichen, welche die vorzunehmenden Operationen ausdrücken, der äufserste bleibt leer. Diese Einrichtung hat Rahn, wie er im Vorbericht sagt, von einer hohen und sehr gelehrten Person gelernt, die nicht genannt sein wolle. Man nimmt an, es sei dies der englische Mathematiker John Pell[1]) gewesen,

1) John Pell (1610—1685), der Sohn eines Geistlichen, war von 1643—1646 Professor der Mathematik in Amsterdam, übersiedelte dann auf Aufforderung des Prinzen von Oranien nach Breda, wo er bis 1652 blieb. Von 1654 bis 1658 war er politischer Agent Cromwells bei den protestantischen Kantonen der Schweiz. Bei seiner Rückkehr nach England wurde er Geistlicher. Die Liebe zur Mathematik scheint sowohl seinem Fortkommen in der Kirche, wie der Sorge für seine weltlichen Angelegenheiten hinderlich gewesen zu sein. Er geriet in Armut, verbrachte auch einige Zeit im Schuldgefängnis, und die Kosten seiner Beerdigung mufsten von einigen Freunden aufgebracht werden. Seine Lieblingsbeschäftigung ist die unbestimmte Analytik gewesen, über die er auch in Amsterdam Vorlesungen gehalten hat.

mit dem er Veranlassung und Gelegenheit hatte, persönlich zu verkehren.

Was nun die von Rahn angewandten *Zeichen* betrifft, so stimmen mit den jetzt gebrauchten nur das *Gleichheitszeichen* (=), das Zeichen der *Addition* (+) und dasjenige der *Subtraktion* (—) überein, ferner die Zeichen > (gröfser als) und < (kleiner als). Das von dem Engländer Robert Recorde etwa 100 Jahre vorher eingeführte Gleichheitszeichen scheint zu Rahns Zeiten noch nicht allgemein benutzt worden zu sein, da er es (S. 18) für nötig hält, dasselbe dem Leser vorzustellen: „Bey disem anlaasz hab ich das namhafte gleichzeichen = zum ersten gebraucht, bedeutet *ist gleich*, alsz $2a = 4$ heisset $2a$ *ist gleich* 4.“ Das Zeichen der *Multiplikation* ist *, ferner bedeutet ⁑ × „kreuzweise multipliziert“. Klammern wendet Rahn nicht an, sondern er stellt die Faktoren, auch wenn sie mehrteilig sind, einfach neben einander und setzt dazwischen das Zeichen *. Häufig schreibt er bei mehrteiligen Faktoren aber auch den einen unter den andern und setzt daneben und ebenso darunter einen Strich. $\begin{array}{c|}ab\\ \underline{a+b}\end{array}$ bedeutet also, dafs ab mit $a + b$ multipliziert werden soll.

Nach dem Wurzelzeichen setzt er über einen mehrteiligen Radikanden einen horizontalen Strich, er schreibt z. B. $\sqrt{ff + gg}$.

Das Zeichen der *Division* ist ⁚ · *Auf eine Potenz erheben*, wofür Rahn *involvieren* sagt, wird durch @ ausgedrückt, und zwar wird die zu potenzierende Gröfse links, der Exponent rechts neben dieses Zeichen gesetzt. Soll also die zweite Gröfse, resp. Gleichung auf die dritte Potenz erhoben werden, so schreibt Rahn auf den mittleren Rand $\dot{2}$ @ 3. Der Punkt über der 2 drückt aus, dafs die zweite Gröfse (Gleichung) potenziert werden soll, nicht die Zahl 2. Das Resultat der Potenzierung, die Potenz, wird ganz wie wir es thun, ausgedrückt. a @ 2 giebt aa (zuweilen schreibt Rahn auch a^2), a @ 3 giebt a^3, u. s. w. Das Zeichen des *Radizierens* (Rahn sagt *evolvieren*) ist ω, dabei kommt der Wurzelexponent rechts vom Zeichen zu stehen. $\dot{5}$ ω 4 bedeutet: Man soll aus der Gröfse (Gleichung) (5) die vierte Wurzel ziehen. Das Wurzelzeichen ist bei Rahn wie bei uns $\sqrt{\ }$. Er schreibt $\sqrt{\ }$, $\sqrt{}\sqrt{}$, $\sqrt{}\,C$, $\sqrt{}\,CC$ für beziehungsweise $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$. Bei *Proportionen* ist seine Bezeichnung die von Oughtred (1631) eingeführte. Er schreibt also $3 \cdot 5 :: 12 \cdot 20$, wo wir $3 : 5 = 12 : 20$ schreiben. Unser *„folglich“* drückt er auf zwei Arten aus, entweder durch das Zeichen ∴ oder durch ein einfaches (auf den mittleren Rand gesetztes) Komma. Rahn schreibt also zum Beispiel $a = 4$. ∴ $aa = 16$. Wenn auf dem mittleren Rande $\dot{24}$, $\dot{3}$ steht, so heifst das: „Aus den Gleichungen (24) und (3) ergiebt sich.“ Steht auf dem

mittleren Rande $\overset{\cdot}{5}$,, so heifst das: „Aus der Gleichung (5) folgt *sofort*.“ Wird aus einer Proportion gefolgert, dafs das Produkt der äufseren Glieder gleich dem der inneren sei, so steht auf dem mittleren Rand auch wohl die Ordnungszahl der Proportion und daneben, durch ein Komma getrennt, das Wort: ergò.

Für die quadratische Ergänzung hat Rahn das Zeichen $E\square$. Er setzt dasselbe auf den mittleren Rand neben die Ordnungszahl der zu ergänzenden quadratischen Gleichung; daneben im Text steht dann diese Gleichung mit ihrer Ergänzung.

Endlich haben wir noch zu betrachten, wie Rahn *die unbekannten Gröfsen* bezeichnet. Er sagt darüber: „Es pflegt der niemal genugsam gerühmte Cartesius den bekanten quantiteten die vordern, und den unbekanten die hindern buchstaben des Alphabets zu geben, dasz ich aber bekantes und unbekantes mit grossen und kleinen buchstaben unterscheide, bedunkt mich um etwas bequemer seyn, dann also können allen fürfallenden quantiteten, nach ordnung der Aufgab und des Alphabets buchstäbliche naumen aufgetragen werden, dasz wann man eine Geometrische figur und ihre solution conferiert, leichtlich gemerket wird, in was für einer ordnung der procesz hergegangen seye.“ In den Text-Aufgaben, geometrischen wie algebraischen, bezeichnet Rahn also die Unbekannten der Reihe nach mit $a, b, c, \ldots$ Sobald eine derselben bestimmt ist, setzt er für sie den betreffeuden grofsen Buchstaben. Wenn es sich aber um die blofse Auflösung vorgelegter Gleichungen handelt, wendet Rahn wie Cartesius für die Unbekannten die letzten Buchstaben des Alphabets an und behält diese Buchstaben auch bei.

Zum besseren Verständnis der Rahnschen Bezeichnungsweise lasse ich zwei Beispiele, genau wie er sie giebt, hier folgen:

Aufgab. Drey theilen eine Summ, der erste gibt den andern beyden so vil sie schon haben: der andere gibt den übrigen sovil sie iez haben, das tuht auch der dritte: nach solchem besitzt ieder 8. Wievil hat ieder anfangs gehabt.

	erst	ander	dritt
1	$a.$	$b.$	$c.$
2	$a-b-c.$	$2b.$	$2c.$
3	$2a-2b-2c.$	$-a+3b-c.$	$4c.$
4	$4a-4b-4c.$	$-2a+6b-2c.$	$-a-b+7c.$ hat

ein ieder nach der letsten theilung.

$\dot{4},$	5	$4a - 4b - 4c = 8$
$\dot{4},$	6	$-2a + 6b - 2c = 8$
$\dot{4},$	7	$-a - b + 7c = 8$
$\dot{5} \div 4$	8	$+a - b - c = 2$
$\dot{6} : 2$	9	$-a + 3b - c = 4$
$\dot{7} + \dot{8}$	10	$-2b + 6c = 10$
$\dot{8} + \dot{9}$	11	$+2b - 2c = 6$
$\dot{10} + \dot{11}$	12	$4c = 16$
$\dot{12} \div 4$	13	$C = 4$
$\dot{11} * 3$	14	$6b - 6c = 18$
$\dot{10} + \dot{14}$	15	$4b = 28$
$\dot{15} \div 4$	16	$B = 7$
$\dot{13} + \dot{16}$	17	$b + c = 11$
$\dot{8} + \dot{17}$	18	$A = 13$
		Hat hiemit der erste 13, der andere 7, und der dritte 4.

Evolution der Cubischen Aequationen.

$z = ?$	1	$z^3 = pz + q$		$(z^3 = 63z + 370$
Es seye	2	$z = t + u$	Bis hiehar alles geleich	
$\dot{2}$ ◎ 3	3	$z^3 = ttt + 3ttu + 3tuu + uuu$		
$\dot{3},$	4	$z^3 = \frac{3tu}{t+u}$ und $ttt + uuu$		
$\dot{4}, \dot{2}$	5	$z^3 = \frac{3tu}{z}$ und $ttt + uuu$		
$\dot{5}, \dot{1}$	6	$pz + q = \frac{3tu}{z}$ und $ttt + uuu$		
$\dot{6},$	7	$\frac{p}{z} = \frac{3tu}{z}$ darum dann		
$\dot{6} - \dot{7}$	8	$q = ttt + uuu$		370
$\dot{7} \div z$	9	$p = 3tu$		63
$\dot{9} \div 3$	10	$\frac{1}{3}p = tu$		21
$\dot{8}$ ◎ 2	11	$qq = t^6 + 2ttt\ uuu + u^6$		136900

$\dot{10}$ ⑨ 3	12	$\frac{1}{27}p^3 = ttt\ uuu$	9261
$\dot{12}$ ✱ 4	13	$\frac{4}{27}p^3 = 4ttt\ uuu$	37044
$\dot{11} - \dot{13}$	14	$qq - \frac{4}{27}p^3 = t^6 - 2ttt\ uuu + u^6$	99856
$\dot{14}$ cu 2	15	$\sqrt{qq - \frac{4}{27}p^3} = ttt - uuu$	316
$\dot{8} + \dot{15}$	16	$q + \sqrt{qq - \frac{4}{27}p^3} = 2ttt$	686
$\dot{16} \div 2$	17	$\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = ttt$	343
$\dot{17}$ cu 3	18	$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = t$	7
$\dot{8} - \dot{15}$	19	$q - \sqrt{qq - \frac{4}{27}p^3} = 2uuu$	54
$\dot{19} \div 2$	20	$\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = uuu$	27
$\dot{20}$ cu 3	21	$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = u$	3
$18 + 21$	22	$\sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{c \cdot \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$	$10 = z$
		$(= t + u$	
		$(= z$	

Hierauss nun erhellet, dass eben die Aequation komt, deren erfindung Cardano, oder Scipioni Ferreo zugemessen, und so sehr erhebt wird.

Were die Aequation also $z^3 = -pz + q$. so wird $t - u$ für z genommen, und komt alszdann

$$\sqrt{c \cdot \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{c \cdot -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} = z.$$

Weren aber in diser Aequation $z^3 = pz + q$ die $\frac{1}{4}qq$ kleiner alsz $\frac{1}{27}p^3$, da findet diser schlag nicht plazz, (alszdann in obigem processz klar gesehen wird) sondern musz durch ein ander mittel geschehen, wie hernach an seinem ohrt folget.

Ein Exemplar dieses Buches wurde 1662 Thomas Brancker[1]) von einem Freunde gegeben, der es gern studiert hätte, aber kein Deutsch

1) Thomas Brancker (1633—1676), nicht zu verwechseln mit Lord William Brouncker, war erst Geistlicher, dann (von 1668 an) Lehrer der Mathematik.

verstand. Der Name dieses Freundes ist in der Vorrede, die der folgenden Darlegung zu Grunde liegt, durch die Buchstaben M. F. T. angedeutet. Es ist also jedenfalls nicht John Pell gewesen.[1]) Brancker versprach, eine englische Übersetzung anzufertigen, und sobald er die Zeit dazu fand, korrigierte er die zahlreichen von Rahn in seinem Verzeichnis angegebenen Druckfehler des Originals und fing dann an zu übersetzen. Am 18. Mai 1665 erhielt er die Druckerlaubnis, und das Werk wurde in die Druckerei geschickt. Brancker hatte nur viele von Rahn nicht bemerkte Fehler berichtigt, aber weder an den Regeln noch an den Beispielen etwas geändert. Auch die Tabelle der ungeraden Zahlen mit ihren Divisoren sollte genau nach dem Original abgedruckt werden.

Kurze Zeit darauf hörte Brancker, in London lebe ein vornehmer Herr, den er gut thue mit seinem Vorhaben bekannt zu machen, bevor er mit dem Druck fortfahre. Als er zu dem Herrn vorgelassen war, fand er, dafs derselbe imstande und auch willens war, ihn zu leiten, soweit seine Zeit es ihm erlaubte. Der Name dieses Herrn ist auf dem Titelblatt der englischen Übersetzung durch die Buchstaben D. P., in der Vorrede durch D. J. P. angedeutet. Er zeigte Brancker, wie man die Divisoren-Tabelle anfertigen, prüfen und beliebig fortführen könne, und riet ihm, dieselbe bis 100000 fortzusetzen. Während der Ausrechnung und des Drucks dieser Tabelle wolle er einige Aufgaben Rahns durchsehen und einige neue bearbeiten. Brancker solle es dann frei stehen, diese seine Arbeit zu veröffentlichen oder unveröffentlicht zu lassen.

1) Das wird von Cantor (*Vorlesungen* II², S. 777) und noch von H. Konen (*Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$, Leipzig 1901, S. 33) vorausgesetzt. Die Veranlassung zu diesem Mifsverständnis scheint John Wallis gegeben zu haben, der jederzeit — wo es nur immer anging — wissenschaftliche Leistungen für Engländer in Anspruch nahm. Da nun Rahn mit Pell verkehrte und, wie er selbst sagte, die Einrichtung des dreifachen Randes einem Manne, der nicht genannt sein wolle, verdankte, so schlofs Wallis sofort, Rahn habe alle seine Zeichen von Pell erhalten, ja das ganze Buch Rahns sei von Pell verfafst. So sagt er im 57. Kapitel seiner *Algebra* (*Opera* Vol. II, 1693, p. 234): „Extat tamen ejusdem (Pellii) Tractatus, lingua Germanica primum editus, Tiguri, anno 1659; sub nomine Rhonii, qui ejusdem olim fuerat discipulus. Idemque (vel ipsius magna pars) in Anglicanam linguam conversus a Thoma Brancker . . .; atque ab ipso Pellio recognitus et non parum immutatus . . .“ Noch deutlicher drückt er sich in der Arbeit: „Combinationes etc.“ (l. c. p. 510) aus, wo er bei der Betrachtung der aliquoten Teile der Zahlen von der Branckerschen Tabelle spricht. Er sagt: „Habetur ad calcem Algebrae D. Johannis Pell (quam ex Germanico sermone in Anglicanum convertit Thomas Branker, non inconsulto ipso Pellio, ediditque Londini, Anno 1668) Tabella compendiaria . . .“. Das Vertrauen auf die Zuverlässigkeit des Wallis hat auch G. Vacca (*Sui precursori della logica matematica*; Revue de mathématiques 6, 1899, 122—123) zu der Äufserung bewogen, Pells Buch sei in erster Auflage deutsch, in zweiter englisch erschienen.

Die Tabelle war gedruckt, auch waren 12 Bogen der Übersetzung fertig gestellt, als Brancker die versprochenen Änderungen erhielt. Dieselben beginnen auf S. 100 und gehen weiter bis zum Schlufs des Werks, welches — abgesehen von den 50 besonders paginierten Seiten der ans Ende des Buches gestellten Divisoren-Tabelle — 198 Seiten enthält. Schon vorher sind 4 von D. J. P. gelieferte Seiten (79—82) vorhanden, welche Aufgaben aus der rechnenden Geometrie geben. Von der deutschen Ausgabe sind die letzten 8 Bogen (64 Seiten) unübersetzt geblieben. Wieviel statt dieses Restes später noch veröffentlicht werden würde, will Brancker noch nicht sagen; das hänge davon ab, ob er am Leben und gesund bleiben werde, auch von der Aufnahme, die sein Buch bei den Freunden mathematischer Studien finden würde.[1])

Man nimmt allgemein an, der Verfasser der Zusätze zu Rahns Algebra sei John Pell gewesen. Diese Annahme findet eine Bestätigung in den Buchstaben D. J. P., die sich *Dominus Ioannes Pellius* lesen lassen. Bei der bekannten Vorliebe Pells für die unbestimmte Analytik erklärt sie auch den Umstand, dafs die Zusätze, von denen unten eingehend die Rede sein wird, sämtlich entweder aus unbestimmten Aufgaben bestehen oder die Vervollständigung der Lösungen solcher Aufgaben zum Gegenstand haben. Eigentümlich bleibt freilich die Ehrerbietung, mit welcher Brancker[2]) sich dem Verfasser der Zusätze nähert, falls dieser kein Höherer als Pell gewesen ist. Denn im Grunde war Brancker seinem Amtsbruder Pell — seitdem dessen Gönner Cromwell (1658) gestorben war — gesellschaftlich gleichstehend.

Die Schwierigkeit, die darin liegt, Branckers grofsen Respekt vor Pell zu erklären, genügt freilich nicht, die Annahme, dafs Pell die Zusätze geschrieben habe, zu entkräften.[3]) Ebensowenig wird dieselbe durch

1) Es ist nichts davon bekannt, dafs Brancker eine Forsetzung seines Werkes geliefert habe; die Übersetzung der Rahnschen Algebra ist also auch unvollständig geblieben.

2) Von übergrofser Höflichkeit scheint Brancker sonst nicht gewesen zu sein. Wenn jemand wissen wolle, sagt er in der Vorrede, worin er bei seiner Übersetzung von dem Original abgewichen sei, und weshalb er diese Änderungen vorgenommen habe, so möge er die Übersetzung mit dem Original vergleichen. Ein Exemplar des letzteren sei in Frankfurt a. M. zu kaufen.

3) Diese Annahme wird zur *völligen Gewifsheit* erhoben durch einen eigenhändigen Brief Rahns an Pell. Der Brief, von dem ich durch die Freundlichkeit des Herrn G. Vacca Kenntnis erhalten habe, als meine Arbeit schon in der Druckerei war, ist dem im British Museum befindlichen Exemplar des Branckerschen Buches beigelegt. Herr Vacca schreibt mir, dafs dieses Exemplar im Besitze Pells gewesen und von demselben an mehreren Stellen mit Randbemerkungen versehen ist. Der Anfang des Briefes lautet: „Vir celeberrime. A studioso quodam algebram non

die Erwägung umgestofsen, dafs PELL gerade in diesem Falle die Geheimhaltung seines Namens verlangt haben sollte, während er doch in wissenschaftlichen Streitfragen — ich erinnere an seinen Streit mit LONGOMONTANUS über die Quadratur des Kreises — ganz offen hervorgetreten ist. Oder hat er vielleicht selbst seine Zusätze nicht für sehr wertvoll gehalten? Dieselben sind nämlich nicht im stande, eine besonders günstige Meinung über ihren Verfasser zu erwecken, und es ist auffallend, dafs BRANCKER, der doch von seinen Zeitgenossen für einen tüchtigen Mathematiker gehalten wurde, sie überhaupt aufgenommen, es nicht vielmehr vorgezogen hat, statt derselben eine Übersetzung auch des letzten Teils des Originals zu geben.

Die Zusätze bestehen, wie schon oben bemerkt worden ist, 1) in der Vervollständigung der von RAHN gegebenen Lösungen einiger Aufgaben und 2) in neu hinzugefügten Aufgaben. RAHN hat nämlich in der Regel die Lösung nur bis zur Bewältigung der Hauptschwierigkeit fortgeführt, die leichten Schlufsrechnungen dem Leser überlassend. PELL[1]) giebt die Lösung bis ans allerletzte Ende, stellt dann die Antworten noch besonders zusammen und läfst sogar die vollständig durchgeführten Proben nicht fort. Die erste von PELL ergänzte Aufgabe RAHNS (S. 110, bei BRANCKER S. 100): „Zwo Zahlen finden, dasz das quadrat ihrer summ, iede darvon abgezogen, ein quadrat hinterlasse“ nimmt im Original nicht ganz eine Seite ein, in der englischen Übersetzung mehr als zwei Seiten. Freilich schliefst RAHN, der die beiden unbekannten Zahlen als Funktionen einer dritten Zahl d ausgedrückt hat, nachdem d bestimmt worden ist, mit den Worten: „Hiemit ist alles durch D expliciert, darum können alle unbekante quantiteten hierausz erklärt, und namhaft gemachet werden.“ PELL dagegen füllt noch mehr als eine Druckseite mit den leichtesten Rechnungen aus, die wirklich nicht den Platz verdienen, den sie einnehmen. Der von DIOPHANT V, 19 behandelten Aufgabe: „Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird, einen Kubus giebt“, widmet RAHN $4\frac{1}{2}$, PELL

---

amplius meam sed multis nominibus tuam, mihi ex munificentia tua transmissam accepi, unde colligo, tot annorum decursu, memoriam mei adhuc apud te vigere . . .

Tiguri d. 17 aprilis 1675. HENR. RHONIUS
Tig. Senator, Quaestor et
rerum criminalium praeses.

PELL hat am Rande hinzugefügt: „Received this letter mai XI 1675.“

1) Bei seinem Interesse für die unbestimmte Analytik ist es eigentlich kaum begreiflich, dafs PELL den 1657 von FERMAT den englischen Mathematikern hingeworfenen Fehdehandschuh nicht aufgenommen hat. Sollte er in der Schweiz von dieser Herausforderung gar nichts gehört haben?

21 Druckseiten. Die Aufgabe: „Gleichschenklige Dreiecke (in ganzen Zahlen) von gleichem Umfang und gleicher Fläche zu finden" füllt bei Rahn 8, bei Pell (mit allen Anhängseln) 62 Seiten. Der Jesuit Jacobus de Billy erledigt sie in seinem *Diophantus redivivus* I, p. 140 auf 2 kleinen Seiten. Zuweilen ist allerdings Pells Vervollständigung der Lösung als eine wirkliche Verbesserung anzusehen. So führt Rahn (S. 88) die Lösung der Aufgabe: „Ausz drey gegebenen seiten eines obliquanglischen Triangels sein aream und senkel zufinden" nur so weit fort, bis er die Projektion einer Seite auf eine andere gefunden hat, und sagt dann: „Hierausz ist die senkellini und area gar leichtlich zuschliefsen." Pell (S. 79) arbeitet weiter, bis er die Heronische Formel hergeleitet hat.

Hinzugefügt hat Pell u. a. die folgenden Aufgaben:

1) Ein rechtwinkliges Dreieck (in rationalen Zahlen) zu finden, dessen eine Kathete das Quadrat der anderen sei (S. 80). Dieselbe Aufgabe löst Diophant VI, 25.

2) Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat ihrer Summe bei Subtraktion einer jeden der Zahlen ein Quadrat als Rest gebe (S. 102). Für 2 Zahlen ist die Aufgabe (= Diophant II, 26) von Rahn S. 110, von Pell S. 100 behandelt. (s. o.)

3) Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Kubus ihrer Summe bei Addition jeder der Zahlen ein Kubus bleibe (S. 105). Dieselbe Aufgabe behandelt Diophant V, 18. Pell widmet ihr zwar 5 Seiten, giebt aber auch nur dieselbe singuläre Lösung wie Diophant, ohne eine allgemeine Bemerkung daran zu knüpfen.

In den *Bezeichnungen* hat sich Brancker ganz nach Rahn gerichtet; nur hat er die Punkte über den Ordnungszahlen der Gröfsen resp. Gleichungen weggelassen. Die *Figuren* zu den geometrischen Aufgaben sind in der englischen Übersetzung auf einem Blatt vereinigt, während bei Rahn jede Figur da, wo sie gebraucht wird, in den Text gedruckt ist; auch hat Rahn zur Bequemlichkeit des Lesers eine und dieselbe Figur nötigenfalls mehrmals gegeben.

Der Titel der englischen Übersetzung ist:

> *An Introduction* | to | *Algebra,* | Translated out of the | *High-Dutch* into *English,* | By Thomas Brancker. M. A. | Much Altered and Augmented by D. P. | Also | A Table of Odd Numbers less than One Hundred Thousand, | Shewing | Those that are *Incomposit,* | And | Resolving the rest into their Factors | or Coefficients, &c. | Supputated by the same Tho. Brancker. | London, Printed by W. G. for Moses Pitt at the White-Hart in Little Britain. 1668. |

Das Buch[1]) ist — wie das Original — ein Quartband und umfafst 198 Seiten. Die Zusätze PELLS endigen auf S. 192 mit der Erklärung, der Verfasser sei durch andere Angelegenheiten gezwungen, hier abzubrechen („Other affairs constrain me to break off and here to make *an end*"). Es folgen dann noch S. 193—198 Bemerkungen über die Herstellung, die Einrichtung und den Gebrauch der mehrfach erwähnten Tabelle der ungeraden Zahlen unter 100000 mit ihren kleinsten Divisoren, ferner die Produkte aller unter $\sqrt{100000} \sim 316$ liegenden Primzahlen mit den Zahlen 2 bis 9, endlich ein Verzeichnis der in der Tabelle trotz aller Sorgfalt stehen gebliebenen Druckfehler. Den Schlufs bildet die Tabelle selbst, welche 50 besonders paginierte Seiten umfafst.

BRANCKERS Übersetzung der RAHNschen Algebra hat für die Geschichte der Mathematik noch ein besonderes Interesse. Bekanntlich wird die unbestimmte Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$, zu deren Lösung in ganzen Zahlen FERMAT 1657 die englischen Mathematiker herausgefordert hatte, nach PELL benannt, obwohl die erste veröffentlichte Lösung die von WALLIS und Lord BROUNCKER gemeinschaftlich gefundene und von einem Verdienste PELLS um die Gleichung nichts bekannt geworden ist. Man nimmt allgemein[2]) an, diese falsche Benennung sei dadurch veranlafst, dafs unter PELLS Zusätzen zu BRANCKERS Übersetzung der RAHNschen Algebra sich auch eine Wiederholung der WALLIS-BROUNCKERschen Lösung jener Gleichung ohne Angabe der Erfinder befinde, und dafs EULER und nach ihm andere PELL selbst für den Erfinder genommen hätten. KONEN macht jedoch in seiner oben angeführten Schrift darauf aufmerksam, dafs das Exemplar der BRANCKERschen Übersetzung, welches sich in der Universitätsbibliothek zu Göttingen befindet, die Lösung der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ nicht enthält. Mir ist es trotz aller Bemühungen[3]) nicht

1) Herr G. ENESTRÖM hat die Güte gehabt, mich auf die Anzeige des BRANCKERschen Buches in den Philosophical Transactions (Vol. III, 1668, S. 688—690) aufmerksam zu machen. In dieser Anzeige wird nach Angaben über die Darstellungsweise und den Inhalt des Buches mitgeteilt, welche Teile des Originals BRANCKER unübersetzt gelassen habe. Auch wird die Hoffnung ausgesprochen, die in der Vorrede erwähnte Person — der Name wird nicht genannt — werde bald über diese nicht übersetzten und andere die Gleichungen betreffende Gegenstände schreiben. Wenn es weiter in Betreff der Tabelle der ungeraden Zahlen heifst, die bisherigen Tabellen gingen nicht über 10000 hinaus, so ist das ein Irrtum, da sich RAHNS Tabelle bis 24000 erstreckt.

2) HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, S. 203. Danach CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², S. 777. Encyclopaedia britannica, Bd. 18 (1885) unter PELL etc. etc.

3) Um andere, die sich für die Sache interessieren, von unnützen Schritten abzuhalten, bemerke ich, dafs die Königl. Bibliothek in Berlin, sowie die Universitäts-

gelungen, ein anderes Exemplar als das Göttinger, für dessen Nachweis ich Herrn G. Eneström zu Danke verpflichtet hin, einzusehen. Dasselbe ist unzweifelhaft vollständig, aher die sogenannte „Pellsche Gleichung" wird darin nicht einmal erwähnt. Die Frage nach dem Ursprung dieser falschen Benennnng hleiht also eine offene und mufs hier unerörtert bleiben, da Konen alles gesagt hat, was sich gegenwärtig darüher sagen läfst, freilich ohne zu einer hefriedigenden Antwort zu gelangen. Hoffentlich ühernimmt es ein Fachgenosse jenseit des Kanals, die Sache haldigst aufzuklären.

---

bibliotheken in Leipzig, Erlangen, Tübingen, Zürich und Cambridge das Buch nicht haben. Das Originalwerk von Rahn besitze ich selbst.

Pseudo-versiera e Quadratice geometrica.

Di Gino Loria a Genova.

A complemento di quanto esposi nella mia nota *Versiera, visiera e pseudo-versiera* (Biblioth. Mathem. 1897, p. 7—12 e 33—34) mi permetto di aggiungere quì alcune osservazioni.

La curva che io ho chiamata *pseudo-versiera* venne utilizzata da Leibniz a stabilire sua celebre formola

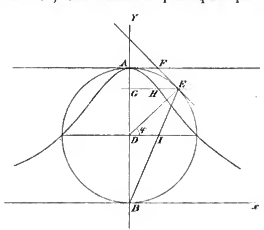
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

ciò valse ad attrarre sopra quella curva l' attenzione di Huygens il quale, addì 7 Novembre 1674, scriveva al suo antico discepolo: «Pour ce qui est de la courbe Anonyme, qui sert à Votre demonstration, j'avois envie de la baptizer en lui donnant quelque nom composé des noms des deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoide des anciens. Mais ayant vu depuis que cette mesme ligne a esté premièrement mis en avant par J. Gregorius, je crois qu'il lui faut laisser le droit de la nommer comme il voudra» (Leibniz, *Mathematische Schriften* ed. Gerhardt, T. II, p. 16, oppure *Oeuvres complètes de* C. Huygens, T. VIII, p. 393).

J. Gregory — a cui quindi deve, sino a prova in contrario[1]), farsi risalire l' invenzione della linea in questione — non sembra avere usato del diritto che gli veniva così esplicitamente riconosciuto. Ciò non ostante, prima che si spegnesse il Sec. XVII, quella curva riceveva il nome di *quadratrice geometrica*, suggerito dall' applicazione che

1) Siffatta prova *sembra* esistere. Infatti gli editori delle opere di Huygens, nella nota 4) a pag. 394 del T. VII, asseriscono che lo scritto del Gregory a cui si riferisce Leibniz è quello intitolato *Exercitationes geometricae* a Jacobo Gregorio (Londini M · DC · LXVIII). Ora l' unico articolo di quest' opera a cui essi potevano alludere è quello intitolato Quadratura cissoidis; ma ivi è adoperata, come linea ausiliare, *non la pseudo-versiera, ma la versiera*; per conseguenza *o* l' opera a cui pensava Huygens non è quella indicata, *oppure* (ciò che sembra più verosimile) il sommo geometra olandesc ha confuse due curve fra loro differenti.

essa riceve al problema della quadratura del circolo. Lo propose l' OZANAM nella sua *Géométrie pratique* (Paris 1684), opera a cui egli si riferì più tardi nel suo *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691, p. 108); lo ripetè poi nel suo *Cours de mathématiques*, la cui prima edizione porta la data 1693 e di cui io ho sott' occhio la „nouvelle édition revue et corrigée". Nel « Tome troisième, qui contient la géométrie » (Paris 1699) è indicata (p. 111) di quella curva la generazione seguente: « Dato un circolo di diametro $AB = 2a$, se ne consideri un punto qualunqua E; si conduca



EG perpendicolare ad AB e si determini l' intersezione F delle tangenti al dato circolo in A e E; finalmente si porti, sopra GE, $GH = AF$; il luogo del punto H è una quadratrice geometrica ». Notisi che se I è il punto d' intersezione della retta BE con la perpendicolare condotta al diametro AB dal centro D del circolo, risulta $AF = DI$, donde una semplificazione alla costruzione precedente, ed un metodo semplicissimo per ottenere la rappresentazione analitica delle curva. Pongasi infatti ang $ADE = \frac{\pi}{2} - \varphi$, sarà ang $DBI = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ e quindi

$$DI = a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = a \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}.$$

D' altronde

$$BG = a + a \operatorname{sen}\varphi.$$

Presa quindi B per origine e BA per asse delle y di un sistema cartesiano ortogonale, per rappresentare la curva si possono adoperare le equazioni seguenti:

$$x = a \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}, \qquad y = a\,(1 + \operatorname{sen}\varphi).$$

Eliminando φ si ottiene

$$y = \frac{2a^3}{x^2+a^2} \qquad \text{ossia} \qquad x^2 y = a^2(2a-y),$$

che non differisce dall' equazione (6) della pseudo-versiera data a pg. 11 del mio articolo citato.

L' area compresa tra la quadratrice geometrica e l' asse delle x è data da

$$(1) \qquad 2\int_0^\infty \frac{2a^3\,dx}{x^2+a^2} = 2\cdot \pi a^2,$$

donde emerge che il problema di determinare quell' area coincide con quello di quadrare il cerchio. Che poi col mezzo di essa si possa ottenere una «quadratura arithmetica» nel senso di LEIBNIZ, si rende palese con l' osservazioni seguenti.

α) Se $x < a$ si ha

$$\frac{2a^3}{x^2+a^2} = 2a\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^4-\cdots\right\}$$

$$\int\frac{2a^3\,dx}{x^2+a^2} = 2a^2\left\{\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)^5-\cdots\right\}$$

$$(2) \qquad \int_0^a\frac{2a^3\,dx}{x^2+a^2} = 2a^2\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right\}$$

β) Se $x > a$ si ha in vero:

$$\frac{2a^3}{x^2+a^2} = 2a - \frac{2ax^2}{x^2+a^2} = 2a - 2a\left\{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{a}{x}\right)^4-\cdots\right\} =$$

$$= 2a\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{x}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$\int\frac{2a^3\,dx}{x^2+a^2} = 2a^2\left\{-\left(\frac{a}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\cdots\right\}$$

$$(3) \qquad \int_a^\infty\frac{2a^3\,dx}{x^2+a^2} = 2a^2\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right\}$$

Dalle (2) e (3) si deduce:

$$(4) \qquad \int_0^\infty\frac{2a^3\,dx}{x^2+a^2} = 4a^2\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right\},$$

relazione che, paragonata alla (1) riconduce alla formola di LEIBNIZ, ricordata in principio.

È strano che la quadratrice geometrica sia stata ben tosto completa-

mente dimenticata. L' *Encyclopédie méthodique* non ne fa menzione, ed il Montferrier, nel suo *Dictionnaire des sciences mathématiques* si esprime (T. II, Bruxelles 1838, p. 390) in modo da mostrare che egli ritiene essere trascendenti tutte le quadratrici. Nemmeno le preziose *Notes de bibliographie des courbes géométriques* del Brocard fanno menzione delle curva di Gregory-Ozanam. Fa eccezione soltanto il P. Caraccioli, il quale nel suo *De lineis curvis liber* (Pisis 1740, p. 127 e seg.) ne fece uno studio accurato: gli è anzi questa operetta, modesta e dimenticata, che mi rivelò l' esistenza della quadratrice geometrica e mi spinse a fare la piccola ricerca storica di cui feci ora conoscere i risultati.

Genova, 5 Luglio 1901.

Über einen anscheinenden Defekt im sechsten Band von Boncompagnis „Bullettino".

Von G. Valentin in Berlin.

In der Anfrage **69** (Biblioth. Mathem. 1898, 64) hat Herr Steinschneider darauf hingewiesen, dafs in einigen Exemplaren des 6. Bandes des Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. die Seiten 151 und 152 fehlen und über den Grund dieses Defektes um Auskunft ersucht. Im Folgenden werde ich diese Frage erledigen.

Vom Märzheft des genannten Bandes existieren zwei Ausgaben, welche sich nur durch den Schlufsartikel, einen Aufsatz Boncompagnis über eine Anzahl von Briefen Lagranges in italienischer Sprache, unterscheiden.

In der ersten Ausgabe ist der Titel dieser Arbeit: *Intorno a nove lettere in lingua Italiana di Giuseppe Luigi Lagrange* und umfafst die Seiten 142—150; in der zweiten Ausgabe ist in dem Titel das Wort „nove" durch „dieci" ersetzt und hier umfafst der Aufsatz die Seiten 142—152.

Beide Titel entsprechen in der That dem Inhalte des Artikels, denn in der zweiten Ausgabe ist noch ein 10. italienisch geschriebener Brief Lagranges besprochen, der als no. 3 zwischen die Briefe 2 und 3 der ersten Ausgabe eingeschaltet ist. Ich setze die Einschaltung hierher für alle, welche nur die erste Ausgabe besitzen, lasse jedoch der Kürze wegen, die dazu gehörigen Anmerkungen (1) (2) (3) (1) (2) (3) (4) fort:

(pag. 147) Lettera in data di „Berlino 5 Luglio 1776" diretta al Padre Odoardo Gherli Domenicano, nato in Guastalla nel 1730 (1), e morto in Parma ai 6 di gennaio del 1780 (2).

Questa lettera è stampata nel volume intitolato „Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure del Padre Odoardo Gherli Domenicano membro dell' Accademia dell' Instituto di Bologna, e Professore di Teologia Dogmatica nell' Università di Modena. Resi pubblici da Domenico Pollera. Tomo VII in Modena 1777. Presso la società tipografica. Con licenza de' superiori" (pag. XII, lin. 12—37; pag. XIII, lin. 1—15) (3). Due brani di questa lettera furono anche riportati nel volume intitolato

„Continuazione del Nuovo giornale de' letterati d' Italia. Tom. XIII in Modena 1778. Presso la società tipo- (pag. 148:) grafica. Con licenza de' superiori“ (pag. 253, lin. 8—21, articolo XI). La lettera medesima è citata da Cavaliere Abate Girolamo Tiraboschi (1), da ch.mi Siggi Professori Geminiano Riccardi (2), e Pietro Riccardi (3), ed in vari dizionarî (4).

Aufser dieser Einschaltung hat Boncompagni nur einige wenige nicht wesentliche Veränderungen vorgenommen; so ist die zweite Ausgabe um zwei Seiten länger geworden. Es ist nun ganz klar, dafs Boncompagni während des Druckes des Artikels auf diesen 10. Brief aufmerksam geworden oder gemacht worden ist, und die Änderungen noch schleunigst, nachdem schon eine Anzahl von Heften gedruckt und versandt worden waren, vorgenommen hat. Dies geht aus zweierlei hervor: 1) das Aprilheft beginnt in beiden Ausgaben mit pag. 153, schliefst sich also in der Seitenzählung dem Märzheft der zweiten Ausgabe an; 2) auf Seite 539—543 desselben 6. Bandes bringt Boncompagni:

> Giunte e correzioni allo scritto intitolato „Intorno a dieci lettere in lingua Italiana di Giuseppe Luigi Lagrange (Bullettino ecc. Tomo VI ecc. pag. 142—152 Marzo 1873).“

Hier spricht er von „dieci“ (und nicht „nove“) lettere, er giebt selbst die Seitenzahlen 142—152 an, und die Giunte e correzione zu den angegebenen Seiten und Zeilen stimmen mit den Seiten und Zeilen des Hauptartikels der zweiten Ausgabe überein, nicht aber mit denen der ersten.

Aufserdem kann man noch ein drittes Argument als Beweis anführen: auf der letzten Seite des Umschlages findet man auch in der zweiten Ausgabe:

> Intorno a nove lettere in lingua Italiana di Giuseppe Luigi Lagrange (B. Boncompagni) 142.

Im Vol. 6 des Bullettino mit der 1. Ausgabe des Märzheftes fehlen demnach die Seiten 151 und 152, das Inhaltsverzeichnis des Umschlages stimmt mit dem Titel des Aufsatzes überein, dagegen stimmt der Titel der „Giunte e correzioni“ und die Seiten und Zeilen mit dem Hauptartikel nicht überein, während in dem 6. Bande mit der 2. Ausgabe des Märzheftes alle Angaben bis auf die Inhaltsanzeige des Umschlages übereinstimmen.

Boncompagni mufs wie gesagt, die Änderung erst so spät vorgenommen haben, dafs schon ein Theil der Hefte versandt war: in Berlin auf der Königl. Bibliothek und auf der Universitäts-Bibliothek befindet sich z. B. die 1. Ausgabe, auf den Universitäts-Bibliotheken von Bonn, Göttingen und Königsberg dagegen die 2. Ausgabe.

Über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

Die Anregungen des Herr Stäckel über diese Frage in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 133—138 sind sehr dankenswert, da mit dem Mangel einheitlicher Abkürzungen der Zeitschriften in der That grofse Übelstände verbunden sind. Doch wäre ich nicht für unbedingte Gleichmacherei, da mir ein doppeltes Bedürfnis vorzuliegen scheint.

Auf der einen Seite handelt es sich um Sammelwerke, in welchen Citate in grofser Häufigkeit immer wiederkehren, welche sich eines begrenzten Stabs von Mitarbeitern erfreuen und welche in der Lage wären, ihrer ersten Lieferung einen Schlüssel der Abkürzungen von Zeitschriftennamen vorausgehen zu lassen. Hierher gehören: die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, die *Synopsis der höheren Mathematik* von Hagen, das *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, der *Catalogue of scientific papers* der „Royal Society of London“ und endlich Poggendorfs *Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften* (vielleicht auch noch Pascals *Repertorium der höheren Mathematik* und Laskas *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik*).[1] Für alle diese Werke kann man den Grundsatz aufstellen, dafs der Leser nicht notwendig im stande sein mufs, aus der Abkürzung die gemeinte Zeitschrift unmittelbar zu erschliefsen, da ihm hierzu ja der Schlüssel zu Gebote steht. Die Abkürzungen können also so kurz als nur möglich sein, und darum sehe ich keinen Grund ein, weshalb man nicht für derartige Sammelwerke ein System wählen sollte, ähnlich dem im *Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques* eingeführten, bei welchem die Abkürzungen aus blofsen Buchstabengruppen bestehen. Insbesondere bei der *Encyklopädie*, die so sehr auf möglichste Raumausnützung bedacht sein mufs, wäre es namentlich für die franzö-

1) Die Revue semestrielle des publications mathématiques und das Bulletin des sciences mathématiques bedürfen keiner Abkürzungen, da sie die Zeitschriften reihenweise ausziehen.

sische Ausgabe, von grofsem Vorteil gewesen, direkt das in den romanischen Ländern schon allgemein bekannte französische System anzunehmen. Vielleicht hätte sich alsdann der Raum ersparen lassen, um die zitierten Programme und Dissertationen mit dem vollen Titel angeben zu können; die Angabe von Verfasser, Druckort und Druckjahr genügt zwar zur Identifizierung, doch wäre, um die Arbeiten von einer Bibliothek beziehen zu können, die Angabe des Titels sehr erwünscht. Was das französische Abkürzungssystem betrifft, so scheint es freilich auf den ersten Blick recht schwierig, die Buchstabengruppen zu entziffern und im Gedächtnis zu behalten. Macht man aber trotzdem einen Versuch, so findet man bald, dafs man sich die häufiger vorkommenden Abkürzungen sehr bald merkt, während man es nicht schwer nimmt, hinsichtlich seltener gelegentlich den Index konsultieren zu müssen. Dafs das Verzeichnis des Index an Vollständigkeit sehr viel zu wünschen übrig läfst, dafs die Abkürzungen bisweilen mit mehr Umsicht und Konsequenz hätten ausgedacht werden sollen, dafs geradezu Verwechslungen vorgekommen sind (z. B. zwischen A. T. und F. T.), will ich gar nicht leugnen. Aber die Abkürzungen sind einmal da und weit verbreitet, und es würde nur Verwirrung anrichten, wollte man sie wieder umstofsen und durch andere ähnliche ersetzen. Um nun auch die deutschen Mathematiker mit diesem System bekannt zu machen, und sie womöglich für dasselbe zu gewinnen, habe ich mich, nachdem ich im Privatgebrauch geradezu ausgezeichnete Erfahrungen mit demselben gemacht hatte, entschlossen, es bei meinen halbjährlichen Abhandlungsregistern über angewandte Mathematik in der Zeitschrift für Mathematik nnd Physik zur Anwendung zu bringen. Obgleich ich jedem Register einen Schlüssel von über 200 Zeitschriften vorhergehen lassen mufs, habe ich doch noch eine bedeutende Raumersparnis erzielt, und zugleich die Möglichkeit, den Lesern die vollen Titel der Zeitschriften samt Druckorten zur Kenntnis zu bringen. Bei den zahlreich notwendig gewordenen Neubildungen von Abkürzungen habe ich mich dem Geiste des französischen Index möglichst anzupassen gesucht, und wäre den Anhängern des genannten Systems sehr dankbar, wenn sie auch meine Abkürzungen annehmen würden.

Ein ganz anderes Bedürfnis liegt nun vor bei Lehrbüchern, Dissertationen, Programmen und anderen selbständigen Schriften, sowie bei den gewöhnlichen Zeit- und Gesellschaftsschriften. Auf diese möchte ich die Ausführung des Herrn Stäckel in erster Linie beziehen, und in diesem Sinne möchte ich demselben im wesentlichen zustimmen. Da der Leser hier nicht im Besitz eines Schlüssels ist, müssen die Abkürzungen so beschaffen sein, dafs mit ihrer Hilfe die Identifizierung der betreffenden Zeitschrift auch dem weniger geübten Leser unzweifelhaft möglich sein

mufs. Da es leider sehr viele Zeitschriften mit sehr ähnlich klingenden Namen giebt, so liegt es umgekehrt nahe, aus einer wenn auch unwesentlichen Verschiedenheit der Abkürzung auf Verschiedenheit der gemeinten Zeitschriften zu schliefsen. Deshalb ist die Buntscheckigkeit in der Bezeichnung einer Zeitschrift als irreführend zu verwerfen[1]) und die Einführung einheitlicher Bezeichnungen ein unabweisbares Bedürfnis. Die Vorschläge des Herrn Stäckel würden uns diesem Ziele unstreitig näher bringen. Was dieselben im einzelnen betrifft, so ist der Forderung, dafs der (ewig wechselnde) Name des Herausgebers nicht verwendet werden soll, zuzustimmen, mit einer einzigen Ausnahme. Es giebt nämlich bisweilen zwei Zeitschriften mit völlig gleichlautendem Titel und da sollte bei der *weniger wichtigen* der Name des *Begründers* zur Unterscheidung beigefügt werden. So würde also Bull. des sc. math., die von Darboux herausgegebene Zeitschrift bedeuten, mit dem Zusatze: Férussac aber die ältere gleichnamige des Baron Férussac. Journ. de math. élém. bezieht sich auf die Zeitschrift des Herrn de Longchamps, derjenigen des Herrn Vuibert müfste dieser Name beigefügt werden. Unter den drei „Analyst“ heifsenden Zeitschriften dürfte die in Des Moines 1874—1883 erschienene am bekanntesten sein. Die Jahreszahl, die zu jedem ordentlichen Zitat gehört, wird in den meisten Fällen zur Unterscheidung ausreichen, nur beim Journ. de math. élém., wo die korrespondierenden Bände beider Zeitschriften nur um ein Jahr differieren, sollte man sich hierauf nicht verlassen. Die festen Abkürzungen einzelner Worte haben ganz meinen Beifall, nur darf man „Commentarii“ nicht immer mit „Comm.“ abkürzen, da es bei der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aufser „Commentarii“ auch „Commentationes“ giebt. Gegen die Verweisung der Ortsnamen an das Ende der Abkürzung habe ich an sich nichts einzuwenden; dagegen mufs ich mich sehr dagegen verwahren, dafs das Hauptwort immer als das mafsgebende *Stichwort* angesehen werden soll. Ganz richtig ist dieser Grundsatz bei wirklichen Zeitschriften[2]); sehr unpraktisch aber — und zwar selbst wenn grofse Bibliotheken so verfahren — bei Akademie- und Gesellschaftschriften; denn erstens werden dadurch die verschiedenen Publikationen einer einzelnen Akademie oder Gesellschaft über den ganzen Katalog zerstreut, anstatt dafs sie beisammen stehen, und zweitens wird die Aufsuchung in hohem Grade erschwert, weil man gewöhnlich nicht im Kopfe hat, ob die Publikationen einer bestimmten Gesellschaft gerade „Abhandlungen“ oder

1) Es kann ja vorkommen, dafs ein Leser eine ihm zugängliche Zeitschrift nicht konsultieren kann, weil er sie unter einer ungewohnten Abkürzung nicht erkennt!

2) Die Vorausstellung des Ortsnamens in diesem Falle, wie sie z. B. im *Catal. of scient. papers* beliebt ist, verwerfe ich mit Herrn Stäckel unbedingt.

„Berichte“ oder „Mitteilungen“ oder „Schriften“ oder „Sitzungsberichte“ oder „Verhandlungen“ oder noch anders heifsen und diese Bezeichnungen leider auch noch oft genug wechseln. Eine Ausnahme wird man allerdings machen müssen, wenn die Gesellschaft keinen festen Sitz hat. In diesem Fall tritt vielleicht am besten der Landesname, der im Zeitschriftentitel in diesem Fall meistens vorkommt, als Stichwort ein. Die Königl. Landesbibliothek Stuttgart führt z. B. die Memorie della società italiana, detta dei XL mit Recht nnter „Italia“ auf. Für die Serien ziehe ich auch die von Herrn Stäckel gebilligte Bezeichnung durch vorausgeschickte Zahlen in Klammern der Bezeichnung durch Indices vor, da dieselbe wegen der Kleinheit dieser Indices leicht zu Irrtümern und Druckfehlern führt. Ich kann bei dieser Gelegenheit nicht die Bemerkung unterdrücken, dafs das oft wiederholte grundlose und inkonsequente Beginnen neuer Serien von seiten mancher Zeit- und Gesellschaftsschriften nicht nnr für den Bibliographen sehr lästig, sondern auch wegen der Schwierigkeit gerade die richtige Serie auf den Bibliotheken zu bekommen, auch für den Leser eine Quelle vielen Ärgers ist. Gerechtfertigt ist der Beginn einer neuen Serie nur dann, wenn eine Zeitschrift ein zeitlang zu erscheinen aufgehört hatte, oder wenn eine wesentliche Änderung in den Umständen der Zeitschrift (worunter aber der Wechsel des Herausgebers nicht unbedingt zu zählen ist) eingetreten ist.

Eine kritische Äufserung möglichst zahlreicher Fachgenossen zu Herrn Stäckels und meinen Vorschlägen ist sehr erwünscht uud führt am besten zu der auf diesem Gebiet so notwendigen Einigkeit.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, 22, 29, 34, siehe BM 1_3, 1900, S. 265—266.

---

1 : 36 (Anm. 1) lies 1882 statt 1892.

---

1 : 64. Nach Brugsch, *Steininschrift und Bibelwort* (Berlin 1891) ist das in den Inschriften nicht erwähnte Seil auf den bildlichen Darstellungen ersichtlich. Es heifst dort (2. Aufl., S. 36): „In allen Darstellungen, welche dem Beschauer das Fest der Grundsteinlegung eines Tempels vor Augen führen, tritt die Göttin Chawi neben dem Pharao auf. Sie spannt den Mefsstrick und markiert die Endpunkte des Heiligtums durch in die Erde eingeschlagene Pflöcke."

A. Sturm.

---

1 : 108, 135, siehe BM 1_3, 1900, S. 266.

---

1 : 135. Das Wort *ὑποτύπωσις* bedeutet auch 'Abrifs', z. B. schrieb Proklos eine *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* 'einen Abrifs der astronomischen Voraussetzungen'. Ebenso sind die 'Grundzüge' (*Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις*) des Sextus Empiricus allbekannt. Danach könnten wir des Suidas Worte *γεωμετρίας ὑποτύπωσιν* übersetzen 'einen Grundrifs der Geometrie', zumal da derzeit schon eine Anzahl Sätze bekannt war.

Das *ἔδειξεν* bei Suidas braucht keineswegs auf eine 'bildliche Darstellung' hinzuweisen und mit 'zeigte' übersetzt zu werden, sondern es hat bei spätgriechischen Schriftstellern zuweilen die Bedeutung von 'machte', wie mit Deutlichkeit aus Lucian *Somn.* 8, S. 3 ed. Sommerbrodt hervorgeht.

W. Schmidt.

---

1 : 144. Die Stelle aus Jamblichus steht auch Jamblichus *De communi mathematica* 78, 1—5 ed. Festa. Die Worte *ἐκαλεῖτο δὴ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία* übersetze ich: 'Es wurde nun die Geometrie „Forschung von seiten des Pythagoras" genannt', wobei *ἱστορία* der Bedeutung nach dem *ἱστορεῖν* (Cantor, S. 142, Anm. 2) entspricht. Die Ansicht Tannerys (*Géom.*



gr., S. 86), dafs die πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία ein wirklich publiziertes Werk gewesen sei, halte ich für verfehlt. 'Tradition touchant Pythagore' (Tannery a. a. O., S. 81), d. h. 'Überlieferung betreffend Pythagoras' kann ferner nach korrektem Sprachgebrauche nur περὶ Πυθαγόρου ἱστορία heifsen (vgl. zum Ausdruck Plato „Phaedo“ 96ᵃ. Diese Stelle zeigt übrigens auch, dafs der Artikel ἡ vor der Präposition nicht durchaus notwendig ist). Aber πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία könnte höchstens 'die von Pythagoras herrührende Überlieferung' bedeuten. W. Schmidt.

1: 144. Die von Cantor im Anschlufs an Tannery gegebene Übersetzung der Worte des Jamblichus *De comm. math.* 78, 2 ed. Festa (= *Vit. Pyth.*, S. 89) ἀποβαλεῖν τινα τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων ist nach den überzeugenden Ausführungen Zellers, *Gesch. d. Phil.* I: 1, S. 330[5], Anm. 2 folgendermafsen zu ändern: 'einer von den Pythagoreern habe sein Vermögen verloren'. W. Schmidt.

1: 155. Von Archytas wird bei Jamblichus, *De communi mathematica* ed. Festa 44, 11 eine Schrift Περὶ μαθηματικῶν erwähnt. W. Schmidt.

1:169 (Anm. 1). Aufser Clavius (Cantor, Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894; Hist. Abt. S. 185) spricht auch Schwenter, *Deliciae mathematicae* S. 538 diesen Gedanken aus. A. Sturm.

1:171 (Anm. 5). Plutarch sagt ausdrücklich, dafs diese Worte zwar in den Schriften Platons nicht enthalten seien, aber seiner Lehre entsprechen. A. Sturm.

1: 190, 197, 202, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266.

1: 225. Der Ansatz für Eudoxos von Knidos (408—355) ist nicht ohne Bedenken. Susemihl, *Die Lebenszeit des Eudoxos von Knidos*; Rhein. Mus. N. F. **53** (1898), S. 626—628, setzt seine Geburt um etwa 390 und seine Reise nach Ägypten in die ersten Fünfzigerjahre des 4. Jahrh., etwa 358 oder 357, statt wie bisher 380. W. Schmidt.

1: 234. Der S. 170 angeführte indirekte Beweis für die Irrationalität der $\sqrt{2}$ ist viel älter, als der des Dinostratus. A. Sturm.

1: 283, siehe BM 1$_3$, 1900, S. 499. — **1: 284, 321,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1: 370,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1: 383, 400, 432,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267.

1: 436. Von Diophant erwähnt der Scholiast zu Jamblichus *in Nicom. arithm.* 11, 11 (S. 127, 11) ed. Pistelli auch eine Μοριαστικά (Teilungsrechnung) betitelte Schrift. S. auch Diophant ed. Tannery II, 72.

W. Schmidt.

1 : 437, 440, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 463. Suidas nennt den Verfasser einer astronomischen Tafel Diophantes, nicht Diophantos. A. Sturm.

---

1 : 467, 469, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 475 (Anm. 1). Barlaams Logistik erschien unter dem Titel *Logistica nunc primum latine reddita et scholiis illustrata a* J. Chambero (Parisiis 1600, 4°). Christian Wolf (*Mathem. Lexikon*, Leipzig 1716, S. 177) giebt unrichtig 1609 als Druckjahr an. A. Sturm.

---

1 : 475, 476, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268. — **1 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143.

---

1 : 641. Die in Anm. 1 nicht entzifferten chinesischen Worte bedeuten nach freundlicher Mitteilung von L. Nix in Bonn:

4. Shaou kwang 'Evolution' (wörtlich 'eng-weit'),
5. Shang kung 'Körpermessung' (wörtlich 'überlegen und beendigen'),
6. Kiuen shu 'Vermischungsregeln' (wörtlich 'gerecht verteilen'),
7. Yiu muh (nicht nuh) 'Überschufs und Mangel',
8. Fang tshing 'Gleichungen' (wörtlich 'vergleichen und recht machen'),
9. Keu ku 'Trigonometrie' (Keu bedeutet wörtlich 'die beiden kleineren', ku 'die gröfsere Seite' eines Dreiecks). W. Schmidt.

---

1 : 661, 662, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499.

---

1 : 662. Thâbit ibn Korrah aus Harrân übersetzte nach L. Nix (*Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Übersetzung des Thâbit Ibn Corrah herausgegeben, ins Deutsche übertragen und mit einer Einleitung versehen*, Leipzig 1889, S. 4) nur die drei letzten Bücher der *Κωνικά* des Apollonius von Perge, während die ersten vier von Hilâl ibn abi Hilâl aus Ḥimṣ (Emessa) übertragen wurden. W. Schmidt.

---

1 : 671, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 687—688,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1 : 694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501.

---

1 : 794. Sowohl das Gespräch über Musik als auch die Regeln des Abacus sind in demselben Codex 2503 der Wiener Hofbibliothek enthalten.

A. Sturm.

---

1 : 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1 : 853, 854, 855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM 2_3, 1901, S. 351. — **2:8, 10**, siehe BM 1_3, 1900, S. 501—502. — **2:14—15**, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:20**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:25**, siehe BM 1_3, 1900, S. 274. — **2:31**, siehe BM 2_3, 1901, S. 351—352. — **2:34**, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:41, 57**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:70**, siehe BM 1_3, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502—503. — **2:98**, siehe BM 1_3, 1900, S. 269—270.

2:100. Z. 28 ist 1264 statt 1281 zu setzen, da der Papst Urban IV. bekanntlich am 2. Oktober 1264 starb.

2:105, siehe BM 1_3, 1900, S. 503. — **2:111**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:122, 128**, siehe BM 1_3, 1900, S. 503—504. — **2:132**, siehe BM 1_3, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:157, 158**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:163, 166**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504.

2:175. Gmünd in Niederösterreich ist eine alte Stadt, kein Dorf. Immerhin dürfte bemerkenswert sein, daſs der Name Schindl noch heute in der dortigen Gegend vorkommt und daſs die dort ansässigen Edlen von Kuenring als Protektoren des Joh. von Gmunden auftraten. A. Sturm.

2:210, 219, siehe BM 2_3, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505. — **2:253**, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:273**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2:282, 283**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 2_3, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354. — **2:313**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507.

2:328. „Hashard" findet sich schon in einem Spielliede der *carmina burana* (Ausgabe v. Schmeller, S. 252). A. Sturm.

2:334, 353, 381, 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM 1_3, 1900, S. 507—508. — **2:430**, siehe BM 2_3, 1901, S. 145.

2:449. In St. Florian in Österreich findet sich eine Ausgabe der Perspektive des Hieron. Rodler von 1531 (vgl. Obenrauch, *Geschichte der darstellenden Geometrie*, Brünn 1897, S. 193). A. Sturm.

2:474. Rhäticus hegte auch noch in Leipzig die Absicht, eine Übersetzung des Apollonius herauszugeben. Dies geht aus einem Briefe Melanchthons an den Nürnberger Senator Erasmus Ebner hervor, in welchem um Überlassung der Handschrift des Apollonius aus dem Nachlasse Regiomontans an Rhäticus, „qui Lipsiae mathemata docet", gebeten wird. — In diesem Briefe charakterisiert Melanchthon seine eigene Thätigkeit auf mathematischem Gebiete: „Scis me, etsi mea adolescentia non incidi in idoneos doctores, tamen

et fuisse et esse hortatorem multis ad discenda mathemata, et cupere, ut hae artes honestissime serventur et illustrentur." (Dieser Brief ist abgedruckt in BECHSTEIN, Deutsches Museum I, 1842, S. 338.) A. STURM.

2:480. MEMMO kann doch nicht ohne Fachkenntnisse gewesen sein, da ihn RICHARD in seiner Ausgabe des APOLLONIUS „publicus mathematicarum professor" nennt. A. STURM.

2:481, 482, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2:482,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354.

2:484. Z. 12 lies *regulis* statt *rebus*.

2:486, 489, 490, 497, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

2:512. Z. 2 lies 1556 statt 1558.

2:514, 516, 517, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

2:530. Z. 16 v. u. mufs es heifsen $\frac{a^2}{4} = \frac{3y^2}{4}$ statt $\frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}$.

2:530, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355. — **2:532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2:550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2:554, 569, 572, 578,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510.

2:572, 614. Les *Tafelen van Interest, midtsgaders de Constructie der seluër* ont paru à Anvers dès 1582, et parmi les ouvrages publiés par STEVIN en 1585 il convient de mentionner en premier lieu *De thiende*, dont la traduction française *La disme* parut la même année dans la seconde partie de *L'arithmétique.* H. BOSMANS.

2:576, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2:582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2:592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:594, 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2:597, 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2:611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357.

2:620. L'original du traité *De apologistica principum ratiocinio italico* fut publié par STEVIN en 1605 dans les *Wisconstige Gedachtenissen.* JEAN TUNING en donna une traduction française dans les *Mémoires mathématiques* (1608), dont il existe des tirages à part sous le titre de *Livre de compte de prince* (Leyde, chez Ian Paedtz Iacobsz CIↃ. IↃ. CVIII). H. BOSMANS.

2:621, 623, siehe BM. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:721, 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273.

2:742. Chr. Wolf erklärt in seinem *Mathematischen Lexikon* (1716) „Antilogarithmus" noch als Logarithmus Cosinus. A. Sturm.

2:746, 747, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273.

2:766. Z. 2 lies 1655 statt 1659.

2:767, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:772, 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **2:784, 820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2:876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511.

2:VIII (Vorwort). Les indications sur les *Wisconstige Gedachtenissen*, les *Hypomnemata mathematica* et les *Mémoires mathématiques* de Stevin sont en partie incomplètes, et il convient de les compléter par les renseignements suivants. Stevin édita ses œuvres à Leyde de 1605 à 1608 en trois langues différentes. Lui-même il les rédigea en flamand sous le titre de *Wisconstige Gedachtenissen* (Leyden, In de Druckereye van Jan Bouwensz, CIƆ. IƆ. CVIII, 2 vol. in-fol.). En même temps paraissaient une traduction latine complète par W. Snellius (sauf le liber 5 geographiae, limenheuretica, qui est de Hugo Grotius) sous le titre de *Hypomnemata mathematica* (Lugdvni Batavorum, ex officinia Joannis Patii, CIƆ. IƆ. CVIII, 2 vol. in-fol.), et une traduction française par Jean Tuning sous le titre de *Mémoires mathématiques* (Leyde, chez Ian Paedtz Iacobsz CIƆ. IƆ. CVIII, in-fol.). La traduction française ne contient qu'une partie des *Wisconstige Gedachtenissen*, mais elle renferme d'autre part le „Livre de compte de marchand" et le „Livre de compte de prince", qui font défaut dans l'édition de Girard (1634).

Les trois éditions offrent cette particularité que le titre de départ et celui de la dernière partie sont datés de 1608, tandisque les autres parties sont datées de 1605, ce qui s'explique très simplement en admettant que les titres de départ n'ont été imprimés que lorsque l'ouvrage était terminé.

H. Bosmans.

2:IX, X (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:12, 17, 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3:26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3:116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. —

3:201, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:207**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:218, 224**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513—514. — **3:225, 228**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:232**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:246**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:303**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3:447, 455**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3:473**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155. — **3:477, 479**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3:521, 636—637**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3:652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3:660, 667, 689, 695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3:750, 758, 760, 766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3:774, 798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3:845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3:848, 881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3:882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447.

3:892. Die Worte: „Nach dem über dessen Inhalt Veröffentlichten (Eneström, Bibliotheca Mathematica 1897, S. 49) ging Bernoulli folgendermafsen zu Wege“ konnten in der ersten Auflage der *Vorlesungen* berechtigt sein, aber inzwischen ist das Verfahren des Bernoulli vollständig veröffentlicht worden (Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—60), und daraus geht hervor, dafs dasselbe nicht ganz mit dem Cantorschen übereinstimmt. Bernoullis Darstellung ist ein wenig weitschweifig, aber der Grundgedanke ist, dafs man nach der Multiplikation mit x^p,

$$0 = x^p y + a x^{p+1}\frac{dy}{dx} + b x^{p+2}\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots = \frac{d}{dx}\left(\alpha x^{p+1} y + \beta x^{p+2}\frac{dy}{dx} + \gamma x^{p+3}\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots\right)$$

setzt. Nach ausgeführter Differentiation des rechten Gliedes bekommt man also, um die $n+1$ Gröfsen $p, \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ zu bestimmen, die $n+1$ Gleichungen

$$1 = (p+1)\,\alpha, \qquad a = \alpha + (p+2)\,\beta, \qquad b = \beta + (p+3)\,\gamma, \cdots$$

und da man durch Integration der transformierten Gleichung als Resultat

$$\alpha x^{p+1} y + \beta x^{p+2}\frac{dy}{dx} + \gamma x^{p+3}\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots = \text{Konst.}$$

erhält, hat man also die Ordnung der ursprünglichen Gleichung um eine Einheit erniedrigt. Setzt man nun mit Bernoulli die Konstante $= 0$, so kann man das Verfahren wiederholen und kommt endlich zu einer Gleichung ersten Grades, die leicht integriert wird. Übrigens ist es offenbar nicht nötig, die Konstante $= 0$ zu setzen, was auch Bernoulli selbst bemerkt hat. Man sieht hieraus, dafs die Bernoullische Methode nicht so elegant wie die Cantorsche ist, und unserer Ansicht nach kann man kaum annehmen, dafs diese schon vor 200 Jahren benutzt worden ist. Auf der anderen Seite geht hervor, dafs Bernoulli x^p wirklich als integrierenden Faktor anwendet, was vom historischen Gesichtspunkte aus besonders interessant ist, da seine Methode schon vor 1700 erfunden wurde.

G. Eneström.

3:IV (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Noch einmal Archimedes' Ephodikón. Aus einem Zitat in Herons *Metrika* I, 32 wurde (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, 13—14) von mir vermutet, dafs Ἐφοδικὸν der echte Titel für die Quadratur der Parabel sei.

Diese Mitteilung kann ich jetzt noch durch zwei neue Stellen ergänzen, die gleichfalls in Herons *Metrika* (Fol. 96^{v} des Constantinopol. 1 s. XI) stehen, aber obige Vermutung wieder zweifelhaft erscheinen lassen.

Hier heifst es zunächst (Fol. 96^{v}):

Κυλίνδρου τμῆμα τετμημένου διὰ τοῦ κέντρου μιᾶς τῶν βάσεων.

Segment eines Cylinders, der durch den Mittelpunkt einer der Grundflächen geschnitten ist.

Ἀποδέδειχεν Ἀρχιμήδης ἐν τῷ Ἐφοδικῷ, ὅτι τὸ τοιοῦτον τμῆμα ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ τμήματι.

Archimedes hat im *Ephodikón* gezeigt, dafs solcher Abschnitt $^1/_6$ des körperlichen Parallelepipedons ist, das zur Basis das um die Basis des Cylinders beschriebene Quadrat, aber dieselbe Höhe wie der Abschnitt hat.

Darauf fährt Heron fort (Fol. 96^{v}):

Ὁ δ' αὐτὸς Ἀρχιμήδης ἐν τῷ αὐτῷ βιβλίῳ δείκνυσιν, ὅτι ἐὰν εἰς κύβον δύο κύλινδροι διωσθῶσιν τὰς βάσεις ἔχοντες ἐφαπτομένας τῶν πλευρῶν τοῦ κύβου, τὸ κοινὸν τμῆμα τῶν κυλίνδρων δίμοιρον ἔσται τοῦ κύβου.

Derselbe Archimedes zeigt in demselben Buche, dafs, wenn in einen Würfel zwei Cylinder getrieben werden mit Grundflächen, welche die Seiten des Würfels berühren, das gemeinsame Segment der Cylinder $^2/_3$ des Würfels sein wird.

Die beiden Zitate vermag ich bei Archimedes nicht nachzuweisen. Wahrscheinlich war also Ephodikón der Titel einer gröfseren Schrift, von der uns die „Quadratur der Parabel" erhalten ist. W. Schmidt.

Anfragen und Antworten.

97. Die „Numeri congrui" und „congruentes". In seiner Behandlung der Aufgabe: Zwei Zahlen a und b von der Beschaffenheit zu bestimmen, dafs sowohl $a^2 - b$, als auch $a^2 + b$ eine Quadratzahl sei (mit anderen Worten: drei Quadratzahlen von gleicher Differenz zu finden), unterscheidet Leonardo Pisano (*Scritti* ed. Boncompagni II, p. 265 ff.; vgl. auch Cantor, *Vorlesungen* II^2, p. 45) zwischen *numeri congrui* und *numeri congruentes*. Das Quadrat heifst bei ihm *Congruens*, die Differenz der Quadrate b ein *Congruum* [„Super quem quadratum proponitur addere numerum et fieri quadratum secundum; ... super quem etiam secundum quadratum si addatur numerus idem qui vocetur congruum, quia congruit his, facit majorem quadratum, ..."]. Es ist nun recht eigentümlich, dafs spätere, von Leonardo Pisano abhängige Schriftsteller diese Ausdrücke einfach vertauscht haben. So nennt Luca Paciuolo (*Summa*, fol. 46) die Quadratzahl „el numero congruo", die Differenz „el suo congruente". Ebenso schreibt Francesco Ghaligai (*Pratica d'arithmetica*, Firenze 1552, fol. 60 verso): „Numero congruo e quello che e atto a dare & ricevere un' altro numero, quale si chiama congruente e detto congruente e quello che agiunto al congruo, la somma sia quadrata e tratto del congruo el rimanente sia quadrato, cioè dico che a ogni congruo conrisponde uno congruente e detti congruenti di molte volte non sono quadrati, ma e congrui sono quadrati etc. etc."

Hieronimo Cardano (*Practica arithmeticae* 1539, Cap. 42, Nr. 36 und 37) macht diesen Unterschied überhaupt nicht; a^2 ist ihm ebenso wie b ein *Congruens*.

Wie ist diese Verschiedenheit bei Leonardo einerseits und Paciuolo und Ghaligai andererseits zu erklären? Da die Ausdrücke *congruum* und *congruens* bei Leonardo häufig und immer in dem oben angegebenen Sinne gebraucht werden, so ist ein Schreibfehler in der Handschrift, welche der Ausgabe von Boncompagni zu Grunde liegt, nicht zu vermuten. Ist es anzunehmen, daſs Paciuolo und nach ihm Ghaligai die Ausdrucksweise Leonardos aus sprachlichen Gründen für unrichtig gehalten und deshalb die Änderung vorgenommen haben?

Frankfurt a. M. G. Wertheim.

98. Über Gleichungen, die auf Null gebracht sind. Bekanntlich ist Descartes der erste Mathematiker, der ausdrücklich auf die Zweckmäſsigkeit, Gleichungen auf Null zu bringen, hingewiesen (vgl. Descartes, *La géométrie*, Nouv. éd. Paris 1886, S. 55), und solche Gleichungen durchgehend angewendet hat. Aber schon vor Descartes findet man Spuren dieses Verfahrens, und die Geschichtsschreiber der Mathematik haben nicht verfehlt hierauf aufmerksam zu machen. So z. B. bemerkt Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**², S. 441), daſs Stifel in einem Falle die Gleichung auf Null bringt, und (a. a. O., S. 644) daſs Bürgi mit vollem Bewuſstsein eine Gleichung auf Null gebracht hat. Auf der anderen Seite hatte schon Montucla (*Histoire des mathématiques* **2**, 1758, S. 77) behauptet, Harriot habe sich im Vorübergehen dieser Anordnung bedient, aber die Richtigkeit dieser Behauptung ist von Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, 1874, S. 380) und von Cantor (Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. S. 99) bestritten worden. Dagegen ist es sicher, daſs Neper in seiner vielleicht vor 1594 verfaſsten, aber erst 1839 gedruckten *Algebra* vielfach die „aequatio ad nihil", d. h. die auf Null gebrachte Gleichung, benutzt.

Hat Harriot wirklich Gleichungen auf Null gebracht, und giebt es andere Mathematiker als die hier genannten, die es vor Descartes gethan haben?

Stockholm. G. Eneström.

Réponse à la question 50 sur le mathématicien anglais Braikenridge. Dans le British museum se trouvent 18 lettres de William Braikenridge à Birch, écrites 1732—1753. Par la lettre du 2 août 1732, on voit que Braikenridge avait l'intention de faire à Hampstead, où Birch demeurait, un cours de physique expérimentale. En 1737 il parle d'une lettre qu'il avait adressée à Maclaurin à propos d'un article publié par celui-ci dans les Philosophical Transactions. A partir du 23 octobre 1739 il se nomme Brakenridge, et par la dernière lettre on voit qu'il vivait encore en 1753.

Torino. G. Vacca.

Réponse à la question 51 sur J. R. Argand. Jean Robert Argand, né à Genève le 18 (non le 22) juillet 1768, mourut à Paris le 13 août 1822.

Genève. H. Fehr.

Recensionen.

H. G. Zeuthen. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Edition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par **J. Mascart.** Paris, Gauthiers-Villars 1902. XIII + (1) + 296 S. 8°.

Das Original dieses Buches erschien 1893 und wurde in der Bibliotheca Mathematica 1893, 115—116 besprochen. Zwei Jahre später erschien mit dem Druckjahr 1896 eine von R. Fischer-Benzon besorgte deutsche Übersetzung, die in der Bibliotheca Mathematica 1895, 115—116 angezeigt wurde. Jetzt ist auch eine französische Übersetzung herausgegeben worden, die seit anderthalb Jahren bei Gauthier-Villars unter der Presse gewesen ist. Der Verf. hat dabei einige Verbesserungen und Zusätze eingefügt, und von der Hand des Herrn Paul Tannery findet sich darin eine Anzahl von Noten unter dem Text, die hauptsächlich litterarischen Inhalts sind.

Von den meisten vorhandenen Kompendien der Geschichte der Mathematik unterscheidet sich das Buch des Herrn Zeuthen dadurch, dafs es eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik bringen will, und darum nur wenig litterarische Notizen enthält. Aus demselben Grunde giebt es ausführliche Auskunft über die mathematischen Arbeiten, die wesentliche Fortschritte enthalten — beinahe die Hälfte des Buches bezieht sich auf die Werke von Euklides, Archimedes und Apollonios — während die übrigen garnicht oder wenigstens nur im Vorübergehen erwähnt werden. Gewifs ist ein solches Verfahren im allgemeinen zu billigen, aber ob es auch für das Mittelalter angemessen ist, scheint uns fraglich zu sein. Die ganze Mathematik des christlichen Mittelalters bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts hat bei Herrn Zeuthen eigentlich nur zwei Repräsentanten, nämlich Leonardo Pisano, der ziemlich ausführlich behandelt wird, und Nicolas Oresme, dem eine Druckseite gewidmet ist; im Vorübergehen werden noch Gerbert, Jordanus Nemorarius und Bradwardin genannt. Es ist ja möglich, dafs der Leser dadurch einen Einblick in die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft gewinnen kann, aber über die Entwickelung des mathematischen *Studiums* im Mittelalter, die auch ein wissenschaftliches Interesse hat, giebt eine solche Darstellung zu wenig Auskunft. Überhaupt scheint sich Herr Zeuthen, der bekanntlich auf dem Gebiete der griechischen Mathematik hervorragende historische Untersuchungen ausgeführt hat, wenig für die Geschichte des Mittelalters interessiert zu haben.

Hinsichtlich der Einzelheiten erlauben wir uns hier einige kleine Bemerkungen hinzuzufügen, die sich fast alle auf die letzte Abteilung des Buches („Le moyen âge“) beziehen.

S. 265. Die Worte; „nous avons montré comment les Grecs connaissaient ce théorème (p. 206)“ scheinen uns ganz irreleitend. Es handelt sich um den Satz $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$, und Herr Zeuthen beansprucht also nachgewiesen zu haben, dafs dieser Satz den Griechen bekannt war; der angebliche Nachweis beschränkt sich jedoch auf eine *Behauptung*, dafs die bei Alkarchi vorkommende Herleitung des Satzes durch seine geometrische Form

griechischen Ursprung verrät. Was zuerst die Richtigkeit dieser Behauptung anbelangt, so dürfte sie zum mindesten sehr zweifelhaft sein. Bekanntlich hat Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, S. 192) hervorgehoben, dafs die Herleitung ein durchaus *indisches* Gepräge trägt, und kürzlich hat Herr A. Bürk in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **55**, 1901, S. 566—572 nachgewiesen, dafs ganz ähnliche Herleitungen schon bei dem indischen Verf. Apastamba, der spätestens im 4. vorchristlichen Jahrhundert lebte, vorkommen. Aber vorausgesetzt, dafs die *Herleitung* wirklich ein griechisches Gepräge getragen hätte, so folgt daraus gewifs nicht ohne weiteres, dafs der *Satz* den Griechen bekannt gewesen ist, denn es wäre sehr gut möglich, dafs die Herleitung von einem arabischen Mathematiker herrührte, der die griechischen Verfasser eingehend studiert hatte. In jedem Falle scheint es uns unangemessen, in einem Buche, das wohl vorzugsweise für Studierende bestimmt ist, eine blofse Hypothese als etwas Nachgewiesenes anzugehen.

S. 272. Die Bemerkung bezüglich des Leonardo Pisano: „Ce qui prouve qu'il n'est pas algorithmicien d'origine, c'est qu'il déclare avoir donné luimême l'extraction de la racine cubique; or cette extraction n'est pas dans Alkarchi", scheint uns wenig zutreffend. In erster Linie ist der Ausdruck „l'extraction de la racine cubique" zu beanstanden, da Leonardo Pisano in der That zwei Methoden zum Ausziehen der Quadratwurzel kennt, nämlich die alte und die von ihm selbst erfundene (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 351). Wenn man aber „une méthode d'extraction" statt „l'extraction" setzt, so kommt natürlich die Folgerung, dafs Leonardo ursprünglich nicht Algorithmiker war, in Fortfall, und übrigens ist es nicht einzusehen, was die an sich richtige Bemerkung hinsichtlich des Alkarchi hier zu thun hat.

S. 282. Nachdem Herr Zeuthen das Rechenbuch von Widman erwähnt hat, fügt er hinzu: „dès 1483, d'autre part, avait été imprimée l'Arithmétique dite de Bamberg", aber bekanntlich giebt es noch frühere gedruckte Rechenbücher, und eine Erklärung, warum gerade das Bamberger Rechenbuch von 1483 verdient besonders hervorgehoben zu werden, würde darum hier erwünscht gewesen sein.

S. 284—285. Unserer Ansicht nach geht aus der von Herrn Zeuthen citierten Arbeit des Herrn Braunmühl hervor, dafs die Verdienste des Regiomontanus um die Trigonometrie nicht so grofs sind, als Herr Zeuthen hier angiebt.

In der Übersetzung kommen zuweilen Ausdrücke vor, die nicht ganz geeignet sind dem Leser eine richtige Auffassung der fraglichen Thatsachen zu geben. So z. B. heifst es S. 239: „l'équation $y^2 = ax^2 + 1$, qui, beaucoup plus tard, sous le nom d'équation de Pell, devait préoccuper les mathématiciens d'Europe"; der Name Pellsche Gleichung rührt ja von Euler her, während die Gleichung selbst schon weit früher die Mathematiker in Europa beschäftigte. — S. 281 wird mit Bezug auf Chuquet bemerkt: „les solutions imaginaires auxquelles devait conduire l'un de ses problèmes, paraissent uniquement correspondre à quelque erreur de sa part", was wohl gar keinen Sinn giebt; bekanntlich hat Chuquet zwar ein Problem behandelt, das zu einer imaginären Lösung führt, und die formale Richtigkeit der Lösung nachgewiesen, aber in dem einzigen bekannten Manuskripte seiner Arbeit findet sich ein Rechen- oder Schreibfehler (statt $\sqrt{\sqrt[4]{81} - \sqrt{60}}$ steht nämlich $\sqrt[4]{81} - \sqrt{60}$), so dafs man

nicht entscheiden kann, ob CHUQUET das Imaginärwerden der Lösung erkannt hat. — S. 287, Z. 19 ist das Wort „brusquement“ kaum angemessen, da es wohl nicht richtig ist, dafs die Entdeckung der Lösung kubischer Gleichungen auffallend plötzlich erfolgte. — S. 271 findet sich in der französischen Übersetzung eine Ungenauigkeit, die um so merkwürdiger ist, als die deutsche Übersetzung, die wohl die Vorlage des Herrn MASCART gewesen ist, an dieser Stelle eine andere Ungenauigkeit enthält. Im dänischen Original steht nämlich ganz richtig, dafs GERBERT ein paar Jahrhunderte früher als LEONARDO PISANO lebte, die deutsche Übersetzung hat „einige Jahrhunderte früher“ und die französische „un peu plus d'un siècle auparavant“, das ja entschieden unrichtig ist, da GERBERT schon 1003 starb und LEONARDO noch 1228 wissenschaftlich thätig war.

Die vorstehenden Bemerkungen sind natürlich im Grofsen und Ganzen ziemlich unbedeutend, und wir hoffen, dafs die französische Ausgabe der Arbeit des Herrn ZEUTHEN nicht nur innerhalb Frankreichs, sondern überhaupt bei den Studierenden an den Universitäten grofse Verbreitung finden wird.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

G. Frizzo. De numeris libri duo, authore Joanne Noviomago, esposti ed illustrati. Verona, Drucker 1901. (7) + 174 p. — 3 lire.

JOHANNES NOVIOMAGUS (JEAN BRONKHORST de Nimwegen) est connu par son édition des œuvres de BEDA, sa traduction de la géographie de PTOLÉMÉE et par un petit traité *De numeris libri duo*, publié à Paris en 1539. Un exemplaire de cet ouvrage, cité parfois à cause de certains signes numéraux y indiqués sous le nom de „notae numerorum astrologicae sive chaldaicae“, est tombé entre les mains de M. FRIZZO, qui vient d'en publier un résumé, accompagné de commentaires.

Le premier livre de l'ouvrage de NOVIOMAGUS contient un traité d'arithmétique pratique; on y trouve aussi les signes numéraux des Grecs, la *loquela digitorum* de BEDA et les symboles déjà mentionnés, dont NOVIOMAGUS avait eu connaissance par un concitoyen, RUDOLFUS PALUDANUS. Le second livre contient l'exposition des premiers notions de la théorie des nombres, d'après NICOMACHUS, THÉON SMYRNAEUS et JAMBLICHUS.

Genova. G. LORIA.

G. Macrì. Francesco Maurolico nella vita e negli scritti. Seconda edizione con documenti inediti. Messina, D'Angelo Freni 1901.

Nel 1894 la r. accademia Peloritana di Messina, solennizzando il 4° centenario della nascita del dotto umanista e matematico messinese, affidava al prof. GIACOMO MACRÌ l' incarico di scriverne la biografia. Essa ci presenta il MAUROLICO nei suoi svariati aspetti di letterato, matematico, astronomo, fisico, naturalista, filosofo; ci fa conoscere le numerose sue opere e i progressi di cui vanno a lui debitrici le varie scienze alle quali dedicò i suoi studi. Per non parlare che di MAUROLICO matematico, è indubitato che egli fu tra quelli che più diligentemente si occuparono di rintracciare, di ridurre a lezione corretta e di far conoscere al mondo occidentale le opere dei grandi geometri greci; che, non contento di ciò, tentò, primo forse, di divinare e di ricostruire il mancante, e di spingersi innanzi nella via aperta da APOLLONIO e da

Archimede. Nei secoli successivi la matematica abbandonò le antiche vie per altre infinitamente più rapide e sicure, e lo splendore delle scoperte fatte nei nuovi indirizzi scema in noi l' ammirazione per quei lavori che valsero a Maurolico dai suoi contemporanei il titolo di *novello Archimede*; ma è d' uopo riconoscere, che il rinascimento della matematica non sarebbe stato possibile senza l' opera di quelli scienziati umanisti che ci restituirono i capolavori della geometria greca.

La biografia del Macrì appare ora nuovamente rifusa ed accresciuta di importanti aggiunte. Limitandoci anche qui alla scienza che ci interessa, noteremo soltanto che l' autore in questa nuova edizione, mentre abbandona l' idea che Maurolico sia stato il primo ad usare le lettere nell' aritmetica razionale, ripete con maggiore insistenza l' asserzione che egli per primo si occupò di determinare il centro di gravità dei solidi; asserzione che può accettarsi, in un certo senso, per esatta, considerando che la determinazione del centro di gravità della piramide triangolare fatta da Leonardo da Vinci è rimasta ignota sino ad un' epoca assai recente.

Una questione che interessa non meno la storia di Maurolico che quella della sua città natale, è se egli abbia professato nell' Università di Messina. Nella prima edizione della sua biografia, il Macrì sostiene vigorosamente la tesi che Maurolico non insegnò mai nell' Ateneo della sua patria. Più tardi la ricorrenza del 350⁰ anniversario del bando (29 aprile 1550) che apriva agli studi l' Università messinese porse occasione a diligenti ricerche storiche sul passato di essa, le quali furono raccolte in due volumi commemorativi pubblicati, l' uno dai professori dell' Università, l' altro dall' Accademia Peloritana. Il primo di essi contiene, fra altre pubblicazioni, un Sommario storico delle vicende dell' Università, compilato da un anonimo gesuita del XVIII secolo, nel quale si legge che il 9 novembre 1569 Maurolico fu nominato professore nello studio messinese. Il documento di nomina, già allegato in copia al Sommario ma ora smarrito, fu ritrovato nell' Archivio di Stato di Palermo e inserito nel secondo dei due volumi sopra menzionati. Appare da esso che il Maurolico veniva, il 9 novembre 1569, nominato dal Senato di Messina professore di matematica, — cioè di geometria, aritmetica speculativa, astrologia, musica speculativa, prospettiva ed ogni altra cosa attinente alle scienze matematiche —, in quella Università, per un anno, collo stipendio di onze 40 (pari a lire italiane 510), e coll' obbligo di impartire 4 lezioni per settimana. La conferma vicereale porta la data del 17 gennaio 1570. — Di fronte a questo documento autentico cade ogni induzione in contrario. Tuttavia il Macrì nella nuova edizione della sua biografia, ed il Dr. V. Labate in un articolo critico sui due volumi commemorativi pubblicato nell' Archivio storico siciliano, osservano come la nomina del Maurolico ad insegnante non provi punto che egli abbia effettivamente professato, come anzi ciò sia improbabile data l' età avanzata del grande geometra, il quale aveva passato ormai i 75 anni, e la sua malferma salute; e suppongono che tale nomina sia stata suggerita principalmente dal desiderio di fregiare la nascente Università di un nome così illustre, e di dare nel medesimo tempo, in forma onorevole, un sussidio al dotto messinese ne' suoi ultimi giorni.

Sebbene l' autorità e la competenza ci manchino per intervenire in questa sottile questione, ci sia permesso esprimere in proposito il nostro parere. Il fatto della nomina del Maurolico a professore conduce logicamente ad am-



mettere, *sino a prova in contrario*, e che il suo stato fisico non potesse esser giudicato tale da rendergli del tutto impossibile l' esercizio del suo ufficio, e che questo sia stato effettivamente esercitato. D' altra parte è assai probabile, per le circostanze d' età e di salute acutamente invocate dal Macrì, che l' insegnamento del Maurolico non sia stato nè lungo nè efficace; e ciò, mentre può valere a spiegare il silenzio serbato su questo punto sì da lui che dal suo più antico biografo, rende poco sperabile la scoperta di nuovi documenti atti a risolvere definitivamente l' interessante quesito. Comunque, è ormai fuor d' ogni dubbio che l' Università di Messina ha diritto di porre fra i nomi dei suoi professori quello illustre di Francesco Maurolico.

Messina. G. Vivanti.

N. L. W. A. Gravelaar. John Napier's Werken. (Verhandelingen der Akademie van Wetenschappen.) Amsterdam 1899. 160 S. + 3 Taf. 4°.

Nach einem kurzen Lebensabrifs John Napiers (1550—1617), Gutsherrn von Merchiston bei Edinburg, dem man den Titel Lord nur mifsbräuchlich beilegt, finden wir in der Abhandlung des Herrn Gravelaar eine bibliographische Beschreibung jeder einzelnen Schrift mit Angabe ihrer verschiedenen Ausgaben und Übersetzungen, die in holländischen Bibliotheken vorhandenen Exemplare werden aufgezählt, dann folgt im lateinischen Urtext die genaue Gliederung der einzelnen Abschnitte unter Einflechtung der besonders prägnanten Sätze und mit Probeseiten der Tabellen, endlich giebt Herr Gravelaar in holländischer Sprache eine Übersicht des Inhalts, wobei er zur Abkürzung auch die heutige wissenschaftliche Ausdrucksweise, zum teil in elementarer Form verwendet. Anmerkungen über die Beziehungen zu gleichzeitigen und früheren Mathematikern sind beigefügt, auch vielfache Irrtümer der bisherigen geschichtlichen Überlieferung berichtigt. Die vorliegende Schrift giebt daher mit leichter Mühe dem Leser ein Bild von der wissenschaftlichen Persönlichkeit Nepers und bildet einen vorläufigen Ersatz für die Ausgabe seiner gesamten Werke, die ebenso nützlich wäre wie die der Werke Keplers.

Die von Napier in der *Descriptio* veröffentlichte Tafel der Sinus und ihrer Logarithmen enthält kein Dezimalkomma. Wenngleich die Dezimalbrüche sich schon einzubürgern anfingen, so vermied man es doch, eine ganze Tafel mit dem Komma auszurüsten, man schrieb die Sinus als ganze Zahlen und bemerkte in der Einleitung, dafs es sich um Teile handele, deren der Radius oder Sinus-Totus 1000 oder hier 10000000 umfasse. Ähnlich war schon Ptolemaios bei seiner Sehnentafel verfahren. Man mufs daher die Sinus und die Logarithmen Napiers durch 10^7 dividieren, um sie den modernen Gewohnheiten anzupassen. Napier hat die Logarithmen der Sinus positiv angegeben, bemerkt aber, dafs er dies nur aus praktischen Rücksichten thue, an sich könnten sie auch negativ gesetzt werden, die Logarithmen von Zahlen, die gröfser als der Sinus totus seien, würden dann positiv. Demnach bedürfen Speidell, Montucla und deren Nachfolger (S. 12—13), die sich für die zweite von Neper gestattete Wahl des Vorzeichens entschieden, nur ebensoweit einer Entschuldigung wie diejenigen, die das Komma einsetzten. Auch Nepers ursprüngliche Form der Logarithmen stellt die Fläche der gleichseitigen Hyperbel (S. 12) zwischen den Abscissen x und 1, wenn x ein echter Bruch ist, richtig dar, doch kommt es bei Flächeninhalten auf das Vorzeichen überhaupt nicht

an. Nach Florian Cajori war Halley der erste Schriftsteller, der sich „die Verwechslung von Napierschen und natürlichen Logarithmen zu Schulden kommen liefs".

Viele Autoren (Wittstein, Rudolf Wolf, Marie, Kewitsch) haben nun aber von Nepers Logarithmen bis jetzt eine Vorstellung, die es, abgesehen von der äufserlichen Zurichtung, unmöglich erscheinen läfst, dafs der innere Gehalt von Nepers Tafel mit den natürlichen Logarithmen übereinstimmt. Sie glauben, Neper hätte zu $(1-10^{-7})^n$ den Logarithmus $= 10^{-7} \cdot n$ gesetzt, wie Byrg zu $(1+10^{-4})^n$ setzte $n \cdot 10^{-4}$. Neper hat aber (S. 29) seine Tafel, wenn wir das Komma als immanent erachten, wirklich nach der Definition $\log \text{Nap}\, u = \int_u^1 \frac{du}{u}$ berechnet, sodafs genau $\log \text{Nap}\, u = -\log \text{nat}\, u$ ist. Aus jener Definition entwickelt er den Satz, dafs $\log \text{Nap} \frac{U}{u}$ zwischen $\frac{U-u}{u}$ und $\frac{U-u}{U}$ liegt. Dieser ist das wichtigste Instrument bei der Aufstellung der „Tabula Radicalis", er gestattet, von dem Endgliede einer der aufgestellten Reihen zu dem wenig verschiedenen Anfangsglied der nächsten streng überzugeben. Für Byrgs Logarithmen wäre ein ähnlicher Satz *nicht* genau richtig. Wenn Herr Gravelaar (S. 83, Note) sagt, Napier habe über die erste Zahl, 0,9999999 ($= 1 - 10^{-7}$) nur angenommen, dafs ihr Logarithmus zwischen den Grenzen $1 \cdot 10^{-7}$ und $1{,}0000001 \cdot 10^{-7}$ liege, so scheint das wohl mit S. 80 in Übereinstimmung. Aber auf S. 82 zeigt sich, dafs Neper schliefslich doch, um eine brauchbare Annäherung zu erlangen, sich entschliefsen mufste, das arithmetische Mittel der beiden Grenzen als den Wert des Logarithmus anzusehen, was durchaus gerechtfertigt war. Wenn dies aber bei den abgeleiteten Logarithmen der Zahlen 0,9995000 und 0,9900000 geschah, so ist damit auch der erste Logarithmus, log 0,9999999 auf die Mitte des bis dahin festgehaltenen Intervalles, auf $1{,}00000005 \cdot 10^{-7}$, gerückt.

Der Aufbau der Numeri der „Tabula radicalis", die nach Reihen und nach Kolumnen einfache geometrische Reihen bilden und daher beständige Kontrollen der Rechnung ermöglichen, ist ein äufserst glückliches Auskunftsmittel, um die Aufstellung einer einzigen geometrischen Reihe mit dem Faktor 0,9999999 zu umgehen. Diese würde unermefsliche Arbeitszeit erfordern und keine Kontrolle gewähren. Dafs dagegen jener Aufbau, wie schon P. Tannery vermutet hat, nur eine mäfsige Arbeit verursacht, läfst eine Nachbildung der „Tabula radicalis" für die moderne Form der natürlichen Logarithmen (siehe Koppe, *Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht*, Berlin 1893, S. 14) leicht erkennen.

Die Neperschen Logarithmen, negativ genommen, haben genau die Basis e, die Byrgschen haben zur Basis $(1+10^{-4})^{10^4}$, d. h. eine rationale Zahl, die mit e auf 4 Stellen übereinstimmt.

Von der aus Montucla zitierten Berechnungsart Neperscher Logarithmen (S. 30) urteilt Herr Gravelaar, sie habe mit Nepers Verfahren wenig Ähnlichkeit. Sie ist überhaupt unmöglich, denn Montucla verwechselt die Glieder einer geometrischen Reihe mit Zahlen wie $1, \cdots, \sqrt[8]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, 2$, die man von den Grenzen aus durch fortlaufende Bestimmung geometrischer Mittel nach 1 hin fortsetzt.

Dafs Neper das Einschalten nach Proportional-Teilen nicht gekannt habe (S. 84) und es habe durch die regula falsi ersetzen müssen, halten wir für ausgeschlossen, da er in astronomischen Tafeln so bewandert war wie Kepler, dem diese Interpolation als selbstverständlich gilt.

Sehr bemerkenswert ist die Äufserung Nepers (S. 105), er beabsichtige, die Zahl 2,3025842 durch 1,0000000 zu ersetzen. Hieraus ergiebt sich, dafs für ihn der Übergang zu Briggischen Logarithmen nur ein Umrechnen auf ein anderes Mafs war. Wenn er übrigens die neuen Logarithmen als eine „species alia multo praestantior" bezeichnet (S. 68), so hat doch die weitere Entwickelung gezeigt, dafs die ursprünglichen in theoretischer Hinsicht den ersten Platz behaupten.

Wir gehen zu den trigonometrischen Entdeckungen Nepers über. Die Regel über rechtwincklige Dreiecke (S. 40) stellt sich hier nicht als dürftige Gedächtnishilfe dar, sondern wird, dem Originale entsprechend, anschaulich an der Figur des Pentagramma mirificum entwickelt. Als Vorgänger haben nicht sowohl Torporley als van Lansberge und Pitiscus zu gelten, die auch schon die Komplemente der Stücke einführen.

Über Nepers Analogien (S. 93) sind viele Irrtümer verbreitet, die kürzlich auch in dieser Zeitschrift 1_3, 1900, S. 271—272 besprochen wurden. Nach Berichtigung derselben werden zwei alte Beweise beigefügt. Der eine rührt von Oughtred her (*Trigonometria*, London 1657, S. 34, nicht Caswell, nach einer von Herrn Gravelaar mir mitgeteilten Berichtigung) und benutzt die Winkeltreue der stereographischen Projektion, der andere, von Baker, ist analytisch.

Neper hat auch mechanische Methoden ersonnen, um die grofse Anspannung, die den Geist bei langen Multiplikationen ermüdet, zu verringern. Nach einem Bericht von Ezechiel de Decker fanden diese in der *Rhabdologia* beschriebenen Hülfsmittel den gröfsten Beifall der Zeitgenossen, und zwar mit Recht, sie könnten noch heute, wenn die 7-stelligen Logarithmen ihre Dienste versagen, von denen verwandt werden, die über eine Rechenmaschine nicht verfügen.

Noch viel förderlicher als die Methode der „ossa Neperi" ist das *Promtuarium multiplicationis*. Auf reihenweis gelegte Lineale mit Ziffern werden andere, die mit Ausschnitten versehen sind, kolumnenweise gelegt. Jene entsprechen den Ziffern des Multiplicandus, diese denen des Multiplicators. Nach dem Legen der Lineale erhält man durch blofse Additionen in diagonaler Richtung das Produkt.

In der *Rhabdologia* kommt auch (S. 55) das erste gedruckte Beispiel einer abgekürzten Multiplikation vor.

Mehr als 200 Jahre nach Nepers Tode wurden aus seinem Nachlafs noch Bruchstücke einer Rechenlehre und einer Algebra bekannt. Wir können daraus nur eine besondere Anweisung zum Subtrahieren erwähnen, nach der man jede Ziffer des Resultats selbständig bestimmt. Eine gedruckte Beschreibung dieses Verfahrens, welches die Astronomen benutzen, wenn sie von links nach rechts subtrahieren, hatte ich bisher ebensowenig wie Herr Gravelaar irgendwo angetroffen.

Ein Register würde den Nutzen des Werkes noch vermehren.

Berlin. M. Koppe.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
2_3 (1901) : 4. — [Recension der Bände 1_2, 2_3:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 119—122. (P. Stäckel.) — [Recension des Bandes 2_3:] Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 345—347. (F. Engel.) — [Recension des Heftes 2_3, : 2/3:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 556—558. (G. Wertheim.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1901 : 4. — 1902 : 1.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [3
30 (1899) : 3

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [4
10 : 1 (avril — octobre 1901). — [Anzeige:] Annuaire des mathém. 1901/1902, 465—468. (P. H. Schoute.)

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl. Paris, Naud 1902. [5
12°, (3) + XXII + 468 + (1) S. — [5 fr.] — [Recension:] L'enseignement mathém. 4, 1902, 61.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Auflage (1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 441—443, 445—447. (G. Eneström, G. Vacca, M. Koppe.) — L'enseignement mathém. 3, 1901, 459—460. (J. Boyer.) — Mathesis 1_2, 1901, 250. (P. M.) — Monatsb. für Mathem. 13, 1902 Lit.-Ber. 9. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 284. (G. Wertheim.) = 1^2 (1894). [Bemerkungen:] Jahresber. über die Fortschr. der class. Altertumswiss. 108, 1901, 60—66. (W. Schmidt.) [6

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Édition française revue et corrigée par

l'auteur, traduite par J. Mascart. Paris, Gauthier-Villars 1902. [7
8°, XIII + (1) + 296 S.

Konen, H., Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipzig, Hirzel 1901. [8
8°, (5) + 132 S. — [4 *M*] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 305—306. (E. Netto.)

Mach, E., Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Aufl. 4 (1901) [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 3061—3062. — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit.-Ber. 13. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 453—456. (S. Günther.) [9

b) Geschichte des Altertums.

Kugler, F. X., Die babylonische Mondrechnung (1900). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient., 1901. 8 S. [10

Bürk, A., Das Āpastamba-Śulba-Sūtra, herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen. [11
Leipzig, Deutsche morgenländ. Gesellsch., Zeitschr. 55, 1901, 543—591. — Über Herkunft und Entwickelung der ältesten indischen Geometrie (der Verfasser Āpastamba scheint etwa im 5. vorchristlichen Jahrh. gelebt zu haben). — Die im Titel erwähnte Übersetzung fehlt

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. III (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 25_2, 1901, 85—90. (P. Tannery.) [12

Schmidt, M. C. P., Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. 1, 2 (1900—1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 2602—2603. [13

Carrara, B., I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. [14
Rivista di fisica (Pavia) 3, 1901, 407—417; 4, 1901, 36—54, 115—128, 208—220, 304—318.

***Ziaja, J.,** Zu Aristoteles' Lehre vom Lichte. Schrimm 1901. [15
4°. — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Gymnasiums in Schrimm. — [Recension:] Beiblätter zu den Ann. der Phys. 25, 1901, 562—563. (Gn.)

Staigmüller, H., Herakleides Pontikos und das heliokentrische System. [16
Arch. für Gesch. d. Philosophie (Berlin) 15, 1902, 141—165.

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 3195. — Monatsh. für Mathem. 12, 1901; Lit.-Ber. 47—48. [17

Schmidt, W., Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz. [18
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 377—388.

Heronis Alexandrini Opera omnia II:1 (1901). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 79—81. (G. Vailati.) [19

Hultsch, Fr., Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen. [20
Das Weltall (Berlin) 2, 1901, 49—55.

Förster, W., Zur Ehrenrettung des Ptolemaeus. [21
Das Weltall (Berlin) 2, 1901, 16—18 — Über die astronomischen Leistungen des Ptolemaios.

Heiberg, J. L., Anatolius sur les dix premiers nombres. Macon 1901. [22
8°, 33 S. — Mémoire lu au congrès d'histoire des sciences, Paris 1900. — Mit hinzugefügter französischer Übersetzung von P. Tannery.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (1900). [Recension:] Mathesis 1_3, 1901, 251. [23

Goeje, M. J. de, Notice biographique d'Ibn al-Haitham. [24
Haarlem, Soc. d. sc., Archives néerland. 6_2, 1901, 668—670.

Hellmann, G., Zur Optik des Robertus Linconiensis. [25
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 443—444.

Curtze, M., Die Dunkelkammer (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 2423. [26

Müntz, E., Léonard de Vinci et les savants du moyen âge. [27
Revue scient. 16_4, 1901, 513—515.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Hoppe, E., Zur Geschichte der Fernwirkung (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 370—371. [28

Birkenmajer, L. A., Mikołaj Kopernik. 1 (1900). [Bemerkungen:] Wiadomości matem. 5, 1901, 252—254. (F. Kucharzewski, S. D.) [29

Birkenmajer, L. A., Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski, a najstarsza karta geograficzna polski. [30
Krakow, Akad. umiej., Rozprawy 41, 1901, 134—222 + Karte. — [Résumé:] *Krakow*, Akad. umiej., Bulletin 1901, 63—71 + Karte. (L. A. Birkenmajer.)

Frizzo, G., De numeris libri duo authore J. Noviomago, esposti ed illustrati (1901). [Recensione:] Periodico di matem. 17, 1901, 101—102. (K.) [31

***Macrì, G.,** Francesco Maurolico nella vita e negli scritti. Messina, D'Angelo Freni 1901. [32
8°. — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 96.

Grofse, H., Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Methodik des Rechenunterrichtes. Leipzig, Dürr 1901. [33
8°, 183 S. — [3, 60 *M*] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 2801, 3136. (M. Cantor.)

***Tychonis Brahe** Astronomiae instauratae mechanica. Ad fidem editionis principis edendum curavit et praefatus est B. Hasselberg. Holmiae 1901. [34
4°, 16 + 84 S. + Porträt. — [50 kr.]

***Tychonis Brahe** Operum primitias De nova stella, edidit regia societas scientiarum danica. Haunie 1901. [35
4°. — [Recension:] Wiadomości matem. 5, 1901, 267.

Delisle, L., Tychonis Brahe Astronomiae instauratae mechanica. [36
Journ. des sav. 1901, 79—87.

Bosmans, H., La trigonométrie de Tycho Brahé. [37
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1901. 19 S.

Albrecht, F. und **M.,** Die Reste der Sternwarten Tycho Brahes auf der Insel Hveen. [38
Das Weltall (Berlin) 2, 1901, 7—12, 21—25.

Grufs, G., [Über Tycho Brahe]. [39
Prag, Česk. akad., Věstnik 10, 1901, 435—446. — Böhmisch.

Peprný, I., [Tycho Brahe in der böhmischen Litteratur]. [40
Časopis pro pěstov. mathem. 30, 1901, 209—222. — Böhmisch.

Серебрякій, Вл., Памяти Тихо Браге. [41
Vjestnik elem. matem. 26, 1901, 159—163. — Serebrjakij, Vl., Zum Andenken an Tycho Brahe.

***Studnička, F. J.,** Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie, Tycho Brahe. Prag 1901. [42
8°, 54 S.

T[hirion], J., Troisième centenaire de la mort de Tycho Brahe. [43
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_2, 1902, 248—259.

Bolton, H. C., Evolution of the termometer 1592—1743 (1900). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 2424. [44

Bosmans, H., Le traité des sinus de Michiel Coignet (1901). [Recension:] *Amsterdam*, Wisk. Genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 194—196. (N. L. W. A. Gravelaar.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 62. — Studien (Utrecht) 57, 1901, 275—280. (J. A. van Dijck.) — Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 31—32. (A. F.) [45

Vacca, G., Sui manoscritti inediti di Thomas Harriot. [46
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1902, 1—6.

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XI. Firenze, Barbera 1901. [47
4°, 636 + (1) S. — Herausgegeben von A. Favaro. — Dieser Band enthält den Briefwechsel 1611—1613.

Tannery, P., Galilei et les principes de la dynamique. [48
Revue génér. d. sc. 12, 1901, 330—336 — [Recension:] Beibl. zu den Ann. der Physik 25, 1901, 742—743. (Gd.)

Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik. (1899). [Recension:] Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 347—348. (M. Cantor.) [49

Wislicenus, W. F., Über die Mondkarten des Langrenus. [50
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 384—391.

Bosmans, H., Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de Saint-Vincent et les manuscrits de Della Faille. [51
Bruxelles, Soc. scient., Annales 26:2, 1901. 19 S.

Perrier, E., Pascal, créateur du calcul des probabilités et précurseur du calcul integral. [52
Revue génér. d. sc. 12, 1901, 482—490.

Favaro, A., Il metro proposto come unità di misura nel 1675. Macon 1901. [53
8°, 17 S. — Mémoire présenté au congrès d'histoire des sciences, Paris 1900.

Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome neuvième. Correspondance 1685—1690. La Haye, Nijhoff 1901. [54
4°, (5) + 662 + (1) S. + Porträt + 2 Pl.

Korespondencya Kochańskiego i Leibniza według odpisów E. Bodemanna, po raz pierwszy podana do druku przez S. Dickstein. [55
Prace matem.-fizyczne 12, 1901, 225—278. — Der Briefwechsel zwischen Kochansky und Leibniz, nach den Abschriften von E. Bodemann, herausgegeben von S. Dickstein.

Schur, W., Beiträge zur Geschichte der Astronomie in Hannover. [56
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Festschrift 1901 (Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens), 91—152 + 4 Porträttafeln. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 3272—3273.

Eneström, G., Über die Summierung zweier trigonometrischer Reihen. [57
Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 444. — Anfrage.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Recension:] L'enseignement mathém. 3, 1901, 460—462. (J. H. Graf.) — Bullet. d. sc. mathém. 25_2, 1901, 131—132. (E. E.) — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit.-Ber. 9. — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, 40—44. (H. B.) [58

Mascheroni, L., La geometria del compasso. Nuova edizione pubblicata di G. Fazzari (1901). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 114. (G. L.) [59

Dickstein, S., Przyczynek do historyi zasad rachunku nieskończonostkowego (1899). [Recension:] Prace matem.-fizyczne 12, 1901, 267—288. (K. Z.) [60

Günther, S., Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert (1901). [Recension:] Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 25—26. (P. R.) [61

***Mangoldt, H. von,** Bilder aus der Entwickelung der reinen und angewandten Mathematik während des neunzehnten Jahrhunderts mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Carl Friedrich Gauss. Festrede. Aachen 1900. [62
8°, 22 S.

***Vries, H. de,** De projective meetkunde en hare grondleggers. Amsterdam, Dorssen 1901. [63
8°, 30 S.

***Weber, H.,** Über die Entwickelung unserer mechanischen Naturanschauung im 19. Jahrhundert. [64
Des Stiftungsfest der Universität Strafsburg (Strafsburg 1900). 8°, 23 S. — [Recension:] Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 353. (M. Cantor.)

Whittaker, E. T., Report on the progress of the solution of the problem of three bodies (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 306. [65

***Levitsky, G.**, [Die Astronomen der Universität Jurjeff in den Jahren 1802—1894.] [66
Jurjeff, Univ., Acta 1900. 224 S — Russisch.

McGee, W. J., A century of progress in acoustics. [67
Science (New York) 14_2, 1901, 987—997.

Gauss, C. F., Werke. Band VIII (1900). [Recension:] Journ. d. sav. 1900, 668—678. [68

Klein, F., Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814. [69
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Festschrift 1901 (Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens), 1—44 + Porträt + Facsim.

Dedekind, R., Gauss in seiner Vorlesung über Methode der kleinsten Quadrate. [70
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Festschrift 1901 (Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens), 45—90.

Cantor, M., Beiträge zur Lebensgeschichte von Carl Friedrich Gauss. Macon 1901. [71
8°, 20 S. — Mémoire présenté au congrès d'histoire des sciences, Paris 1900.

Brocard, H. et **Mannheim, A.** [Renseignements sur Bobilier (1797—1832).] [72
L'interméd. des mathém. 8, 1901, 329—330.

Brückner, J. M., Geschichtliche Bemerkungen zur Aufzählung der Vielflache (1897). [Recension:] Arch. der Mathem. 1_3, 1901, 187. (E. Jahnke.) [73

Lampe, E., Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind. [74
Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 253—256

Памяти М. В. Остроградскаго. [75
Vjestnik elem. matem. 26, 1901, 97—101 [mit Porträt]. — Zum Andenken an M. V. Ostrogradskij.

Gundelfinger, S., Drei Briefe Aronholds an Hesse; Briefentwurf von Hesse an Aronhold. [76
Journ. für Mathem. 124, 1901, 59—82.

Engel, F., Sophus Lie (1900). [Recension:] L'enseignement mathém. 3, 1901, 305—306. (H. F.) [77

Wölffing, E., Nachtrag zu dem Ergänzungsverzeichnis zum E. Czuberschen Bericht über Wahrscheinlichkeitsrechnung. [78
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. 3_2, 1901, 57—63, 93—95.

Halsted, G. B., Supplementary report on non-Euclidian geometry. [79
Science (New York) 14_2, 1901, 705—717.

Müller, R., Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte. [80
Arch. der Mathem. 2_3, 1902, 342—344.

Kaufmann, W., Die Entwickelung des Elektronenbegriffes. [81
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 557—559, 569—571. — Vortrag an der Naturforscherversammlung in Hamburg 1901.

Wölffing, E., Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, die im Jahre 1900 in technischen Zeitschriften erschienen sind. [82
Zeitschr. für Mathem. 46, 1901, 501—506.

e) Nekrologe.

Giulio **Ascoli** (1843—1896). [83
Periodico di matem. 4_2, 1901, 144—151. (G. Riboni.)

Eugenio **Beltrami** (1835—1900). [84
Pavia, Università, Annuario 1900/1901. 18 S. (G. A. Maggi.) — Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 392—440 + Porträt. (G. Loria.) — Mathesis 1_2, 1901, 247—248. (P. M.)

Thomas **Craig** (1855—1900) [85
Baltimore, Johns Hopkins univ., Circulars 19, 1900, 67.

Guelfo **del Prete** (1872?—1901). [86
Il Pitagora 8, 1901, 32. — Periodico di matem. 4_2, 1901, 160 (A. Giacomini.)

Richard **Doergens** (1839—1901). [87
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 57—68 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Lampe.)

Charles **Graves** (1812?—1899). [88
London, Royal soc., Year-Book 1901, 221.

Charles **Hermite** (1822—1901). [89
London, Mathem. soc., Proceedings 33, 1901, 405—407. (G. B. Mathews.). — *Manchester*, Philos. soc., Memoirs 45, 1901, 38—39. — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus 133, 1901, 1046—1047. (F. A. Fouqué.) — *Torino*, Accad. d. sc., Atti 36, 1901, 245—250. (E. d'Ovidio.) — Acta Mathem. 25, 1901, 87—111. (Zweiter Abdruck des Nekrologes von E. Picard in den „Annales de l'école normale".) — Annuaire des mathém 1901/1902, XI—XXII [mit Porträt]. (E. Borel.)

Ernest de **Jonquières** (1820—1901). [90
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 349—351. — *Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus 133, 1901, 1049. (F. A. Fouqué.) — L'enseignement mathém. 3, 1901, 447—448 (C. A. L.)

Gustav **Karsten** (1820—1900). [91
Berlin, Deutsche physikal. Gesellsch., Verhandl. 2, 1900, 147—159. (B. Schwalbe.) — *Kiel*, Naturw. Verein, Schriften 12, 1900. 8 S. (L. Weber.) — Naturwiss. Rundschau 15, 1900, 413—414. (B. Schwalbe.)
L. Weber, Zum Gedächtnisse Gustav Karstens. Kiel 1900. 8°, 21 S. + Porträt.

Rudolf **König** (1833—1901). [92
Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 671. (J. S.)

Sophus **Lie** (1842—1899). [93
London, Royal soc., Year-Book 1901, 194.

Valerian **Ligin** (1846—1900). [94
Odessa, [Technische Gesellschaft] 1900, Nr. 1: 44—49; Nr. 2: 1—14. — Russisch

Martin **Pokorný** (1836—1901?). [95
Časopis pro pěstov. mathem. 30, 1901, 81—100. (A. Pánek.)

Thomas **Preston** (1860—1900). [96
Americ. journ. of sc. 9_4, 1900, 395. — Nature 61, 1900, 474—475.

Henry Augustus **Rowland** (1848—1901). [97
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 205—231. (J. Thirion.) — Science (New York) 13_2, 1901, 865—877. (T. C. Mendenhall.)

Oskar **Schlömilch** (1823—1901). [98
Bollett. di bibliogr. d sc. matem. 1901, 124—125.

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [99
Beiblätter zu den Ann. d. Phys. 25, 1901, 1043—1044. (Gn.) — Nature 64, 1901, 305—307. (G. Chrystal.)

Johann Wendel **Tesch** (1840—1901). [100
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw Archief 5_2, 1901, 310—316 [mit Porträt]. (P. H. Schoute.)

f) Aktuelle Fragen.

Brodmann, Der internationale Katalog der naturwissenschaftlichen Litteratur. [101
Centralbl. für Bibliotheksw. 1901, 498—500.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. I, II (1900—1901). [Recension:] Arch. der Mathem. 2_3, 1901, 205. (M. Cantor.) — Bollett. di bibliogr. d. sc matem. 1901, 114—116. (G. L.) — Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 3196. (E. Netto.) — Mathesis 1_3, 1901, 251. — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit-Ber. 19. — Revue génér. d. sc. 12, 1901, 673. [102

Bobynin, V. V., L'enseignement mathématique en Russie (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 22, 1901, 2231. [103

Hatzidakis, N. J., Sur l'état actuel des mathématiques supérieures en Grèce. [104
L'enseignement mathém. 3, 1901, 397—400.

Stäckel, P., Über die Entwicklung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten. [105
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 26—37.

[Die amerikanische Mathematiker-Versammlung in Denver 1901.] [106
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 73—74. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1901, 71—81. (G. A. Miller.) — Science (New York) 14_2, 1901, 393—403. (G. A. Miller.)

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Hamburg 1901.] [107
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1901, 4—10. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1901, 113—122. (C. M. Mason.) — Naturwiss. Rundschau 16, 1901, 552—555. (J. B. Messerschmitt, O. Pund.)

[Die englische Mathematiker-Versammlung in Glasgow 1901.] [108
Nature 64, 1901, 586—587. (C. H. Lees.)

[Die russische Mathematiker-Versammlung in St. Petersburg 1901.] [109
Vjestnik elem. matem. 27, 1902, 1—7, 25—30. (D. V. Kaban.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— P. Arnold in Los Angelos zum Professor der Mathematik an der Universität von Süd-Californien daselbst.

— Dr. H. Barnes zum Professor der Physik an der Universität von Toronto.

— Privatdocent G. Bohlmann in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor J. E. Boyd zum Professor der Mathematik an der Universität von Ohio.

— T. G. I'a Bromwich zum Professor der Mathematik am „St. Johns college" in Cambridge.

— Professor H. L. Callendar zum Professor der Physik am „Royal college of science", Sonth Kensington.

— Privatdocent P. Cousin in Bordeaux zum Professor der Mathematik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Professor A. C. Dixon zum Professor der Mathematik am „Queens college" in Belfast.

— Professor Th. C. Esty in Amherst zum Professor der Mathematik an der Universität in Rochester.

— Privatdocent E. Fagnart in Gent zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. J. H. Hall zum Professor der Physik am „Illinois college" in Jacksonville.

— Privatdocent Hammert in Innsbruck zum Professor der Physik daselbst.

— Professor N. J. Hatzidakis in Athen. zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdocent F. Hausdorff in Leipzig zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor R. Haussner in Gießen zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Professor K. Heun in Berlin zum Professor der Mechanik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

— A. M. Kenyon in Lafayette zum Professor der Mathematik an der „Purdne university" daselbst.

— E. Lasker zum Professor der Mathematik am „New College" in Manchester.

— F. B. Littell an der Marinesternwarte in Washington zum Professor der Mathematik an der Marineschnle.

— Professor G. Mie in Karlsruhe zum Professor der Physik an der Universität in Greifswald.

— Privatdocent Chr. Moser in Bern zum Professor der Versicherungswissenschaft an der Universität daselbst.

— Dr. D. A. Murray in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Dalhonsie college" in Halifax (Nova Scotia).

— Privatdocent E. Neumann in Halle zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Breslau.

— Dr. L. von Prantl in Nürnberg zum Professor der technischen Mathematik an der Universität in Jena.

— Professor J. Precht in Heidelberg zum Professor der Physik an der technischen Hochschule in Hannover.

— W. M. Reed zum Professor der Astronomie an der Universität in Princeton.

— Privatdocent K. Schwarzschild zum Professor der Astronomie an der Universität in Göttingen.

— Dr. H. Simon in Frankfurt am Main zum Professor der Physik und Elektrotechnik an der Universität in Göttingen.

— Privatdocent J. Sommer in Göttingen zum Professor der Mathematik an der landwirtschaftlichen Akademie zu Bonn-Poppelsdorf.

— Dr. P. Weiss znm Professor der Physik am Polytechnikum in Zürich.

— Privatdocent A. Wiman in Lund zum Professor der Mathematik an der Universität in Upsala.

— Professor E. M. Wood in Baldwin (Kansas) zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Alhion college" (Michigan).

— Privatdocent L. Zehnder in München zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. K. Zeissig zum Professor der Physik an der technischen Hochschule in Darmstadt.

Todesfälle.

— Charles A. Bacon, Professor der Astronomie am „Beloit college", gestorben den 6. November 1901, 41 Jahre alt.

— Henry Brenner, Professor der Mathematik und Astronomie am „Albion college" in Michigan, ertrunken im „Lake Orion" den 14. August 1901.

— Cato Maximilian Guldberg, Professor der Mathematik an der Universität in Kristiania, geboren in Kristiania den 11. August 1836, gestorhen daselhst den 14. Jannar 1902.

— Henry G. Hennessy, Professor der angewandten Mathematik am „Royal college" in Dublin, geboren den 19 März 1826, gestorben in Dnblin den 8. März 1901.

— Johannes Pernet, Professor der Physik am Polytechnikum in Zürich, geboren in Berlin den 18. Dezember 1845, gestorhen in Zürich den 15. Februar 1902.

— Clémence Royer, Verfasserin physikalischer und astronomischer Arbeiten, geboren in Nantes den 21. April 1830, gestorben in Paris 1902.

— Charles Antony Schott, am geodätischen Institnt in Washington, geboren in Mannheim den 7. August 1826, gestorben in Washington den 31. Juli 1901.

Demnächst erscheinende Werke.

— Herr H. G. Zeuthen hat jetzt seine Arbeit über die Geschichte der Mathematik des 16. und 17. Jahrhunderts heendet, und wird dieselbe demnächst in dänischer Sprache veröffentlichen.

— Die in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 376 erwähnte bibliographische Arbeit des Herrn E. Wölffing ist jetzt im Manuskript fast fertig und wird am Ende dieses Jahres als besonderer Band der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen. Die Anordnung der Stichwörter, deren Zahl 313 beträgt, wird nicht alphabetisch, sondern systematisch sein. Voraus geht eine Einleitung über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrh. und ein alphabetisches Stichwortverzeichnis; am Schlnfs kommt noch ein Antoren-Register. Der ganze Umfang der Arbeit wird etwa 30 Druckbogen betragen. — Eine entsprechende Bibliographie der angewandten Mathematik ist schon von Herrn Wölffing in Aussicht genommen nnd wird anch in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen.

Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitnng.

— Herr L. Königsberger in Heidelberg bereitet eine grofse Helmholtz-Biographie vor. Auf Grund des gesamten wissenschaftlichen Nachlasses und des Briefwechsels des Verstorbenen wird eine eingehende Darstellung seines Lebens und seiner wissenschaftlichen Wirksamkeit gegeben werden. Für die Bearbeitung des umfangreichen Materials ist ein Zeitraum von etwa zwei Jahren in Anssicht genommen.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Société scientifique de Bruxelles.* Concours de l'année 1902. Faire une étnde approfondie des travaux de Simon Stevin sur la mécanique, en les comparant aux travaux de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque.

— *Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano.* Tema di premio per l'anno 1903. Portare un contribnto od un perfezionamento notevole ed originale alla teoria dei gruppi di trasformazioni, fondata specialmente da Lie e svilnppata nell' ultimo quarto di secolo.

— *Société hollandaise des sciences à Haarlem.* Concours de l'année 1903. An milieu du 17e siècle il s'est développé au Japon (voir Cantor, *Vorlesungen über*

Geschichte der Mathematik Bd. III, 1898, p. 646—650 et aussi Revne semestrielle des pnblications mathématiqnes, t. VI, 2e partie, p. 18—23) une science mathématiqne particulière, dont on ne sait pas an juste jusqn'à quel point elle doit son origine à des influences européennes. Si une telle influence a existé, il n'est pas improbable que la langue hollandaise ait servi de véhicule, de sorte qne cette influence aurait émané de travaux hollandais originaux ou traduits. Quoiqu'il en soit, la Société demande une étude relative à la nature et le degré de développement de cette science japonaise, en même temps qn'une recherche de ses rapports avec la science européenne.

Vermischtes.

— La commission du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques vient de puhlier son rapport pour l'année 1901. Il en résulte qne 11 séries de fiches (= environ 11 000 titres) ont été mises en vente, que la 12e série est actnellement sous presse, et que la 13e série sera pnbliée dans le cours de l'année 1902. La commission a encore environ 10 000 fiches manuscrites dans les cartons, et elle espère ponvoir faire imprimer en 1903 les 14e et 15e séries. — Il a été décidé qne les travaux de dépouillement seront poussés jusqn'en 1900 inclusivement, de manière à comprendre le 19e siècle tont entier.

— Das dentshe Burean für internationale Bibliographie in Berlin hat im Herhst 1901 begonnen, eine Bihliographie der dentschen mathematischen und naturwissenschaftlichen Litteratur herauszugehen. Die Bibliographie erscheint wöchentlich in Heften von etwa zwei Druckbogen Umfang, und enthält in sachlicher Ordnung, nach dem Schema, das für den internationalen natnrwissenschaftlichen Katalog festgestellt ist, die Titel der neuerschienenen deutschen Zeitschriftenartikel und selhständig publizierten Schriften.

— Mit dem Anfange des Jahres 1902 hat die Dentsche physikalische Gesellschaft begonnen, ein halhmonatliches physikalisches Litteraturverzeichnis herauszugeben. Dies Verzeichnis, das von den Herren K. Scheel und R. Assmann redigiert wird, hringt gleich nach ihrem Erscheinen die Titel der physikalischen Pnhlikationen nach Materien geordnet.

— Der Begründer und hisherige Herausgeher der Zeitschrift für mathematischen und natnrwissenschaftlichen Unterricht, Herr J. C. V. Hoffmann in Leipzig hat die Leitung der Zeitschrift niedergelegt, und Herr H. Schotten in Halle hat dieselhe mit dem Anfange des Jahres 1902 übernommen.

— Die 11. Versammlung russischer Naturforscher fand in St. Petershurg 2.—12. Jannar 1902 (= 20.—30. December 1901 a. St.) statt. Die Sektion für Mathematik und Mechanik hielt ihre Sitzungen 3.—11. Jannar.

— Eine kurze Übersicht (17 Druckseiten) der Verhandlungen des 2. internationalen Mathematiker-Kongresses in Paris 1900, vom Generalsekretär des Kongresses zusammengestellt, ist jetzt veröffentlicht worden.



Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure.

Par Paul Tannery à Pantin.

1. On connait assez l'influence exercée, daus l'un des domaines de la haute analyse, par les problèmes que les phénomènes acoustiques posent aux mathématiciens. Depuis la première impulsion donnée par Jean Bernoulli, à propos de la théorie des cordes vibrantes, c'est là une matière devenue classique[1]), quoiqu'elle ne soit point encore épuisée. Mais, sur un terrain beaucoup plus élémentaire, la découverte de la première loi de physique mathématique qui ait été connue, celle qui concerne les intervalles musicaux, n'a-t-elle pas, elle aussi, joué un rôle dans le développement de la mathématique grecque, qui alors sortait à peine de son berceau? Des quatre branches que l'Ecole de Pythagore avait constituées, des quatre sciences sœurs[2]), qui devaient plus tard former le quadrivium des Universités au moyen âge, il en est une que l'histoire des mathématiques néglige un peu trop systématiquemeut, comme je vais essayer de le montrer. Et tout d'abord, j'examinerai si, dans les *Eléments* d'Euclide eux-mêmes, il ne subsiste pas au moins une trace de la doctrine musicale des Pythagoriens.

2. La part faite à chacune des quatre sciences dans les *Eléments* est en tout cas très inégale. Si la *Géométrie* forme l'objet principal, si l'*Arithmétique* a fourni cependant trois livres (VII, VIII, IX), la *Sphérique*, cepeudant déjà passablement développée, n'a, pour ainsi dire, pas été mise à contributiou, puisqu' Euclide ne traite de la sphère que pour établir, d'après Eudoxe, le principe fondamental de la mesure de son volume, et pour enseigner, probablement d'après Théétète, l'inscription des polyèdres réguliers. A première vue, toute notion d'origine proprement musicale semble de même exclue des *Eléments:* en tout cas, nous ne pouvons évidem-

1) Elle vient d'être, de la part de H. Burkhardt, l'objet d'une importante monographie conçue suivant l'ordre historique et publiée dans le Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 10: 2, 1901.

2) Archytas, dans Nicomaque, *Arithm.* I, 3.

ment chercher que dans le Livre V, consacré à la théorie des rapports, ou dans le Livre VI (applications de cette théorie).

Bien entendu, la notion même de rapport doit être écartée. Soit en arithmétique, soit en géométrie, cette notion remonte évidemment à la période préscientifique; elle s'est introduite, d'un côté, dès les premiers échanges commerciaux, de l'autre, dès les premiers essais graphiques, et si ancienne que soit également la musique, ce n'est sans doute que bien longtemps après les âges barbares que l'on s'est avisé de comparer les longueurs des cordes vibrantes ou des tuyaux sonores.

Cependant il est incontestable que la théorie des rapports, entre nombres entiers, a été élaborée, au moins en grande partie dans les écrits mathématiques antérieurs à Eudoxe, à propos de la doctrine des intervalles musicaux; c'est ainsi que Boèce (*Mus.* III, 11) nous a conservé une démonstration d'Archytas, de forme euclidienne déjà bien accusée, mais malheureusement incomplète, sur l'impossibilité d'intercaler un nombre moyen proportionel entre deux termes dans le rapport de deux entiers consécutifs, problème essentiellement musical. C'est de même d'après la tradition remontant à ces écrits, que les néopythagoriciens postérieurs à l'ère chrétienne, à commencer par Nicomaque, reconnaissent comme étant du domaine proprement musical tout ce qui concerne le nombre en relation (rapports, proportions), et si Nicomaque traite néanmoins ce sujet dans son *Introduction arithmétique*, Théon de Smyrne, tout au contraire, le réservera pour la section musicale de son Traité mathématique.

3. Eudoxe, lorsqu'il a donné à la théorie des rapports la forme conservée dans le Livre V des *Eléments*, devait donc disposer de matériaux empruntés à des écrits traitant de musique aussi bien qu'à d'autres traitant d'arithmétique ou de géométrie. Mais on ne peut songer à faire un départ entre ces divers éléments, et même, eu égard au but que poursuivait Eudoxe (constituer une théorie indépendante de la circonstance que les termes du rapport soient commensurables ou non), on pourrait présumer que les sources géométriques ont dû avoir pour lui un intérêt prédominant.

Cependant sa terminologie offre une singularité très-remarquable; les rapports n'y sont pas conçus comme des grandeurs dont les nombres homonymes (entiers ou fractionnaires) expriment la mesure. Quand ces nombres se multiplient, les rapports forment un composé par addition[1]); quand les deux termes d'un rapport sont élevés à la seconde ou la troisième puissance, le rapport est dit doublé, triplé, etc.

1) Euclide, *Eléments* VI, 23, etc. (la définition 5 du même livre ne peut être invoquée). Le vrai sens de la terminologie est le suivant: si l'on a une suite de

Il est inutile d'insister sur l'importance que devait avoir l'idée qui a présidé à l'adoption de cette nomenclature; c'est sous son inspiration qu'au XIVe siècle NICOLE ORESME devait concevoir des rapports d'ordre non entier, c'est à dire les exposants fractionnaires; c'est encore cette nomenclature que suivait NAPIER quand il choisissait le mot *logarithme* (nombre du rapport); et si la forme sous laquelle il a présenté son invention en masque la première origine, ce choix du terme technique ne permet point de la méconnaître.

Tout cela est bien connu, mais ce qui n'a point été remarqué, que je sache, c'est que, si l'on remonte au delà d'EUCLIDE, l'idée dont il s'agit ne peut être regardée comme ayant une source, soit géométrique, soit arithmétique. Pour l'objet propre des *Eléments*, il eût certainement été plus simple et plus intelligible de dire, par exemple: «Deux triangles (pyramides) sont dans le rapport tétragonique (cubique) de leurs côtés homologues.» A tout le moins, HIPPOCRATE de Chios[1]) dit que les segments semblables de cercle ont entre eux le même rapport que leurs bases en puissance, c'est à dire que les carrés de leurs bases; car il ne connaît point encore cette expression de rapport doublé.

4. En arithmétique, à la vérité, nous sommes aujourd'hui habitués à considérer la notion du logarithme comme dérivant directement de celle des progressions de puissances entières. Mais précisément les Grecs n'ont jamais désigné les puissances d'après leurs numéros d'ordre successifs; ils employaient des expressions empruntées à la géométrie, conformément à la nomenclature de DIOPHANTE, qui peut remonter jusqu'à l'Ecole de PYTHAGORE.[2]) D'autre part, non seulement les formules euclidiennes pour les rapports sont étrangères aux arithméticiens grecs, mais elles embarrassent singulièrement les commentateurs qui veulent expliquer les opérations numériques à faire pour ajouter deux rapports ou retrancher l'un de l'autre (c'est-à-dire multiplier les nombres homonymes ou diviser l'un par l'autre).[3]) Enfin, pour éviter la même confusion et le même embarras dans l'enseignement élémentaire, les modernes ont dû abandonner la termi-

termes (nombres ou grandeurs) $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$, le rapport $\frac{a_1}{a_n}$ est composé des rapports $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$; le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ est composé des rapports $\frac{a^2}{ab}$ et $\frac{ab}{b^2}$ qui sont égaux à $\frac{a}{b}$; il est donc dit double de ce dernier rapport.

1) SIMPLICIUS, *Phys.* éd. DIELS, p. 61: *ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει.*

2) HIPPOLYTI *Philosophumena* (*Doxogr. graeci* éd. DIELS, p. 551—552).

3) Voir notamment (Revue de philologie, 7, 1883, p. 82—93) le fragment attribué à DOMNINOS, et mes remarques sur ce fragment (ibid., 9, 1885, p. 132—136).

nologie euclidienne, et considérer le rapport comme mesuré par le nombre homonyme. Il y a là une preuve suffisante de l'étrangeté, au point de vue arithmétique, de la conception grecque.

Tont au contraire, en musique, où les intervalles correspondant à des rapports numériques se comportent, pour leur composition et leur répétition, comme les logarithmes de ces rapports (dans le système de base 2, si l'on prend l'octave pour unité), les formes de langage euclidiennes sont directement intelligibles, et apparaissent comme tout à fait naturelles. C'est ainsi que les égalités:

$$(1)\quad \frac{2}{1} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}, \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \frac{2}{1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{9}{8}$$

se transcrivent immédiatement en musique:

(1) L'octave est composée d'une quinte et d'une quarte,

(2) L'octave est composée de deux quartes et d'un ton majeur,

propositions qui remontent an temps de PYTHAGORE.

N'y a-t-il point là une preuve suffisante que l'origine de la conception grecque de la mesure dn rapport est essentiellement musicale, et l'importance du rôle de la mnsique dans le développement de la mathématique pure ne doit-elle pas être estimée d'après l'importance capitale de cette conception? 1)

5. Cependant ce n'est pas simplement à l'introduction de cette conception qu'il faut limiter ce rôle; je vais du moins essayer de montrer qu'il a également été considérable dans l'élaboration de la notion de l'incommensurable, telle que les Grecs l'ont constituée, et aussi bien dans la création des procédés de calcul pour l'approximation de la valeur des racines carrées. Mais pour exposer cette thèse, je suis obligé à un *excursus* pour expliquer en quoi consistait le problème mathématique essentiel de la théorie des intervalles musicaux chez les Grecs.

Il s'agissait de la composition du tétracorde, c'est à dire de l'ensemble de quatre notes dont les deux extrêmes diffèrent d'une quarte, et dont de plus l'inférieure est la première d'un des deux demi-tons de l'octave. Cette dernière condition a été imposée pour ramener au type dorien les autres gammes, lydienne, phrygienne, etc., en usage aux VIe et Ve siècles avant notre ère. Ce travail de réduction, indispensable pour l'établissement d'une notation commune, ne parait pas avoir commencé avant la

1) Il est inutile de fonrnir des exemples de la correspondance entre la composition des intervalles et celle des rapports numériques, d'après des auteurs grecs; c'est un lieu commun chez tous ceux qui ne se bornent pas à copier ARISTOXÈNE; cependant il convient de remarquer qu'on ne peut invoquer un texte précis antérieur à EUDOXE, si le fragment musical de PHILOLAOS (1, MULLACH) est, comme je le crois, aussi apocryphe que les autres.

seconde moitié du V[e] siècle; vers la fin du IV[e] siècle, il était accompli par ARISTOXÈNE, dont cependant l'oeuvre fut quelque peu remaniée postérieurement. Finalement il devait aboutir à faire perdre tout caractère propre aux octaves barbares, et leurs noms ne devaient plus désigner que des tons différents sur la même échelle dorienne.

En tenant compte de la seconde condition, si nous voulons retrouver dans notre gamme moderne, sans accidents de dièze ou de bémol, les tétracordes grecs, il est commode de ranger les notes à partir du *la* par exemple[1]):

$$la_0\ si_0\ \boldsymbol{UT_1}\ \boldsymbol{RE_1}\ mi_1\ \boldsymbol{FA_1}\ \boldsymbol{SOL_1}\ la_1$$

C'est l'octave du type hypodorien (CLÉONIDE = Pseudo-EUCLIDE). Les notes en italique correspondent aux cordes *fixes* du système grec; $la_0\ mi_1$ est une quinte; donc $mi_1\ la_1$ une quarte; $si_0\ mi_1$ est également une quarte; donc $la_0\ si_0$ est un ton majeur.

Les notes en petites capitales, intermédiaires dans l'un ou l'autre tétracorde, correspondent à des cordes que les Grecs appelaient *mobiles;* nous allons voir pourquoi. Les deux tétracordes sont rigoureusement composés de la même façon, à savoir en montant

$$si\ UT \text{ ou } mi\ FA, \text{ demi-ton majeur, } \frac{16}{15}$$

$$UT\ RE \text{ ou } FA\ SOL, \text{ ton majeur, } \frac{9}{8}$$

$$RE\ mi \text{ ou } SOL\ la, \text{ ton mineur, } \frac{10}{9}.$$

$$\frac{4}{3} = \frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9}.$$

Mais de même que nous pouvons diéser ou bémoliser les notes de notre gamme selon les lois de la tonalité, les Grecs faisaient varier leurs cordes mobiles, et cela avec une liberté beaucoup plus grande, sauf à conserver la même composition dans les deux tétracordes. Théoriquement, d'après ARISTOXÈNE, la variation n'était soumise qu'à deux conditions: que les intervalles les plus faibles fussent placés à la partie inférieure du tétracorde; qu'aucun d'eux ne descendît au dessous du plus petit intervalle modulable qu'il évaluait à un quart de ton; mais en principe, ils pouvaient avoir toute valeur, rationelle ou irrationelle.

1) Il faut bien entendre que, malgré ce changement d'ordre, il s'agit toujours de la gamme du mode majeur, ton d'*Ut* et non pas, malgré l'apparence, de la gamme du ton de *La* mineur; dans celle-ci en effet la note *Re*, pour être la quarte de la tonique, doit être baissée d'un comma; alors le ton majeur et le ton mineur sont intervertis dans le premier tetracorde et il n'est plus exactement composé comme le second; chez tous les théoriciens antérieurs à RAMEAU, l'interversion existe au reste pour les deux modes, et en cela notre gamme n'était pas absolument conforme au type grec, comme elle l'est maintenant.

En pratique, les combinaisons, rangées sous trois genres (enharmonique, chromatique, diatonique) que l'on subdivisait en *nuances* (*χρώματα*) étaient passablement nombreuses, et à côté de notre tonalité, en offraient beaucoup d'autres qui nous sont absolument étrangères, et où les règles d'Aristoxène n'étaient pas d'ailleurs rigoureusement observées. Les musiciens qui se contentaient de son enseignement évaluaient d'ailleurs les intervalles à son exemple, en fractions du ton (on ton et fractions), le ton étant considéré, suivant le principe du tempérament, comme le sixième de l'octave (donc la quarte était regardée comme valant deux tons et demi).

6. Quant aux travaux des *canoniciens*, qui poursuivirent l'étude de la correspondance entre les rapports numériques et les intervalles musicaux, nous en savons ce que Ptolémée nons en a conservé dans ses *Harmoniques*. D'après lui, Didyme, auteur qui vécut vers le milieu du 1er siècle de notre ère, dans un écrit *sur la différence entre les Aristoxéniens et les Pythagoriciens*, aurait posé comme principe pythagoricien que les intervalles du tétracorde doivent exclusivement correspondre à des rapports *épimores*, c'est à dire de la forme $\frac{n+1}{n}$. Si ce principe *a priori* est admis, comme il l'est par Ptolémée, la question de la composition du tétracorde revient tout d'abord au problème mathématique suivant: *Déterminer toutes les manières possibles de décomposer le rapport* $\frac{4}{3}$ *en un produit de trois rapports de la forme* $\frac{n+1}{n}$. Il y avait ensuite, par des essais acoustiques sur le monocorde, à examiner l'effet mélodique de chacune de ces décompositions et à déterminer celles qui représentaient les *nuances* réellement pratiquées.

Fermat (*Œuvres*, t. I, p. 397) n'a pas trouvé le problème mathématique indigne d'être généralisé et traité méthodiquement, ce que cependant il a laissé à faire. En tout cas, les anciens étaient parfaitement capables de le résoudre par tâtonnements. Entre les 24 combinaisons théoriquement possibles, Ptolémée en choisit six, parmi lesquelles se trouve, sous la désignation de *diatonique syntone*, celle qui répond à notre gamme du mode majeur, et qui devait après lui triompher définitivement des autres échelles concurrentes. Avant lui, Didyme avait déjà proposé la même décomposition, mais en intervertissant l'ordre des deux tons, majeur et mineur, ce qui revient à substituer au tétracorde *mi FA SOL la*, de notre ton d'*Ut* majeur, si nous le prenons comme type, le tétracorde *mi FA sol la*, qui appartient au ton de *Re* mineur.[1])

[1]) On remarquera que, avec les symboles que j'emploie, les notes imprimées en mêmes caractères appartiennent à une même série de quintes justes; et que celles

7. Très certainement au reste, le prétendu principe pythagoricien mis en avant par DIDYME n'appartient pas à l'ancienne école; il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que, d'une part, comme nous le verrons, ARCHYTAS ne s'y est nullement conformé, dans un cas où cela lui aurait été tout indiqué, que d'un autre côté, ce principe n'est pas d'avantage appliqué dans une autre échelle célèbre, celle du *Timée* de PLATON, qui a la prétention, au moins aussi justifiée, de représenter la tradition pythagoricienne. Grâce au patronage du grand philosophe, cette échelle diatonique dont tous les tons sont majeurs, et dans lesquels les demi-tons sont réduits par suite au rapport $\frac{256}{243}$ (tétracorde: *mi fa sol la*), est en réalité celle qui a eu la plus grande vogue parmi les théoriciens de l'antiquité, sinon parmi les musiciens pratiquant. C'est elle que suit EUCLIDE dans sa *Κατατομὴ κανόνος*, qui doit être considérée comme une réplique à ARISTOXÈNE. C'est elle qu'adoptent exclusivement tous les musicographes anciens dont les écrits nous sont parvenus, sauf PTOLÉMÉE, qui se borne à la reconnaitre à côté des autres qu'il donne; c'est elle enfin qui, transmise par BOÈCE au moyen âge, garde encore aujourd' hui toute son importance théorique, puisqu'elle est la base de la progression, indéfinie dans les deux sens, de quintes successives, qui règle l'armature en dièzes ou bémols des clefs des portées, suivant le choix de la tonique.

Les Pythagoriciens auxquels DIDYME a emprunté son principe, s'il ne l'a pas forgé de lui-même, ne peuvent donc représenter qu'une école de canoniciens, postérieurs même à ERATOSTHÈNE et qui sont aussi inconnus que le MYONIDES et l'EUPHRANOR de la même époque, dont les noms ont été conservés, parce qu'ils ont constitué les quatre ou cinq[1]) dernières *médiétés* de l'arithmétique ancienne par des combinaisons numériques qui pouvaient très bien avoir pour but la solution du problème musical.

8. En tout cas, comme étapes antérieures à DIDYME, PTOLÉMÉE ne fait connaître que les échelles d'ERATOSTHÈNE, platonisant plutôt que pythagorisant, et celles d'ARCHYTAS, auxquelles il convient de nous arrêter.

Ces échelles, singulières en apparence, s'expliquent aisément si l'on ajoute au dessous du tétracorde (soit *mi* — *la*), un ton majeur *re* — *mi*.[2])

en petites capitales sont supérieures d'un comma $\left(\frac{81}{80}\right)$ à leurs homonymes en italiques.

1) Des quatre que donne PAPPUS, l'une est différente des quatre que reconnaît NICOMAQUE. Je n'insiste pas sur les rapports de la doctrine des intervalles musicaux avec celle des médiétés, ce qui demanderait une étude spéciale. Il me suffit de faire remarquer que tout le développement de cette dernière théorie est évidemment lié au rôle de la médiété harmonique, que nous allons avoir à apprécier.

2) Dans la lyre dorienne au temps d'ARCHYTAS, lyre qui compressait un ton et une octave, ce ton existait de fait au dessous de chaque tétracorde, au témoignage

Pour déterminer les cordes intermédiaires supérieures, d'abord pour le genre enharmonique, ARCHYTAS divise la quinte *re — la* suivant la formule $\frac{3}{2} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{4}$, c'est à dire en une tierce mineure et une tierce majeure. Il obtient ainsi la note *FA*. Pour le genre chromatique, au lieu de prendre la tierce mineure, ainsi que le fera ERATOSTHÈNE, pour l'intervalle supérieur, il prend un ton majeur à partir du *mi*, et obtient ainsi la note *fa♯*. Enfin pour le diatonique, il descend d'un ton à partir du *la* et obtient ainsi la note *sol*. Enfin, il détermine une corde mobile inférieure *commune aux trois genres* en divisant la quarte *re — sol* suivant la formule $\frac{4}{3} = \frac{7}{6} \times \frac{8}{7}$, c'est à dire en une tierce minime et un ton maxime, intervalles étrangers à nos tonalités modernes. Il obtient ainsi les décompositions

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{28}{27} \times \frac{36}{35}}_{\text{enharmonique}} \times \frac{5}{4} = \underbrace{\frac{28}{27} \times \frac{243}{224}}_{\text{chromatique}} \times \frac{32}{27} = \underbrace{\frac{28}{27} \times \frac{8}{7}}_{\text{diatonique}} \times \frac{9}{8},$$

décompositions qui, de prime abord, paraissent assez incompréhensibles.[1])

PTOLÉMÉE, qui ne donne pas ces explications, laisse d'ailleurs entendre qu' ARCHYTAS ne s'appuyait point sur l'expérience, mais sur des considérations à priori. Cependant, de quelque façon que le géomètre de Tarente ait rédigé son *Harmonicon*, il est bien clair qu'il a voulu suivre la pratique de son temps. L'identité des cordes mobiles inférieures dans les trois genres, la position des cordes mobiles supérieures dans les tétracordes chromatique et diatonique, sont conformes aux postulats des auteurs de la notation musicale grecque qui a triomphé.

D'ailleurs en admettant les intervalles principaux d'ARCHYTAS, dans diverses des échelles qu'il a choisies[2]), PTOLÉMÉE a reconnu lui-même leur valeur pratique.

Quant aux considérations théoriques qui avaient guidé ARCHYTAS, il me semble facile d'en reconnaître le véritable sens. Sans doute ses échelles enharmonique et diatonique ont pu donner aux canoniciens

d'ARISTIDE QUINTILIUS (éd. MEIBOM., p. 22). Les cordes fixes donnaient donc les notes *re — mi — la — si — mi*.

1) L'intervalle $\frac{28}{27}$ est un peu inférieur au tiers du ton tempéré. La décomposition en rapports *épimores* pour le chromatique est systématiquement écartée, car il suffisait de prendre: $\frac{4}{3} = \frac{28}{27} \times \frac{15}{14} \times \frac{6}{5}$.

2) Je dis *choisies*, parce qu'il n'en est probablement pas lui-même l'auteur, qu'il a en tout au plus remanié quelques unes, comme il a fait pour le diatonique de DIDYME; en particulier, il a conservé le diatonique *très mol* d'ARCHYTAS.

postérieurs l'idée du principe affirmé par Didyme. Mais Archytas était bien loin, sans doute, d'attribuer à tout rapport *épimore* une valeur musicale; il se trouvait en présence de ce fait que, depuis un siècle[1]), les plus simples de ces rapports, $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$, étaient reconnus comme correspondant aux intervalles consonants des cordes fixes; d'un autre côté, il pensait et il a probablement été le premier à soutenir, dans son *Harmonicon*[2]), que le son était un mouvement et que la hauteur en croissait avec la vitesse. Quoique, sans doute, il n'eût d'ailleurs, de la nature de ce mouvement ou de ses effets physiologiques, aucune idée juste ni même bien claire, il était naturellement conduit à croire que l'agrément d'un accord dépendait de la simplicité du rapport numérique correspondant, croyance qui suffisait encore à l'esprit d'un Descartes. Enfin, et ceci résulte de l'exposé qui précède, Pythagore n'avait laissé aucune tradition relative à la composition du tétracorde. Il lui avait suffi de déterminer les sons fixes; il avait laissé de côté, dans la classe de l'indéfini (ἄπειρον), la multiple variété des sons mobiles.[3]) Sans doute dès la seconde moitié du Ve siècle, alors que devint urgente la question de la notation musicale, il fut aisé (sans être d'ailleurs pythagoricien) de revêtir d'un habillement mathématique l'une des principales échelles, celle du diatonique syntone, définie selon la doctrine courante des *acousticiens* précurseurs d'Aristoxène. C'est ainsi que, dès avant Platon, put se former l'échelle du Timée; mais elle ne satisfaisait point Archytas, soit au point de vue théorique, soit au point de vue pratique; car elle ne fournissait point de solution pour les autres genres, et, à cause de la dureté des tierces, elle ne plaît point à l'oreille. Il fallait donc introduire de nouveaux nombres simples.

On a vu comment Archytas fit cette introduction; il applique systématiquement un procédé que représente la formule générale:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n},$$

1) On ne peut douter que les rapports numériques pour la quinte et la quarte n'aient figuré dans le plus ancien écrit harmonique, celui de Lasos d'Hermione, vers 500 av. J.-C. Cf. Théon de Smyrne, *Mus.* I, 12 (éd. Hiller, p. 59).

2) Fragment conservé par Porphyre (Commentaire sur les *Harmoniques* de Ptolémée, éd. Wallis, p. 236—238).

3) Sous ce rapport, Aristoxène, avec sa doctrine de la liberté de variation des intervalles, a dû se rapprocher de la véritable tradition pythagorienne, qu'il a connue par les derniers représentants de l'Ecole, notamment le musicien Xénophile. On répète à tort qu'il s'est attaqué à cette Ecole; ses polémiques ne visent qu'Archytas et Platon, et pour la petite secte de Phlionte, Archytas était certainement un novateur, presque un hérétique.

laquelle donne évidemment la décomposition du premier rapport en deux autres *de même forme* aussi voisins que possible. Ce mode de décomposition qui est une généralisation de la division de l'octave par PYTHAGORE, fut couramment employé dans la suite par les *canoniciens*, et il est en particulier expliqué par ARISTIDE QUINTILIEN (éd. MEIBOM., p. 114). Appliqué à partir de l'octave aux intervalles qui en dérivent, il introduit dans leur ordre les harmoniques successifs, et c'est ainsi qu'ARCHYTAS a pu être conduit théoriquement à reconnaître les intervalles de tierce majeure et de tierce mineure $\left(\frac{5}{4}\text{ et }\frac{6}{5}\right)$, ce qui fut le pas décisif pour l'invention de notre *gamme des physiciens:* puis à proposer les intervalles $\frac{7}{6}$ et $\frac{8}{7}$, qui ont été écartés de la pratique et que, malgré quelques essais plus ou moins récents, l'on n'a pas réussi à remettre en usage, quoiqu'incontestablement, au point de vue purement mélodique, ils aient certainement autant de droits à être employés que les intervalles $\frac{9}{8}$ et $\frac{10}{9}$ qui correspondent à des harmoniques plus éloignés.

9. J'ai terminé ce que j'avais à dire touchant l'histoire de la musique, afin de préciser autant que possible la date des inventions mathématiques. Reprenons maintenant le procédé d'ARCHYTAS, pour lequel cette question de date doit être considérée comme résolue, au moins comme *terminus ante quem.*

Ce procédé donne, avec une erreur inférieure à la différence $\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right)$ des deux rapports composants, deux approximations pour la racine carrée $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$. Ou, pour se rapprocher de la façon dont les Grecs maniaient les rapports, il donne, entre n et $n+1$, deux intermédiaires comprenant leur moyenne proportionelle, à savoir $\frac{2n+1}{2}$ qui est la moyenne arithmétique, $\frac{2n(n+1)}{2n+1}$, qui est la moyenne harmonique. Or ces intermédiaires forment le même produit que les extrêmes; et la proposition est générale, quels que soient les extrêmes, puisqu'elle ressort de la construction même de la moyenne harmonique, dont la définition complète est connue de PLATON, et doit dès lors remonter au moins à ARCHYTAS. Ainsi deux nombres quelconques peuvent être remplacés par leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique sans altérer leur produit, mais en diminuant leur différence; en répétant indéfiniment la même opération sur les nombres substitués, cette différence peut devenir aussi petite que l'on veut; les deux facteurs du produit constant se rapprochent autant que l'on veut de l'égalité sans jamais l'atteindre, tout en comprenant toujours entre eux

la moyenne proportionelle, si elle existe numériquement; en exprimant de plus en plus près la valeur de cette moyenne, si l'on ne peut la construire que géométriquement, si elle n'existe qu'en *puissance*, non en *acte*, pour employer le langage des Grecs.

Voilà le complément qui fait défaut dans EUCLIDE pour la notion de l'incommensurable, mais que devait cependant déjà posséder EUDOXE, le disciple d'ARCHYTAS, lorsqu'il a constitué sa théorie des rapports, indépendante de la commensurabilité. A la vérité nous n'avons aucun témoignage précis à ce sujet; mais nous possédons un indice très grave, qui est le procédé d'approximation de la racine carrée chez les Grecs. Ceux-ci n'ont jamais possédé qu'une seule méthode, que nous avons longtemps ignorée, mais que nous connaissons bien maintenant par les *Métriques* de HÉRON.[1]) Quand, aux derniers temps de l'empire byzantin nous la retrouvons conservée dans BARLAAM ou NICOLAS RHABDAS, nous sommes peut-être autorisés à croire qu'elle remonte bien longtemps avant HÉRON. Or voici quelle est cette méthode.

Soit a une valeur approchée de $\sqrt{A}$ (valeur que nous supposerons par défaut, et qui peut être d'ailleurs soit entière, inférieure ou égale à la partie entière, soit fractionnaire). On forme $\frac{A}{a}$, qui sera une autre valeur approchée par excès. La moyenne arithmétique, $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$, sera une approximation au second degré par excès, et $\frac{A}{a_1}$ (moyenne harmonique) une approximation au second degré par défaut. On peut continuer indéfiniment l'application du même procédé pour calculer les approximations au troisième degré, au quatrième, etc.

Supposons $A = a^2 + r$, nous aurons en particulier $a_1 = a + \frac{r}{2a}$, et $\frac{A}{a_1} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{a}}$. On peut être conduit de bien d'autres manières à l'approximation a_1, dont la formule donne le principe du calcul de la partie entière. Mais je dis que la formation de l'approximation en sens contraire ne provient point d'une idée arithmétique. Car si a est la partie entière de la racine, l'idée arithmétique sera beaucoup plutôt de prendre comme approximation du même degré par défaut $a_1' = a + \frac{r}{2a+1}$, ce que nous rencontrons chez les Arabes, mais non chez les Grecs; ceux-ci arrivent

1) En attendant la publication de leur texte, on peut consulter ma note: *Un fragment des Métriques de HÉRON* (Zeitschr. für Mathem. 38, 1893; Hist. Abt. p. 13) et *Sur un fragment inédit des Métriques de HÉRON d'Alexandrie* (Bullet. des sc. mathém. 18_2, 1894, p. 1—3).

du premier coup à une approximation beaucoup plus compliquée, mais plus exacte. Leur procédé suppose certainement la formation préalable du concept de la moyenne harmonique; or ce concept, comme son nom l'indique, est historiquement dérivé de la solution d'un problème musical.

10. On pourra demander pourquoi je ne fais pas remonter jusqu'aux premiers Pythagoriens l'origine et de ce concept et du procédé de calcul correspondant, puisque la tradition leur attribue la connaissance des trois premières moyennes, arithmétique, géométrique et harmonique. A la vérité, on ne peut guère refuser à Pythagore la connaissance de la célèbre proportion donnant les rapports des longueurs des cordes fixes et que les Grecs ont appelée *ἁρμονία*:

$$12 : 9 :: 8 : 6$$
$$mi_0 \quad la_0 \quad si_0 \quad mi_1.$$

Mais la tradition nous apprend en même temps que le nom de moyenne harmonique ne fut introduit que par Archytas (ou, d'après lui, par Eudoxe), qu'auparavant on disait *sous-contraire*; et elle ne nous garantit nullement que les propriétés de la moyenne 8 eussent été généralisées dès lors. Sans aucun doute, Pythagore désignait sous le même nom les rapports *épitrites* $\frac{12}{9}$ ou $\frac{8}{6}$, ou les rapports *hémioles* $\frac{12}{8}$, $\frac{9}{6}$; sans doute il voyait bien l'égalité des produits $12 \times 6 = 9 \times 8$; mais nous n'avons point de preuves qu'il eût conçu, ainsi que l'a certainement fait Archytas, l'extension de ces propriétés à des rapports quelconques. Quand nous voyons encore Nicomaque attribuer à certaines médiétés des relations qui ne sont vraies que pour des nombres particuliers, nous devons certainement nous défier de la croyance à des généralisations scientifiquement justifiées en pareille matière.

J'ai d'ailleurs ici un autre motif: c'est que je suis porté à attribuer aux premiers Pythagoriens, pour l'approximation de $\sqrt{2}$, un procédé essentiellement différent du procédé classique que j'attribue à Archytas. Il s'agit de la formation des nombres *latéraux* et *diagonaux* que nous a conservée Théon de Smyrne (*Arithm.*, 31) et dont la connaissance par Platon, au moins pour le groupe 7/5, nous est assurée[1]) par un célèbre passage de la *République* (VIII, 146bc).

Rappelons tout d'abord qu'il est admis à juste titre que les Pythagoriens ont, dès avant Hippocrate de Chios, reconnu l'irrationalité de $\sqrt{2}$, et qu'ils en ont donné une démonstration conservée dans le texte actuel d'Euclide (X, 117). Cette démonstration ne suppose aucune tentative d'approximation; mais il n'est pas douteux que, ne fût-ce que pour

1) Cf. Cantor, *Vorl. über Gesch der Mathem.* I², p. 210.

les besoins pratiques, des recherches dans ce sens n'aient été faites de très bonne heure. Cependant ces mêmes besoins n'exigeaient nullement une approximation indéfinie; du moment où le rapport exact n'était pas très simple, ce qu'il était aisé de reconnaître, le technicien se souciait très peu de sa véritable valeur ou même de l'inexistence de ce rapport en nombres. Au lieu de faire un calcul sur des nombres élevés, il valait mieux pour lui effectuer l'opération géométrique et la mesure directe. Le problème de la commensurabilité ou non de la diagonale du carré et de son côté n'avait, en somme, en géométrie qu'un intérêt purement théorique.

Mais à la même époque se posait un problème dont l'importance philosophique était au moins aussi grave. La hauteur du son était-elle une quantité susceptible de mesure? L'affirmative n'allait nullement de soi, même après la découverte des rapports numériques des consonances. Du côté empirique, le problème était déclaré insoluble, LASOS étant arrivé à conclure, de ses expériences acoustiques, que pour chaque son musical, il y a une certaine latitude.[1]) Il ne restait qu'à aborder la question mathématiquement, et tout d'abord à savoir si l'octave avait une moitié. Evidemment la question revenait à chercher la moyenne proportionelle entre 1 et 2, et était susceptible d'une solution géométrique immédiate. Mais cette fois il fallait trouver un rapport entre nombres, puisqu'on était parti du postulat que les intervalles musicaux correspondaient à des rapports entre nombres. L'échec de la tentative, l'impossibilité d'une solution numérique ne pouvaient faire conclure qu'à l'impuissance des mathématiques en pareille matière.[2])

11. Entre les deux motifs, l'un géométrique, l'autre musical, qui pouvaient, dans la première moitié du Ve siècle, sinon dès le temps de PYTHAGORE, provoquer l'étude de la question, on ne peut prétendre à déterminer lequel fut en réalité le plus actif. Mais on ne saurait nier le rôle joué dès lors par le problème musical, et il dût au moins amener de nouvelles recherches pour une approximation aussi exacte que possible de $\sqrt{2}$.

Soit $\frac{p}{q}$ une approximation dans un sens, et $\frac{2q}{p}$ l'approximation en

1) ARISTOXÈNE, éd. MEIBOM., p. 3.

2) C'est l'hypothèse tacite d'ARISTOXÈNE qui reprend la question de la mesure des intervalles exclusivement au point de vue acoustique; et cette impuissance devait être avouée par les Pythagoriens qu'il a fréquentés. Au contraire, le Pseudo-PHILOLAOS se disqualifie lui même comme Pythagoricien en admettant la possibilité de la division du ton en deux moitiés (BOECK, *Mus.* III, 8); ses fragments musicaux, probablement puisés dans une source ancienne, telle que les écrits d'HÉRACLIDE du Pont, n'en gardent pas moins leur importance historique.

sens contraire au même degré; pour trouver deux valeurs $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{2q_1}{p_1}$ plus approchées, le procédé enseigné plus haut reviendrait à former $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ et $\frac{4pq}{p^2+2q^2}$. Mais il y a une façon beaucoup plus simple de construire une valeur intermédiaire; c'est celle qui formera, au XVe siècle, le point de départ du procédé d'approximation de NICOLAS CHUQUET, et qui consiste à prendre ici $p_1 = p + 2q$, $q_1 = p + q$. Or il se trouve que $p_1^2 - 2q_1^2 = -(p^2 - 2q^2)$, en sorte que les valeurs successives $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$ etc., sont alternativement approchées par excès et par défaut. On n'a dès lors plus besoin de former à part la série des approximations inverses $\frac{2q}{p}$, $\frac{2q_1}{p_1}$ etc. D'autre part, si, comme il est naturel, on prend $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p^2 - 2q^2$ est alternativement ± 1. On a donc la série complète des solutions des équations indéterminées

$$p^2 - 2q^2 = 1, \qquad 2q^2 - p^2 = 1.$$

Or les nombres p et q sont précisément les nombres diagonaux et latéraux de THÉON de Smyrne

p	1	3	7	17	41	99	etc.
q	1	2	5	12	29	70	etc.

Bien entendu, je conçois cette série comme obtenue sur les nombres eux-mêmes, sans généralisation immédiate, et sans aucune prévision, ni même peut-être aucune démonstration de sa propriété caractéristique. Mais je ne crois pas qu'il y ait un moyen plus simple d'expliquer cette invention, et ce moyen est, de fait, intimement lié à la considération de l'*harmonia* de PYTHAGORE, qui donne le premier degré d'approximation

$$\left(\frac{p}{q} = \frac{3}{2}, \ \frac{2q}{p} = \frac{4}{3}\right).$$

Le même procédé peut s'appliquer à $\sqrt{3}$. Soit $\frac{p}{q}$ une approximation, on formera $\frac{3q}{p}$, et l'on prendra donc $p_1 = p + 3q$, $q_1 = p + q$. Mais ici $p_1^2 - 3q^2 = -2(p^2 - 3q^2)$: si donc l'on part de la différence $+1$ (comme pour $p_0 = 2$, $q_0 = 1$), la différence suivante sera -2, et l'on arriverait ensuite à $+4$. Seulement, comme il est aisé de le voir, les deux termes du rapport correspondant sont pairs; en sorte que, prenant $2p_2 = p_1 + 3q_1$, $2q_2 = p_1 + q_1$, on retrouve $+1$ pour la différence $p_2^2 - 3q_2^2$, et l'on a dès lors alternativement $+1$ et -2. On obtient ainsi la série complète des rapports, que je dédouble ci dessous:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par excès:} & \frac{2}{1}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{26}{15}\cdot\frac{97}{56}\cdot\frac{362}{209}\cdot\frac{1351}{780}\cdots \\ \text{Par défaut:} & \frac{5}{3}\cdot\frac{19}{11}\cdot\frac{71}{41}\cdot\frac{265}{153}\cdot\frac{989}{571}\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdot\frac{p_1}{q_1}=\frac{2p+3q}{p+2q}.$$

C'est dans cette double série qu'ARCHIMÈDE, pour sa mesure du cercle, a choisi les termes qui convenaient pour le degré d'approximation qu'il voulait obtenir.

Pour les nombres 5, 6 et suivants, le même procédé n'aboutit pas au contraire à la série des solutions d'équations analogues, ou du moins il ne donne ces solutions qu'indirectement; cette circonstance explique qu'une méthode aussi élémentaire n'ait pas été généralisée.

12. Au reste les Pythagoriens ne paraissent pas s'être préoccupés de l'approximation de $\sqrt{3}$, puisqu'ils ont laissé à THÉODORE de Cyrène à démontrer l'irrationalité de cette racine. Il n'en subsiste pas moins ce fait que des séries conduisant aux approximations utilisées par ARCHIMÈDE ont pu exister bien longtemps avant lui; il a donc pu trouver, déjà posée par des séries connues pour $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, la question à laquelle le nom de PELL est resté attaché, tandis que celui du géomètre de Syracuse devrait peut-être être préféré, même vis-à-vis de celui de FERMAT. Car son célèbre *problème des boeufs* suffit à prouver qu'il avait conçu cette question dans toute sa généralité.

Mais c'est déjà toucher à de bien lointaines conséquences des idées introduites en mathématique par les premiers problèmes d'origine musicale, et je dois m'arrêter ici, si du moins j'ai pu convaincre le lecteur que, loin d'être négligeables, ces idées ont été des plus fécondes et des plus importantes.

Zur Textgeschichte der „Ochúmena“ des Archimedes.

Von Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Die Schrift des Archimedes 'Über die schwimmenden Körper' ist nur lateinisch, nicht griechisch, in Moerbeeks Übersetzung aus dem Jahre 1269 (Rose, *Archimedes im Jahre 1269*, Deutsche Litteraturz. 1884, S. 210—213; J. L. Heiberg, *Neue Studien zu Archimedes*, Abh. z. Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 46 ff.) erhalten. Ihr erster Teil wurde erst 1543 von Tartaglia in Venedig herausgegeben, das zweite Buch sogar erst 1565 gedruckt. Spuren von dem Vorhandensein einer mittelalterlichen lateinischen Übersetzung (also wohl des Wilhelm von Moerbeek) am Ende des 16. Jahrh. in Köln, hat Curtze (Zeitschr. für Mathem. 28, 1883; Hist. Abt. S. 12) nachgewiesen. Aber schon vor der Drucklegung durch Tartaglia wurde Moerbeeks Übersetzung benutzt, so von keinem Geringeren als Leonardo da Vinci.

Er zitiert sein Exzerpt im Codice Atlantico Fol. 153ᵛ — e (s. *Il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci*, herausgegeben von der Accademia dei Lincei) am Schlusse unter dem Titel *Archimenidis* (sic!) *de insidentibus in humido. Liber secundus in humido*, abweichend von seiner gewöhnlichen Art zu schreiben, in rechtsläufiger Schrift. Vgl. dazu Moerbeeks Schlufs der Übersetzung: *Archimedis de insidentibus in humido liber secundus explicit.* Das Zitat umfafst bei Leonardo folgende Abschnitte: Archimedes *Op.* II, 412, 24—415, 18 ed. Heiberg „tertiam figuram praescriptarum — equales et portiones.“ Damit schliefst, wenn wir uns recht erinnern, die linke Spalte der Seite. Dann folgt Archimedes *Op.* II, 425, 11—426, 11 „kc. et sit c. erit autem propter — minorem angulo f.“ Zugehörige Figuren sind nicht vorhanden. Es ist wahrscheinlich, dafs Leonardo auch noch andere Abschnitte exzerpiert hat, also mindestens den Anfang der „Demonstratio partis II“ (Archimedes II, 409, 20—412, 24) und die jetzt fehlenden Mittelstücke (Archimedes II, 415, 18—425, 11). Denn es konnte ihm doch unmöglich hier mit dem blofsen Schlufs-, dort mit den blofsen Anfangsworten gedient sein. Aber in rechtsläufiger Schrift habe ich weiter nichts gesehen[1]); ob unter der linksläufigen Schrift

1) Lieferung 2—4 habe ich nicht gesehen. Es ist übrigens die Publikation des

noch Exzerpte verborgen sind, konnte ich nicht ermitteln, da ich mich nicht der Fähigkeit rühmen kann, sie ohne Spiegel zu lesen, wie PIUMATI und PAUL MÜLLER-WALDE es vermögen. Aber in der beigegebenen Umschrift habe ich weder unser noch sonst ein Zitat entdecken können. Meine Abschrift des Exzerptes stützt sich also lediglich auf das Faksimile.

Aus mancherlei Lesarten ergiebt sich nun mit Gewifsheit, dafs LEONARDO die Übersetzung des WILHELM VON MOERBEEK, vielleicht dessen Originalexemplar, den *Ottobonianus* 1850 selbst, möglicherweise im Jahre 1502 (oder 1514?) benutzte. Ich stelle einige ausgewählte Lesarten zusammen:

ARCHIMEDES II, 413, Z. 2 MV] ou L(EONARDO); hier scheint sich L. verlesen zu haben[1]), da M(OERBEEK) nach HEIBERG qꝛ hat.

— VN] ꝗ kn M: ꝗkn L

— 3 minor est ML

— MV] o ML; bei beiden folgt eine Lücke.

— VN] ʃ ꝭ u M: c ꝭ n L

— 5. 6 igitur] g̊ (= ergo) L

— 7 inter] intra ML

— 8 autem] ꝗ (= quod) L

— 13 incliuabitur] reclinabitur corr. M_1, L

— 17 X] y ML

— 19 gravitate hauc ML

414, 1. 3 autem] ⌿ L

415, 1 autem] ⌿ L, a' M

— 9 AX] quae aχ M; quae a ꝩ L

— 13 XO] χa M: ꝩ ∩ L

— 17 diametri ML

— 18 aequales om. ML

425, 22 TH] ih M: .ih. L

426, 1 Φ] f ML

BS quam BC_1 om. ML, statt dessen Raum für etwa 10 Buchstaben bei M, für 8—9 bei L, am Rande HSBIHCCB bei M, HSBHCCB bei L

— minor om. ML

— 2 quam C, R] om. M: qm ·ſr· L, quam sꝛ TARTAGLIA.

— MX] quae n ꝭ M, quae . n ꝭ . L

Codice Atlantico noch nicht abgeschlossen. Bei RAVAISSON-MOLLIEN, *Les manuscrits de Léonard de Vinci* habe ich nichts gefunden.

1) Da TARTAGLIA auch *ou* hat und nach HEIBERG a. a. O., S. 6 einen Matritensis Aa 30 für die Herausgabe der *Ὀχούμενα* benutzte, so bliebe freilich auch für LEONARDO noch die Möglichkeit einer Benutzung des Matritensis oder seiner Vorlage. S. noch 426, 2.

— 5 HA] h ⤴ ML
— 6 AH] ⤴ h ML
— 7 MX] h ⤴ ML
— TX] t ⤴ ML
— 8 MY] hy ML.

Es ist selbstverständlich, dafs dies Zitat keine Bedeutung für die Textkritik, vielleicht aber einiges Interesse für die Textgeschichte hat. Für letztere dürfte auch folgende Notiz des LEONARDO DA VINCI Beachtung verdienen. Sie steht Fol. 341[v] des Codice Atlantico; ich verdanke sie der Güte des um LEONARDO hochverdienten Forschers PAUL MÜLLER-WALDE: Archimede è intero appresso al fratello di Monsignore di S. Gusta in Roma; disse averlo dato al fratello che sta in Sardegna. Era prima nella libreria del duca d'Urbino — fù tolto al tempo del duca Valentino.

Aus diesen Worten ergiebt sich, dafs ein vollständiger ARCHIMEDES in der Bibliothek des Herzogs von Urbino war. Von diesen Herzögen spricht man erst seit dem Jahre 1474. Als aber im Jahre 1499 CESARE BORGIA, Herzog des von Ludwig XII neugeschaffenen Herzogtums Valentinois in der Dauphiné, sich in den Besitz der Romagna setzte und ihr auch Urbino einverleibte, wurde der ARCHIMEDES entführt und befand sich zur Zeit von LEONARDOS Erkundung, also im Anfange des 16. Jahrhunderts, bei dem Bruder des Monsignore von S. GUSTA in Rom, wenigstens erklärte letzterer, ihn seinem in Sardinien wohnenden Bruder gegeben zu haben.

Wir erfahren freilich weder, ob es sich um einen griechischen oder lateinischen ARCHIMEDES handelt, noch ob S. GUSTA, der uns nicht weiter bekannt ist, ihn als Eigentum besafs oder nur entliehen hatte, noch ob eine einzige oder mehrere Handschriften gemeint sind. Obwohl nun LEONARDO wirklich, wie aus einem griechischen Zitate auf Fol. 178[r] des Codice Atlantico erhellt, Griechisch gekonnt zu haben scheint, so ist es nach Lage der Sache dennoch unwahrscheinlich, dafs es im 16. Jahrhundert noch einen vollständigen griechischen ARCHIMEDES gegeben habe. Das würde das Vorhandensein auch derjenigen griechischen Vorlage des WILHELM VON MOERBEEK (oder wenigstens einer griechischen Abschrift), welche die Ὀχούμενα enthielt, voraussetzen. Denn in dem (griechischen) „Codex VALLAE" waren die Ὀχούμενα, für die sich doch LEONARDO besonders interessierte, nicht vorhanden. Da aber von jener seit dem Jahre 1311 nichts verlautet, so ist wahrscheinlich eine lateinische Übersetzung gemeint. Nun gab es zu LEONARDOS Zeit deren zwei, welche annähernd vollständig waren, die des WILHELM VON MOERBEEK aus dem Jahre 1269 und die im Auftrage des Papstes NICOLAUS V (1447—1455) angefertigte des JAKOB VON CREMONA. Die Übersetzung des LUCAS GAURI-

cus aus dem Jahre 1503 kommt nicht in Betracht, da sie nur die Quadratur der Parabel und die Kreismessung enthält. Danach hätte man die Wahl zwischen MOERBEEK und CREMONENSIS, doch werden wir auch den letztern ausscheiden müssen, da derselbe die Ὀχούμενα ausläſst, auf die es LEONARDO ankam. Trotzdem nun MOERBEEK den Ψαμμίτης nicht bringt, sondern nur als in der griechischen Vorlage vorhanden erwähnt (HEIBERG a. a. O. S. 4), so erscheint es kaum auffällig, wenn LEONARDO dessen Übersetzung als den 'ARCHIMEDE intero' angesehen hat.

Eine weitere Frage wäre, ob die in den Händen des Monsignore v. S. GUSTA befindliche Handschrift der Ottohonianus oder der Matritensis oder noch eine andere Hs. war. Das läſst sich nicht mit Sicherheit entscheiden; daſs LEONARDO den Ottobonianus selber benutzt hat, ist nicht über allen Zweifel erhaben. Oh eine Vergleichung unseres Exzerptes mit dem Matritensis, dessen Lesarten nicht weiter bekannt sind, zu einem Ergebnis führen würde, vermag ich nicht zu sagen. Der Umstand, daſs der Matritensis ziemlich jung sein soll (aus welchem Jahrhundert, ist nicht bekannt), auch nur vier Schriften des ARCHIMEDES enthält, könnte die Wagschale zu Gunsten des Ottobonianus neigen. Ist aber wirklich der Ottobonianus beim Monsignore von S. GUSTA gewesen, so würden wir damit auch eine Bereicherung unserer Kenntnisse über die wechselvollen Schicksale dieser bemerkenswerten Handschrift[1]) gewonnen haben.

Der Fall, daſs der 'ARCHIMEDE intero' etwa verlorene, uns nur dem Titel nach bekannte Schriften des ARCHIMEDES enthalten hahe, scheint uns auſserhalb aller Möglichkeit zu liegen.

1) Die ARCHIMEDESübersetzung, 1269 entstanden, wäre also nach 1311 aus der päpstlichen Bibliothek abhanden gekommen, vielleicht um 1480 nach Urbino geraten, aber 1499 dort weggenommen (tolto). 1508 ist sie in Venedig im Besitze 'ANDREAE CONERI' (s. HEIBERG, a. a. O. S. 3). Beim Monsignore von S. GUSTA würde sie wohl um 1502 oder um 1514 gewesen sein, da in diesen Jahren sich LEONARDO in Rom aufhielt. Die weiteren Schicksale sind bekannt, s. HEIBERG, a. a. O. 3, 4.

Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria.

Von WILHELM SCHMIDT in Helmstedt.

Man hat LEONARDO DA VINCI nicht mit Unrecht den „Faust der Renaissance" genannt. Hat er doch auf fast allen Gebieten menschlichen Wissens und Könnens, der Wissenschaft, der Kunst, der Technik u. s. w. sich nicht nur bethätigt, sondern auch bedeutende Erfolge gehabt. Seitdem man in neuester Zeit mit den von ihm hinterlassenen Papieren sich eingehender beschäftigt hat, müssen wir ihm für manche Erfindungen, die wir erst später anzusetzen pflegten, die Priorität zuerkennen. Um die Camera obscura[1]) u. a. nicht zu erwähnen, wer vernimmt nicht mit Staunen, wie sein gewaltiger Geist seiner Zeit um Jahrhunderte vorauseilte, welch' grofsartige Taucherapparate er z. B. ersonnen, wie er die Schiffsschraube, Mitrailleusen, unterseeische Torpedoboote[2]) erfunden, zum Teil Dinge, die man gewöhnlich als ureigenste Ideen der heutigen Zeit zu preisen pflegt!

So schöpferisch nun LEONARDO auch gewesen ist, so natürlich ist es, dafs er sich auch um seine Vorgänger gekümmert hat, wie es heutzutage jeder Fachgelehrte zu thun verpflichtet ist, und wenn er auch nicht von allen etwas gelernt hat, so mag er doch Anregungen empfangen haben. So hat schon MAX MAAS in der Beil. zur Allgem. Zeitung 1899, Nr. 154, S. 5 im Gegensatz zu LOMBARDINI, *Dell' origine e del progresso della scienza idraulica* (Mailand 1872) darauf hingewiesen, dafs LEONARDO am Ende doch nicht der *Begründer* der Hydraulik gewesen sei, sondern vielleicht von HERON von Alexandria gelernt habe.

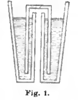
Dafs LEONARDO auch bei den Alten in die Schule ging, beweisen

1) LEONARDO hat sie vor PORTA jedenfalls selbständig erfunden, obwohl sie ohne Linse nach M. CURTZE, *Die Dunkelkammer* (Himmel u. Erde **13**, 1901, 225—236) bereits bei LEVI BEN GERSON im Jahre 1321 vorkommt.

2) Vgl. den hochinteressanten Aufsatz von PAUL MÜLLER-WALDE, *Beiträge zur Kenntnis des LEONARDO DA VINCI*: VI. Einige Anweisungen LEONARDOS für den unterseeischen Schiffskampf, Taucherapparate und Torpedoboote. LEONARDOS Erfindung der Schiffsschraube. Jahrb. der Kgl. preufs. Kunstsammlungen XX, 1, 1899, S. 60 ff.

die mehrfachen Zitate aus ARCHIMEDES, ARISTOTELES, EPIKUR, EUKLID, LUKREZ, PLATO, PLINIUS, POSIDONIUS, PYTHAGORAS und VITRUV. Von letzterem hat er sich z. B. im Pariser Manuskript K_3 [nach MÜLLER-WALDE seit 1508 im Gebrauch] Fol. 109^v (RAVAISSON-MOLLIEN, *Les manuscrits de LÉONARD DE VINCI*, Paris 1890 ff.) notiert, dafs Messer VINCENTIO ALIPLANDO, der bei der Osteria del Corso wohne, den VITRUV des JAKOB ANDREA (iluetruvio di iacomo andrea) habe[1]), wie ihn auch dessen Wegemesser (Taxameter) zu Lande und Wasser interessiert haben (Paris. F 48^v, 54^r, 96^r; Atlant. Fol. 1^r, 2). Ob LEONARDO den HERON kenne, schien zweifelhaft, nachdem sich meine Vermutung, dafs er den Ambrosianus I 38 inf. geschrieben haben könne, als unerweislich herausgestellt hatte. Indessen hat jetzt Herr PAUL MÜLLER-WALDE auf Fol. 95^v des Codice Atlantico seinen Namen erwähnt gefunden: „Erone de acque“. Nach der Reproduktion des Codice Atlantico[2]) heifst es ferner Fol. 219^v—a (S. 779): „Erone de acqua“. Dies Zitat setzt uns allerdings in einige Verlegenheit; denn eine Schrift *Περὶ ὑδάτων* kennen wir zwar von HIPPOKRATES und THEOPHRAST (nur Exzerpt von letzterem erhalten), aber von HERON nicht einmal dem Titel nach. Allerdings zitiert PAPPUS (p. 1070, 2 ed. HULTSCH) eine HERONische Schrift *Περὶ ὑδρείων*, meint aber die Schrift über die Wasseruhren (*Περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων*). Nach MÜLLER steht die Notiz unter trinkhörnerartigen Figuren (corni), unter deren einer wir lesen: Vetro acciochè si veda gli atimi (so!) nell' acqua che si move. Auch diese Notiz vermag ich bei HERON nicht unterzubringen; denn schwerlich darf man LEONARDOS Atome mit HERONS Molekülen (*σώματα*) in der Einleitung zu seiner *Pneumatik* identifizieren. Obwohl nun HERON sonst nirgends von LEONARDO zitiert wird, so steht dennoch fest, dafs LEONARDO HERONS *Pneumatik* gekannt und benutzt hat.

Sehen wir zunächst auch von der Figur des einfachen gebogenen Hebers (cicognola LEON. Cod. Atlant. 80^r — b u. sonst, *σίφων* HERON, *Pneum.* I 1) ab, so verrät schon die Kenntnis des Glockenhebers (zaina LEON. Atlant. 80^r — b, s. Fig. 1, HERON, *Pneum.* I 3 *πνικτὸς διαβήτης*) ohne Zweifel Bekanntschaft mit HERON. 'Dieses Instrument', sagt LEONARDO im Parisinus G 40^v, 'ist seiner Natur nach ein Heber. Durch (in LEON.) diese Vorsprünge (? spicchi) oder Seiten (coste) des Trinkbechers ruft man den Irrtum hervor, dafs der Wein durch


Fig. 1.

1) Vgl. noch LEON. Paris. E 51^v und Atlant. 122^v — b mit JULIUS AFRICANUS *Κεστοί* Kap. 21 (Messung der Breite eines Flusses).

2) *Il codice atlantico di LEONARDO DA VINCI nella Biblioteca Ambrosiana di Milano riprodotto e pubblicato dalla R^a Accademia dei Lincei.* Roma MDCCCLXXXXVI. Ich

den Boden des Gefäfses auslaufe.' Vgl. den Heronischen Tantalusbecher, *Pneum.* I, 13. Dies benutzt Leonardo dann weiter zur Konstruktion eines Bechers (Fig. 2), der eine gewisse Ähnlichkeit mit unsern bekannten Vexierschoppen hat (im Pariser Manuskript G 40[v]).

Fig. 2.

Herons *Pneum.* I, 4 und 5 (Fig. 3[a]) hat ohne Frage zu folgenden im Parisin. G 48[r] erhaltenen Ausführungen Leonardos (Fig. 3[b]) Veranlassung gegeben: 'Denn je mehr das Wasser sich im Gefäfse verringert, um so mehr senkt sich seine Oberfläche, und je mehr sich die Oberfläche der Wassers senkt, um so weniger schnell läfst sein Heber es auslaufen. Aber wenn der Heber zusammen mit dem Wasserspiegel, der ihn trägt, sinkt, würde ohne Zweifel die Bewegung (Geschwindigkeit) des Wassers, welches durch den Heber ausfliefst, an sich immer gleichmäfsig sein. Um also diese Eigenschaft herbeizuführen, werden wir das Gefäfs *n* auf das Quecksilberbad *m* gesetzt sein lassen, ein Gefäfs, welches einen Schwimmer (barca Leon. = λεβητάριον Kesselchen Heron) bildet, der den Heber trägt, durch dessen (des Schwimmers) Boden dieser Heber von der Luft zum Quecksilber (argento vivo Leon., Wasser Heron) dringt, und dieses

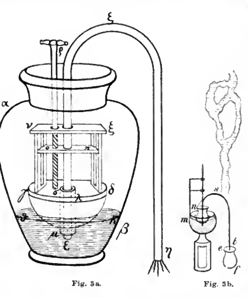


Fig. 3a. Fig. 3b.

Quecksilber ergiefst sich durch solchen Heber *nst* ins Gefäfs *fe.* Soviel die Oberfläche dieses Quecksilbers sinkt, soviel sinkt der Schwimmer, welcher darüber steht, zusammen mit dem Heber, welcher(?)[1]) ein sehr

---

vermag hier nicht festzustellen, ob es nicht vielleicht dieselbe Stelle ist. acque (so!) ist von Paul Müller-Walde bezeugt, die letzte Silbe ist mit der für que (= q3) üblichen Ligatur geschrieben.

[1]) Leonardo hat *insieme cholla cichogniola il* (so statt *la*) *quale he* (= è) *unsoc tilissimo fil di rame arrivato.* Sonst ist „fil di rame" blofs Kupferdraht.

dünnes, blankpoliertes Kupferrohr(?) bildet und ins Gefäfs fällt, welches, sobald es das nötige Gewicht erlangt, fällt und dabei einen Schufs abfeuert.' LEONARDO hat hier nur das Wasser durch Quecksilber ersetzt, der ganzen Vorrichtung einen festeren Halt gegeben und sie zu einem 'fuoco per colpo' benutzt. Zugleich aber hat die HERONische Vorrichtung LEONARDO zur richtigen Erkenntnis über das Gesetz der Ausflufsgeschwindigkeit geführt.

Ebenso augenfällig ist die Übereinstimmung zwischen HERON und LEONARDO bei der sich selbst regulierenden Lampe (HERON, *Pneum.* I, 34, Fig. 4[a], LEON. im Paris. G 41[r], Fig. 4[b]). Hier macht sich LEONARDO die HERONische Vorrichtung in folgender Weise zu nutze. 'Eine Lampe', sagt er, 'dafs der Docht sich um soviel hebt, als sich das Öl senkt. Und dies geschieht (nasscie), weil das Rad (Zahnrad) (welches die Zeichnung (disegno,

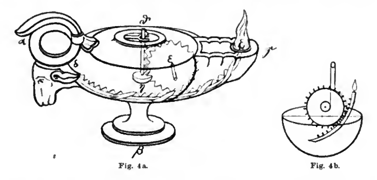


Fig. 4a. Fig. 4b.

Fig. 4[b]) hochstellt), sich auf dem Öle aufrecht hält, und um soviel als das Öl abnimmt, sinkt das Rad, und indem es sinkt, dreht es sich um sich selbst mittelst des Fadens (filo), der um seinen Pol (das eine Ende seiner Achse) sich wickelt, und die (Korrektur von LEONARDO: solche) Zähne des Rades schieben (spincie!) die Zahnstange (canna dentata LEONARDO, πτερόνη hat (δγ) HERON), welche den Docht aufnimmt, vorwärts.' Aber LEONARDO hat wohl selbst gesehen, dafs der HERONische Schwimmer η (Fig. 4[a]) ungemein praktisch ist und lehnt sich deshalb in seiner Variation (Parisin. G 41[r], Fig. 4[c]) an diesen an. Dazu sagt LEONARDO: '*a*, *b* wird dasselbe leisten, wenn der Pol *a* des Rades nicht sinken wird, sondern blofs der leichte (gezahnte) Schwimmer *b* (levità LEONARDO [= lievità 'Leichtigkeit'], Kesselchen η mit gezahntem Stäbchen ϑ HERON), welcher auf dem Öle schwimmt, zusammen mit der Oberfläche des Öles sinkt und das Rad mit seiner

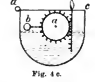


Fig. 4c.

Zahnung sich drehen läfst und mit (in) langsamer Bewegung die oben erwähnte Zahnstange nach oben schiebt.'

Jetzt wird man, hoffe ich, keinen Anstand mehr nehmen, auch für den Leonardoschen Thürverschlufs (Usscio serrato dachontrapeso, Parisin. J 30r, s. Fig. 5) durch Gegengewicht das Heronische Urbild (*Pneum.* I, 38) anzuerkennen. Paris. J 93v steht die Zeichnung eines anderen Thürverschlusses mit Hilfe von contrapesi. Ob auch Leonardos Kenntnis des

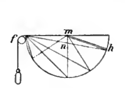


Fig. 5.

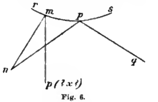
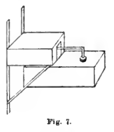


Fig. 6.

Gesetzes der kommunizierenden Röhren[1]) auf Heron (*Pneum.* S. 34, 25) zurückzuführen ist, mag dahingestellt bleiben. Eine im Paris. D 2r befindliche Figur (Fig. 6) scheint auf Herons *Katoptrik* VIII (S. 332) hinzuweisen, zumal Leonardo ebenda vom kürzesten Wege des Lichtes spricht, wie Heron *Katoptr.* IV (S. 325). Auf den Kran mit einem Maste (Leon. Cod. Atlant. 49v, Heron *Mech.* III, 1, bei Pappus S. 1130 ed. Hultsch), die scharf- und flachgängigen Schrauben (Atlant. 14v, Heron *Mech.* II, 5, bei Pappus S. 1126) und die doppelt wirkende Druckpumpe mit zwei Stiefeln (Leonardo Parisin. B 20v, Heron *Pneum.* I, 28) hat bereits Th. Beck in seinen *Historischen Notizen*: XV, XVIII, *Leonardo da Vinci* im Civilingenieur, Bd. **39**, **42**, Sonderabdr. S. 17 bezw. S. 30 u. a. aufmerksam gemacht. Vgl. auch die Schraube ohne Ende (Leon. Paris. J 26r und Heron *Mech.* II, 18, bei Pappus S. 1114, 4 ff.). Die Heronischen Hebel- und Schraubenpressen (Heron *Mech.* III, 13 ff.) können freilich Leonardo (Atlant. Fol. 49r, 11v, Beck, XVIII, S. 32, 33) nicht vorgelegen haben.


Fig. 7.

Vielleicht darf man auch Leonardo Cod. Atlant. Fol. 102r—a (Fig. 7) zu Herons *Pneum.* I, 20 in Beziehung setzen. 'Mache', sagt Leonardo,

1) Cod. Atlant. 216v (219r). 'Die Oberfläche aller unter einander verbundenen, unbeweglichen Flüssigkeiten haben immer gleiches Niveau' (la superficie di tutti liquidi immobili i quali infra loro sieno chongiunti sempre sieno d'equale altezza). Vgl. auch Fig. 96 bei Gerland-Traumüller, *Gesch. der Experimentierkunst* (1899), S. 106; Heller, *Gesch. der Physik* I, 242.

'dafs dieser Wasserbehälter (pila), [der oben noch ein Zuleitungsrohr hat], eben voll ist, wenn der untere ihn (mit seinem Nivean) erreicht.' Leider beschränken sich LEONARDOS Ausführungen auf diese paar Worte. Der Satz 'mache den geheimen Ort (la segreta)' will vielleicht besagen, dafs ein Teil der Vorrichtung versteckt sein soll, wie es auch bei HERON und PHILON von Byzanz vorkommt.

Dafs LEONARDO auch PHILON kannte, scheint mir aus dem Paris. A 56^{r} hervorzugehen. 'Wenn das Warme Ursache der Bewegung des Feuchten ist, so hält das Kalte es fest. Dies wurde dargethan durch den Hinweis auf die kalte Region (der Luft), welche die aus dem warmen Elemente gezogenen Wolken anhält. Was den Beweis betrifft, dafs das Warme das Feuchte anziehe, so beweist man es folgendermafsen. Erwärme eine geschliffene (?) Flasche (?, amola oder mola LEONARDO, = ampolla?), und setze diese in ein Gefäfs mit der Mündung nach unten (Fig. 8) und lege eine glühende Kohle dahin, und du wirst sehen, dafs die Feuchtigkeit (die Flüssigkeit), um hinter der Wärme, welche aufsteigen wird, herzugehen, von selbst die Wasserflasche füllen und die in der Flasche enthaltene Luft durch die Mündung dieser Flasche entweichen wird.' Es ist klar, dafs wir hier denselben Versuch haben, den, nur in unwesentlichen Dingen abweichend, uns PHILON von Byzanz *Pneum.* 8 (HERON *Op.* I, S. 476), ausführlicher beschreibt[1]), und den später VAN HELMONT (1577—1644), ROBERT FLUDD (1574—1637) u. a. wiederholt haben. Die Schlufsworte dieses Abschnittes (LEON. Paris. A 56^{r}: 'des Feuers, welches von Natur sich nach der Region seines Elements erhebt') berühren sich wieder mit HERONS *Pneumatik* 15, 27 ff., wo es von der Flamme heifst, dafs sie ihrer eigentlichen Heimat, der allerhöchsten Region über der Atmosphäre, zustrebe.

Fig. 8.

Mit den Übereinstimmungen auf physikalischem Gebiet sind aber die Beziehungen zwischen HERON und LEONARDO noch nicht zu Ende, sondern sie greifen auch auf das mathematische Gebiet über. Das Nivellement, welches wir Fol. 131^{r} im Cod. Atlant. finden, erinnert an HERONS *Dioptra.* 'Wenn Du', heifst es hier, 'eine meilenweite Fläche gut nivellieren wolltest, so würdest Du die Weise hier oben innehalten. Es sei zunächst das Nivellierinstrument (livello) *ab* (Fig. 9^{a}) mit der Libelle oben *K* aufgestellt, und es seien von *a* bis (?) *b* (*a b* Hs.) ungefähr

Fig. 9a. Fig. 9b.

1) Nach BECK a. O. XVIII, S. 53, 54 wird auch im Atlantico Fol. 7^{v} ein Apparat zum Heben von Wasser mittels Luftverdünnung erwähnt.

10 Ellen, und an ihren Enden seien zwei kleine Lämpchen (lampanette) aufgestellt, und jede stehe, wie sie hier auf der rechten Seite abgebildet ist, d. h. die Düse *h* (vaschetta Leonardo, eigentlich kleines Bassin (Fig. 9[b]) träufle (das Öl) tropfenweise in die Lampe *i*, das Öl bleibe immer in der Höhe *m*, damit Du, wenn das Öl das Licht sinken läfst, das Nivellement nicht fälschest. Und bevor Du das Nivellierinstrument in Thätigkeit setzest, prüfe es, dann entferne Dich 200 Ellen bis zu *c*, und stelle dort eine andere Lampe auf, welche in gleicher Linie mit *ab* stehe, dann entferne Dich 400 Ellen und setze *d* auf dieselbe Linie, darauf nimm *bc* weg u. s. w., und so mache es nach und nach, bis Du Deinen Weg nivelliert hast.' Es läfst sich freilich nicht leugnen, dafs Leonardos Art zu nivellieren nicht nur primitiv, sondern auch unzuverlässig ist, während Herons Apparat fein durchdacht ist (s. H. Schöne, *Die Dioptra des Heron*, Jahrb. d. Arch.-Inst. **14**, 91ff.) und auch zu weit schwierigeren Aufgaben verwendet wird.

Noch bleibt zu erwähnen das lebhafte Interesse für das delische Problem, welches Leonardo (Cod. Atl. Fol. 85[r]—b, 218[v]—b, 231[r], Paris. F. 50[r]) mit Philon und Heron teilt. Hier kritisiert Leonardo die Alten. Wenn er davon spricht, dafs diese mittels des Bogens bei ihren Operationen die zweifelhafte Lage der Sehne fanden (li antichi mediante l'arco trovavan negoziando la dubiosa situazione della corda), während er das Gegenteil mache (qui si fà il contrario, perchè io fo la situazion della corda colli suoi stremi Atlant. 218[v]—b), so scheint er eben Heron (bezw. Philon[1])) zu meinen. Vgl. Eutokios bei Archimedes III, 70ff., Heron, *Mechan.* I, 11 (*Op.* II, S. 24 und 266).

Schliefslich ist es bemerkenswert, dafs Leonardo den Heronischen Gnomon (Heron, *Defin.* 58, Cantor, *Vorl.* I^2, S. 151, Jahresber. f. Altertumswiss., Bd. **108** [1901, I], S. 81) kennt. Im Parisin. M 8[v] sagt er darüber folgendes: 'Parallelogramme, welche um den Durchmesser (= Diagonale) liegen, d. h. welche vom Durchmesser durchzogen (infilzati) sind. Dritte Parallelogramme (terzi paralogrammi!) heifsen Supplemente (suplementi), d. h. von denen, welche um den Durchmesser liegen.' Man ersieht aus den Figuren, dafs Leonardo vom Gnomon des Quadrats zu dem des Parallelogramms übergeht. Es ist hier freilich die Möglichkeit gegeben, dafs Leonardo sich an Euklid, *Elem.* II, Defin. 2 und nicht an Heron anlehnt.

Damit sind schwerlich alle Beziehungen zwischen Heron und Leonardo erschöpft, vielleicht wird ein gründliches Studium seines Nachlasses[2]) noch

1) Es ist bekannt, dafs dieser seinerseits von Apollonius abhängt.

2) Lieferung 2—4 der Ausgabe des Atlantico sowie die Publikationen über Londoner Leonardomanuskripte, z. B. von P. Sabachnikoff (1893, 1895), sind mir nicht

andere an den Tag ziehen. Sie zu erschöpfen war auch nicht unsere Absicht, wohl aber nachzuweisen, dafs Leonardo, dieser erste grofse Moderne, es nicht verschmäht hat, von den heutzutage so vielfach verachteten Alten sich anregen zu lassen und zu lernen. Wie schon an anderer Stelle, erkennen wir auch hier, wie selbst auf dem physikalischen und technischen Gebiete der Faden der Kulturentwickelung nicht abreifst, sondern die moderne Kultur mit Erfolg an die antike anknüpft.

zu Gesicht gekommen. Übrigens ist auch die Herausgabe des Atlantico noch nicht beendet. Die ausgiebige Benutzung der Pariser Publikation (von Ravaisson) wurde mir durch die Güte des Herrn Paul Müller-Walde ermöglicht.

Una lettera inedita di Ticone Brahe.

Di Antonio Favaro a Padova.

La lettera fin qui inedita di Ticone Brahe, sulla quale ho avuta la ventura di porre le mani, colma una lacuna nel carteggio di lui con la Corte di Toscana, del quale or sono ormai parecchi anni, ho dato alla luce alcuni notevoli documenti.[1])

Ricorderò qui brevemente che il grande astronomo danese era entrato in relazione con Ferdinando I, Granduca di Toscana, dopo il suo esodo dalla patria e precisamente col mezzo d' uno dei suoi discepoli favoriti, Francesco Tengnagel, nobile boemo, che lo aveva seguito nel volontario esilio, che più tardi ne impalmò una delle figlie per nome Elisabetta, e che se ne veniva in Italia incaricato tra le altre cose d' una segreta missione dello stesso Brahe per Giovanni Antonio Magini.[2]) Il Tengnagel, munito d' una commendatizia per il Granduca, rilasciatagli da Enrico Ranzau[3]), era anche latore di un' altra lettera allo stesso indirizzo, scritta dal Brahe in data di Dresda, 8 novembre 1598 e con la quale egli si preparava manifestamente il terreno a chiedere ed ottenere due singolari favori, intorno ai quali ci informa il séguito della corrispondenza già per lo passato data da me alla luce. I quali favori erano anzitutto l' appoggio del Granduca per certe osservazioni astronomiche ch' egli desiderava fossero fatte prima in Italia e poi in Egitto, e di più che il figlio primogenito di lui[4]), dell' età di 18 anni, ve-

1) A. Favaro, *Ticone Brahe e la Corte di Toscana* (Archivio storico Italiano 3_5, 1889).

2) A. Favaro, *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI e XVII con Giovanni Antonio Magini* (Bologna 1886), p. 89.

3) Era questi assai celebre per le sue immense ricchezze, le quali lo avevano messo in grado di diventare creditore di sovrani e di stati per ingenti somme. Il Brahe, che in parecchi luoghi delle sue lettere lo dice suo «affinis», fu ospite di lui per qualche tempo nello splendido castello di Ranzan: fu amico delle scienze e degli scienziati, e si occupò egli stesso con predilezione di cose astrologiche.

4) Questi, che si chiamava Ticone al pari del padre, era nato addì 28 Agosto 1581, fu allievo della scuola di Sorö in Danimarca nel 1591 e studente all' Università di Wittemberga nel 1598: v' era anche nel 1599, poichè il v. Biela scrive (Astronomische Nachrichten 3, 1825, col. 256) d' aver veduto un album di questo

nisse accolto alla Corte di Toscana. Ma dell' aiutare queste osservazioni astronomiche, ossia a quanto pare, di provvedere alle relative spese non pare che il Granduca si chiarisse disposto, e quanto ad accogliere il figliuolo, che al pari del padre suo si chiamava TICONE, fu opposto un deciso rifiuto allegandosi che non era cattolico, e che acattolici non si volevano alla Corte di Toscana.

Il tentativo diretto ad ottenere che il giovane TICONE fosse mantenuto dal Granduca a Siena dove pur erano in gran numero i tedeschi protestanti non avendo avuto miglior fortuna, parrebbe che ogni pensiero avesse dovuto esserne smesso; ma convien credere che il BRAHE non avesse del tutto perduta la speranza di ottenere qualche cosa dal Granduca, se egli, non ostante i replicati rifiuti, s' indusse a scrivergli quest' altra lettera che ora appunto vede la luce.

Scopo principale di questa lettera è evidentemente quello di accompagnare e presentare al Granduca un suo figliuolo, anzi proprio quel TICONE stesso del quale FERDINANDO I non aveva voluto sapere per alcun conto. Egli se ne veniva in Italia al séguito di ROBERTO SCHERLEY, inglese, ambasciatore di CHA-ABBAS Re di Persia, spedito a varii Principi d' Europa con lo scopo di promuovere una lega contro il Turco: nel viaggio a Roma sostò l' ambasciata a Firenze, poichè, come è ben noto, intorno a questo tempo la Toscana era ancora considerata come una potenza navale, e quindi poteva interessare di raccoglierne la adesione.

La lettera, nel suo complesso semplicemente ufficiosa, ragguaglia ancora il Granduca del trasferimento di TICONE BRAHE a Praga, di dove essa è datata, e del trasporto operato dei ventotto strumenti astronomici che seco aveva portati dalla Danimarca, collocati provvisoriamente in un palazzo prossimo alla Reggia imperiale in attesa della costruzione di un osservatorio, che il grande astronomo non potè vedere compiuto, perchè nove mesi dopo la data di questa lettera egli era già morto.

Serenissime et Potentissime Princeps,
Domine Clementissime.

Cum magni Persarum Regis amplissima Legatio, quae hic aliquandiu apud Sacram Caesaream Maiestatem Dominum meum Clementissimum morata est, nunc in Italiam cogitet, et antequam Romam venerit Serenissimam Celsitudinem Tuam in Etruria Sua salutare, et quae in mandatis habet eidem reverentes exponere constituerit, mei officii esse ratus sum,

---

TICONE iuniore contenente parecchie notizie concernenti i figli ed i figli dei figli dell'astronomo danese: in esso TICONE seniore v' era inscritto con le seguenti parole: « *Disce puer virtutem ex me durumque laborem fortiter et sortis sustinuisse vices. TYCHO BRAHE filio TYCHONI primogenito scripsi. Anno 1599, feb. 28. Witebergae.* »



Serenissimam Celsitudinem Tuam et Tengnaglio nostro clementissime bene meritam hisce litterulis submisse compellare praesertim cum Legationis eius antesignanum Illustrissimum Dominum Ammonium Scherlej, natione Anglum filius meus natu maior, Tycho nomine, comitetur. Est autem ille idem filius quem antea in Serenissimae Celsitudinis Vestrae Aula aliquamdiu servire exoptaram, nisi ostacula quaedam intervenissent, quae attingere supervacaneum. Tradidissem illi opera quae hactenus in Astronomicis elucubravi secum adsportanda, prout Serenissima Celsitudo Vestra aliquando clementissimis suis ad me literis expetiit, nisi quaedam in singulis ferme adhuc desiderarentur, typographico labore needum absoluta. Quod ubi effectum, Serenissimae Celsitudinis Vestrae Clementissimae voluntati demisse et lubentissime obsecundabo.

Remoram nonnullam, quo minus illa ad colophonem deducta sint iniecit migratio mea ex Arce prioris habitationis Bennatica huc Pragam, sic clementissime mandante Caesarea Maiestate quo propior ei factus, humillima mea servitia ipsius Maiestatis promptius praestare possem, allatis etiam huc omnibus instrumentis astronomicis, quibus antea in Dania Patria mea usus sum, quae numero sunt 28, iisdemque in domo quadam ampla et magnifice, italica architectura, non longe ab Arce iuxta Caesaris hortum extructa, ordine dispositis donec in locum quendam usui eorum aptiorem a Caesarea Maiestate clementissime deputatum transferantur. Quod et brevius futurum spero.

Idque Serenissimae Celsitudini Vestrae debita submissione (siquidem eam benignissime studiis meis favere compertum habeam) indicandum duxi.

Pluribus vero Eam gravioribus intentam, hac mea interpellatione remorari, nec volo, nec decet.

Quare nunc finem facio. Id solummodo addens et humillime rogans ut Serenissima Celsitudo Vestra praedictum Filium meum sibi commendatum habere non dedignetur.

DEVS OPT. MAX. Serenissimam Celsitudinem Vestram Reipublice emolumento quam diutissime servet florentem et incolumem.

Praga, die 28 Ianuarii Anno 1601.

Serenissimae Celsitudini Vestrae
Submisse Addictissimus
Tycho Brahe,
manu propria scripsi.

Fuori: Serenissimo et Potentissimo Principi ac Domino,
Domino Ferdinando Magno Duci Etruriae etc.
Domino suo Clementissimo.

Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferici.

Di G. Vacca in Torino.

L' idea di angolo solido sembra nota ai più antichi filosofi greci.

Aristotele[1]), raccogliendo le opinioni dei suoi predecessori sulla costituzione della materia, aveva già osservato che, nello stesso modo che tre sole figure possono riempire il piano, il quadrato, il triangolo e l' esagono, nello spazio due sole, la piramide ed il cubo.

Euclide[2]) dà due definizioni di angolo solido (*στερεὰ γωνία*) la prima delle quali, secondo l' Heiberg, rimonta forse a più antichi geometri. Euclide però non vide che questi angoli solidi fossero suscettibili di misura.

Bisogna risalire ad Averroe[3]) per un primo tentativo di misura. Egli suppone che l' angolo solido del tetraedro regolare sia due terzi dell' angolo solido del cubo, perchè la somma degli angoli delle faccie del primo vale due terzi della somma corrispondente del secondo. Questo grave errore doveva essere confutato molti secoli dopo da Maurolicio.

È nelle opere di Witelo pubblicate nel 1572 da F. Risner che si trova il primo teorema importante sulla misura degli angoli solidi[4]):

« Proportionem partis superficiei sphaericae ad totalem superficiem suae sphaerae, sicut anguli solidi in ipsam a centro sphaerae cadentis, ad octo rectos solidos necesse est esse. E Nicolao Cabasilla[5]) in 3 librum *Magnae constructionis* Ptolemaei. »

---

1) Aristotelis *Opera omnia*, ed. Du Val (Lutetiae Parisiorum 1619), t. 1, p. 483 (Phys. lib. VIII, cap. VIII).

2) Euclidis *Opera omnia* ed. Heiberg (Lipsiae 1885), t. 4, p. 4 (lib. 11, Df. 11).

3) Queste notizie su Averroe e quelle successive su Maurolicio sono stratte dalla interessantissima nota di L. de Marchi, *Di tre manoscritti del Maurolicio che si trovano nella biblioteca Vittorio Emanuele di Roma* (Biblioth Mathem. 1885, col. 193—195).

4) Vitellonis *Thuringopoloni opticae libri decem. Instaurati a* Federico Risnero (Basileae 1572), lib. I, prop. 87, pag. 33.

5) Il commento quì citato di *Νικολάου τοῦ Καβάσιλλα*, si trova in Ptolemaei *Magnae constr.* (Basileae, Walderus 1538) t. 2, p. 131—194. Sembra molto interessante,

La dimostrazione ivi data è insufficiente, merita però di essere riprodotta come un primo tentativo dell'uso degli indivisibili, decomponendo egli l'area del triangolo sferico con un sistema di circoli massimi.

«..... sit *abc* pars superficiei sphaericae alicuius spherae cuius centrum sit *d*: et ducantur lineae *ad*, *bd*, *cd*: et in ipsa superficie ducantur lineae *ab*, *bc*, *ac*: fietque piramis, cuius vertex est punctum *d*, et basis *abc*.

Palam quoque quoniam angulus circa punctum *d* est solidus, tribus angulis superficialibus contentus.

Dico, quod quae est proportio illius anguli ad 8 angulos rectos solidos, qui replent locum solidum circa centrum *d*, eadem erit proportio superficiei sphericae, quae est *abc*; ad totam sphaericam superficiem suae sphaerae.

Imaginentur enim plurimi circuli magni, transeuntes per omnia puncta illius superficiei, non secantes se super illam. Patet itaque, quoniam aliqui arcus illorum circulorum determinantur per lineas terminales illius superficiei: omnium autem illorum arcuum partialium ad totos suos circulos est proportio sicut angulorum contentorum sub lineis a centro *d* ad ipsorum terminos productis ad 4 rectos superficiales per 33, f. 6. Patet ergo propositum».

Sembra che questo passo debba attribuirsi a Risner: certo gli appartiene la citazione di Kabasilla, nato probabilmente dopo la morte di Witelo.

Regiomontano in uno scritto attualmente perduto (Biblioth. Mathem. 1885, 193) si è occupato del problema *de figuris solidis locum implentibus*; inoltre in una lettera del 4 luglio 1471 indirizzata a Chr. Roder, ha posto (ma non risolto) il problema di trovare l'area di un triangolo sferico i cui lati sono 15^0, 24^0, 34^0 (vedasi: Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **12** (Leipzig, Teubner 1902), p. 332).

Vengono quindi in seguito gli importanti lavori di Maurolicio purtroppo però ancora inediti, malgrado che fin dal 1885 il prof. L. de Marchi avesse fatto notare l'utilità della loro pubblicazione.[1])

Debbo quindi limitarmi a riportare alcuni passi dell'opuscolo:

«De quinque solidis, quae vulgo regularia dicuntur, quae videlicet eorum locum impleant, et quae non, contra commentatorem Aristotelis Averroem».

In esso Maurolicio considera gli angoli solidi e gli angoli diedri in quanto essi riempiono lo spazio attorno ad un punto, o attorno ad un asse (*verticaliter* od *angulariter*).

ma io non ho potuto in un rapido esame rinvenirvi la notevole proposizione che Risner gli attribuisce.

1) Biblioth. Mathem. 1885, col. 195.

« Solidae ... figurae locum implere dupliciter intelligi possunt, aut angulariter, aut verticaliter.

Tunc enim angulariter solidae figurae locum implent, cum illarum anguli ex duorum planorum concursu effecti ad unam rectam sic copulantur, ut nihil in medio vacui supersit. Verticaliter autem locum eas implere dico, cum ipsarum vertices, ubi tria vel plura plana conveniunt, ad unum punctum sic copulantur undique concurrentes, ut nihil in medio loci non impletum remaneat ».

Sarebbe interessante poter vedere dalle dimostrazioni di questo opuscolo di MAUROLICIO, come egli arrivi a riconoscere la falsità dell' opinione sopra citata di AVERROE, che dodici angoli solidi del tetraedro regolare riempiono lo spazio, ed altresì di poter vedere fino a che punto egli avesse spinto ricerca dei solidi regolari che riempiono lo spazio, aggiungendo egli a quelli dati da ARISTOTELE « pyramides cum octahedris cumpactas »; tanto più che la soluzione completa della questione e stata data soltanto in tempi recenti, interessando la cristallografia teorica.

E quì vi è una lacuna che altri forse un giorno potrà colmare.

Da una nota del BALTZER[1]) sembra che BROZEK (BROSCIUS) nella sua *Apologia pro ARISTOTELE et EUCLIDE*[2]), abbia trovato la regola per il calcolo dell' area di un poligono sferico, come desunta da *antiquis in VITELLONEM notis*.

Non ho potuto consultare il passo di BROSCIO, ma mi sembra però probabile che egli abbia voluto riferirsi soltanto alla misura dell' angolo solido per mezzo della superficie sferica corrispondente, che si trova nel passo da me precedentemente riportato.

Dobbiamo ora occuparci di HARRIOT. È a questo matematico, che non pote' veder stampato nessuno dei suoi importanti lavori, che si deve la scoperta dei teoremi di cui discorro in questa nota. Le sue dimostrazioni si sono perdute: ma è ben possibile che tanto CAVALIERI, quanto GIRARD, non si siano accinti a riprendere lo stesso problema senza che un' eco della sua soluzione fosse giunto a loro.

Ecco su quali titoli si fondano i diritti di HARRIOT.[3])

H. BRIGGS era in corrispondenza con KEPLERO. Nella sua lettera del 20 Febbraio 1625, con cui accompagnava l' invio della sua *Arithmetica logarithmica* (Londini 1624), gli scriveva:

« Cum doctissimus vir et geometra, THOMAS HARRIOTTUS, longe peritissimus invenerit modum metiendi angulum quemlibet solidum, ab angulis

1) BALTZER, *Elemente der Mathematik*, Aufl. 6 (Leipzig. 1883), t. 2, p. 167.

2) La prima edizione fu pubblicata in Danzig 1652, la seconda in Amsterdam 1699 (si veda Biblioth. Mathem. 1894, pag. 24).

3) Da me pubblicati nell Bollett. di bibliogr. delle sc. matem. 5, 1902, 1—6.

planis comprehensum, quantitatem anguli solidi tetraëdri hic adjungendam censui, ut constaret, quam longe recedant a vero, qui arbitrantur, 12 angulos tetraëdri complere locum solidum.

Valet enim Angulus solidus tetraëdri $\frac{350958}{1000000}$ anguli solidi recti, ita ut locus solidus capiat 11 huiusmodi angulos et amplius.

Cum propediem expectemus et exoptemus ipsius auctoris librum posthumum (T. Harriotus, 1621), qui istud problema inter alia multa ejus acutissima scripta nobis patefaciet, modum mensurandi illi integrum relinquam: ne illi quicquam proripuisse aut ipsam rem non pro dignitate tractasse videar ». (Kepleri, *Opera omnia*, ed. Frisch, vol. IV, Francofurti 1863, p. 661).

Questo passo di Briggs rende manifesto che Harriot sapeva misurare l' area del triangolo sferico; il calcolo riportato lo dimostra.

Ma vi ha di più. Nei Mss. di Harriot scoperti dal Barone di Zach nel 1784, e conservati ora nel « British museum » a Londra, nel mss. add. 6787 fol. 106 r. si trova il passo seguente, di mano di Harriot:

« Inveni rationem accuratam mensurandi superficies triangolorum sphaericorum 18: sept: 1603.

Et est talis: Adde simul omnes angulos trianguli inde detrahe 180, quod superest fac numeratorem ad 360. Dico quod illa fractio exprimit partes haemisphaerii quae continet triangul: vel tot gradus numera in circulo magno quot sunt in numeratore et a polo illius circuli descendunt duo quadrantes terminantes illos gradus; dico quod hoc triangulum aequatur triangulo sphaerico praedicto ».

Lo stesso passo è ricopiato nel vol. 6001—2 fol. 24 Harl. Mss. da un copista anonimo (forse Pell?), il quale vi ha scritto sotto: Mr. Harriot.

Più innanzi (add. 6785 fol. IV, fol. 119r), ma senza data, si trova, pure scritto da Harriot il seguente:

« Canon universalis, pro superficie cuiuslibet polygoni sphaerici.

Adde omnes angulos cuiuslibet polygoni simul: a summa subtrahe toties 180 quoties possibile: dimidium reliqui aequale est superficiei polygoni ».

Non vi ha ragione per dubitare dell' autenticità di questi passi: essa risulta dalla lettera di Briggs sopra riportata, e dalla storia dei manoscritti di Harriot.[1])

La dimostrazione di Girard è contenuta nella sua *Invention nouvelle en l' algebre* (Amsterdam 1629) ristampata nel 1884 dal Bierens de Haan.

1) Si veda p. es. la biografia di Harriot inserita nel *Dictionary of national biography ed. by* Leslie Stephen *and* Sidney Lee (London 1890), vol. 24, p. 437—439.

Nel capitolo (fol. G 1v) intitolato: *De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée*, egli « à fin de declarer ... ceste science incogneuë jusques à present, si ce n'est devant le deluge » comincia col definire come si misurino gli angoli solidi. Passa quindi a dimostrare il teorema (fol. G3v):

« Tout polygone sphericque compris d' arcs de cercles majeurs, tient autant de degrez superficiels, que la somme de tous ses angles interieurs excede la somme des angles interieurs d'un polygone rectiligne de mesme nom: quand la superfice de la sphere est posée estre de 720 degrez superficiels ».

Egli vede subito come la dimostrazione può limitarsi ai triangoli sferici, e la sviluppa in quattro pagine (fol. H 1v—H 3v).

Lagrange [1]) così giudica questa dimostrazione di Girard: « ... la preuve qu'il en donne n'est point rigoureuse, ... elle ne peut pas même être regardée comme une induction; on devrait plutôt attribuer ce théorème à Cavalieri, qui l'a donné ... avec la belle démonstration rapportée par Wallis, et inserée depuis dans la plus part des trigonométries ».

Dopo aver letto con attenzione la intricata dimostrazione di Girard, mi pare che non si possa convenire nel severo giudizio di Lagrange: sembrandomi invece che la dimostrazione di Girard abbia, almeno per la storia della matematica, un' importanza notevole, essendo fondata in sostanza sull' uso degli infinitesimi.

Ed è a notarsi che Girard stesso, maravigliato dall' insolito ragionamento, non osa darlo che « *en conclusion probable* ».

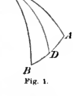


Fig. 1.

Per provare questa mia asserzione, ecco la dimostrazione che col nostro linguaggio traduce rapidamente quella data da Girard.[2])

Sia dato il triangolo sferico ABC (Fig. 1). Lo si decomponga in striscie con tanti circoli massimi passanti per C. Basterà far vedere che il teorema snssiste per ogni striscia, cioè per ogni triangolo avente il lato AB infinitamente piccolo; poichè se è vero per due triangoli ADC, DBC aventi per base due archi BD, AD di uno stesso circolo massimo è pure vero pel triangolo sferico ABC che essi formano insieme, avendo questo triangolo la somma degli angoli eguale alla somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli, diminuita di due retti.

---

1) Lagrange, Journal de l'école polytechnique, t. 2, cah. 5, pag. 275.

2) Mi permetto di fare una versione molto libera, per non allungare e complicare la dimostrazione.

Sia adunque CAB (Fig. 2) un triangolo avente il lato AB infinitesimo. Si conduca il circolo massimo AD normale ad AC. Il triangolo ADC, rettangolo in A, ha la stessa area del triangolo ABC (essendo trascurabile l' area ABD) ed ha la somma degli angoli eguale a quella del triangolo ABC. Infatti avendo il triangolo ABD tutte le sue dimensioni infinitesime, l' angolo esterno ADC è eguale alla somma dei due interni ed opposti DAB, DBA.

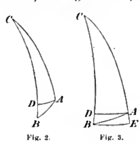


Fig. 2. Fig. 3.

Basterà quindi limitarci a dimostrare il teorema per un triangolo rettangolo avente un cateto infinitesimo. Sia esso ABC (Fig. 3), rettangolo in A. Si conducano (considerando C come polo) i paralleli AD, BE.

Siano a, b, c i lati del triangolo ABC, ed A, B, C gli angoli. Per un noto teorema di Archimede, l' area del triangolo ADC vale $(1 - \cos b)\, C$, quella del triangolo BEC vale $(1 - \cos a)\, C$. Quindi si avrà

$$(1 - \cos a)\, C > \text{area } ABC > (1 - \cos b)\, C. \qquad (\alpha)$$

Ora da Euclide si sa che $A + B + C > \pi$, ed essendo

$$A = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si avrà} \quad \frac{\pi}{2} - B < C.$$

Perciò da due teoremi di Aristarco:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\frac{\pi}{2} - B} > \frac{\sin C}{C}; \quad \frac{\operatorname{tang} C}{C} > \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\frac{\pi}{2} - B}$$

da cui:

$$C \frac{\cos B}{\sin C} > \frac{\pi}{2} - B > C \frac{\cot B}{\operatorname{tang} C};$$

ricordando che $A = \frac{\pi}{2}$, ed applicando note formole di trigonometria sferica:

$$(1 - \cos a)\, C > A + B + C - \pi > (1 - \cos b)\, C. \qquad (\beta)$$

Dalle (α), (β) si vede che l' area ABC e l' espressione $A + B + C - \pi$ sono comprese sempre fra gli stessi limiti. Ricordando infine che C è infinitesimo, il primo ed il 3° membro delle diseguaglianze (α) e (β) tendono a coincidere; si conclude quindi che l' area ABC tende verso (*veut esgaler*) il numero $A + B + C - \pi$.

Con ciò il teorema si può ritenere dimostrato. Non riporto la notissima dimostrazione di Cavalieri[1]), notando però che essa pure, mal-

1) *Directorium generale uranometricum . . . authore* F. Bonaventura Cavalerio (Bononiae 1632), pag. 316.

grado la sua semplicità, solleva una difficoltà, superata solo molto più tardi; cioè egli ammette l' eguaglianza delle aree di due triangoli sferici simmetrici, aventi cioè i lati e gli angoli ordinatamente eguali. Questo teorema si trova enunciato e dimostrato nella *Géométrie* di LEGENDRE.[1])

Non voglio terminare senza ringraziare il signor G. ENESTRÖM a cui debbo la conoscenza di diverse opere citate in questa nota, ed a cui sono dovute varie citazioni di libri a me inaccessibili.

1) *Éléments de géométrie,* éd. 4 (Paris 1812), p. 221, livre VII, prop. XXI.

Simon Stevin und das hydrostatische Paradoxon.

Von D. Schor in Göttingen.

P. Duhem hat in dieser Zeitschrift (1_3, 1900, S. 15—19) einen Artikel: *Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?* veröffentlicht, worin gezeigt wird, dafs Archimedes keine richtige Vorstellung vom hydrostatischen Drucke gehabt hat. Wie der Verfasser klar und deutlich beweist, hat Archimedes das folgende, überhaupt falsche Prinzip seiner Lehre von Flüssigkeiten zu Grunde gelegt: „*Pour connaître la pression exercée sur une aire AB* (Fig. 1), *concentrique à la Terre, menez par la contour de AB, des verticales AA', BB', ... qui formeront une sorte de vase tronc conique; la pression sur la paroi AB est égale au poids de tout ce qui existe dans ce vase, liquide ou solide.*“[1]) — Da aber diese Aussage nur dann zutrifft, wenn der Erdmittelpunkt unendlich weit entfernt ist — eine Bedingung, welche von Archimedes nirgends aufgestellt wird, — so zieht Duhem folgenden Schlufs daraus: „Il n'en reste pas moins que les lois découvertes par Archimède touchant la flottaison des corps graves nous offrent un mémorable exemple de vérités obtenues par une méthode erronée. Il convient de réviser le jugement de Lagrange[2]) au sujet de Simon Stevin et de regarder le géomètre de Bruges comme l'inventeur des véritables fondements de l'hydrostatique.“[3])

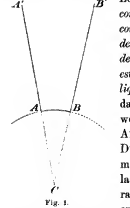


Fig. 1.

1) Duhem, a. a. O. p. 17.

2) Lagrange sagt nämlich: „Quoique d'après ce qu'Archimède avait démontré, il ne fût pas difficile de déterminer la pression d'un fluide sur le fond ou sur les parois du vase dans lequel il est renfermé, Stevin est néanmoins le premier qui ait entrepris cette recherche, et qui ait découvert le paradoxe Hydrostatique, qu'un fluide peut exercer une pression beaucoup plus grande que son propre poids.“ (*Mécanique analytique*; nouvelle édition, T. 1. Paris 1811. Première partie, section VI, p. 176.)

3) Duhem, a. a. O. p. 19.

Nun will ich zeigen, dafs STEVIN diese falsche, aber natürliche Vorstellung teilt. Im vierten Buche seines Traktates „*De l'art pondéraire, ou de la Statique*“ [1]) behandelt er die Hydrostatik. Zunächst stellt er eine Reihe von *Definitionen*, welche, wie auch die ersten fünf darauf folgenden *Petitionen*, für uns kein Interesse haben. In der *Petition VI* setzt er voraus, die Oberfläche des Wassers sei horizontal, und erklärt in der folgenden *Declaration*, dafs solche Annahme für seine Zwecke genau genug ist. Weiter steht folgendes: „— *Petition VII.* — *Si une colomne droite d'eau a sa base et couvercle parallele à l'horizon, et sa superfice laterale perpendiculaire dessus (assavoir toutes les lignes droites entre les poinctes correspondans du couvercle et de la base perpendiculaires à l'horizon) qu'on nous concede que ces perpendiculaires tendent au centre de la terre, et que la base et le couvercle, soyent parties de la superfice de la terre.* — *Declaration.* — Soit *ABCD* (Fig. 2) une eau, en figure de colomne droite, *AB*, *CD* paralleles à l'horizon, et *AD*, *BC*, etc. perpendiculaires dessus, soit aussi *E* centre de la terre, duquel menées *EFA*, *EGB*, etc. et fait *FG* semblable à *DC*; cela estant ainsi, combien que *AD*, *BC* ne tendent pas en *E*, nous demandons qu'on nous concede qu'elles y tendent, veu l'insensible difference qu'on y trouve en la practique, n'y ayant que des longueurs, superfices, et corps qui n'ont aucune raison sensible aux dimensions de la terre totale; En apres qu'on nous concede que *AB*, *CD* soyent parties de la superfice de la terre, assavoir *AB*, si la superfice de la terre estoit aussi esloignée du centre; et *DC*, si la superfice de la terre estoit en apres aussi esloignée du centre *E*.“ — Nachdem STEVIN diese Voraussetzung aufgestellt hat, wendet er sich zur Ableitung der Gesetze, welche das Schwimmen und Einsinken verschiedener Körper im Wasser bestimmen; diese ganzen Auseinandersetzungen lassen wir aufser Acht, da sie für unser Thema nicht von Bedeutung sind. Dagegen erlaube ich mir den unmittelbar darauf folgenden Satz hervorzuheben, um ihn dann etwas näher zu besprechen.

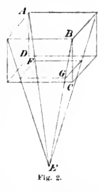


Fig. 2.

An dieser Stelle [2]) behandelt nämlich STEVIN den Bodendruck: — „*Theoreme VIII. Proposition X.* — *Sur le fond de l'eau, parallele à*

1) Ich zitiere nach der bekannten französischen Ausgabe von A. GIRARD: *Les œuvres mathematiques de* SIMON STEVIN (Leyden 1634). Das holländische Original dieses Buches — *De Beghinselen des Waterwichts* — ist bekanntlich in Leyden im Jahre 1586 zusammen mit der STEVINschen Statik — *De Beghinselen der Weeghconst* — erschienen.

2) STEVIN, *Œuvres* éd. GIRARD, p. 487—488.

l'horizon, repose un poids, egal à la pesanteur de l'eau, qui est egal à la colomne, dont la base est le fond susdit; et la hauteur, la perpendicle sur l'horizon entre le fond et la fleur de l'eau. — *Le donné.* Soit $ABCD$ (Fig. 3) une eau, en figure de parallelipipede rectangle, sa fleur AB, et EF un fond à niveau, EG la perpendicle entre le fond EF et la fleur d'eau; la colomne soit celle qui est comprise entre le fond pour sa base EF, et GE hauteur, assavoir la colomne $GEFH$. — *Le requis.* Il faut demonstrer que sur le fond EF repose un poids egal à la pesanteur de l'eau de la colomne $GEFH$. — *Demonstration.* — Si sur le fond EF repose un poids plus grand que $GEFH$, cela viendra à cause de l'eau prochaine: Soit, s'il est possible, de l'eau $ADEG$, et $HFCB$; et de mesme pourra-on dire que sur le fond DE repose plus que l'eau $ADEG$, et sur FC plus que l'eau $HFCB$; tellement que sur DC reposera plus que l'eau $ADCB$; ce qui est absurde estât iceluy un parallelipipede rectangle. Semblablement on demonstrera que sur EF ne repose pas moins que $GEFH$, et par consequent sur EF reposera precisement un poids egal à la colomne d'eau $GEFH$."[1]) — Hier wird von Stevin stillschweigend angenommen, der Druck auf den Boden DC könne unmöglich dem Gewichte der im cylindrischen Gefässe $ADCB$ enthaltenen Flüssigkeit ungleich sein. Schon hierin ist, meiner Meinung nach, diese im Allgemeinen falsche Annahme enthalten, welche Duhem bei Archimedes gefunden hat. Freilich ist sie hier ganz richtig, aber keinesfalls selbstverständlich, denn das Paradoxon besteht eben darin, dafs Druck und Gewicht gar nicht ein und dasselbe sind.

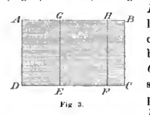


Fig. 3.

Noch schärfer tritt diese falsche Vorstellung im Beweise selbst hervor. Stevin behauptet, dafs auf den Teil EF nur das drücken kann, was sich über demselben in senkrechter Richtung befindet, d. h. das Wasser $GEFH$. Wir wissen seit Pascal, dafs der Druck in Flüssig-

1) Diese *Demonstration* lautet im Origiual (*Beghinselen des Waterwichts*, p. 20): „— T'bewys. Soo op den bodem EF meer ghewicht rust dan des waters $GHFE$, dat sal moeten commen van weghen t'neuenstaende water; Laetet sijn soot mueghelick waer, van t'water $AGED$ ende $HBCF$; Maer dat soo ghenomen, daer sal op den bodem DE, van weghen t' water $GHFE$, om dat de reden de selue is, oock meer ghewichts rusten dan des waters $AGED$; ende op den bodem FC, oock meer ghewichts dan des waters $HBCF$, ende veruolghens op den bodem DC sal meer ghewichts rusteu, den des heelen waters $ABCD$, t'welck (ghemerckt $ABCD$ een lichamelick rechthouck is) ongheschickt waer. S'ghelijcx sal men oock bethoonen dat op den bodem EF niet min en rust dan t'water $GHFE$, daer rust dan not sakelick op t'ghewicht euen ande swaerheyt waters des pilaers $GHFE$."

keiten sich nach allen Richtungen fortpflanzt und man ebenso gut sagen kann, der Druck auf den Bodenteil EF rühre von dem Wasser $ADEG$, oder aber vom Wasser $GEFH$ her.

Ich meine sogar, dafs man ohne das PASCALsche Prinzip das hydrostatische Paradoxon nicht richtig verstehen kann. Es drängt sich jedem von selbst die oben in der Formulierung von DUHEM herbeigeführte falsche Annahme auf, welche ohne Zweifel tiefe psychologische Wurzeln hat. DUHEM sagt selbst: „Remarquons, tout d'abord, que cette hypothèse est celle qui se présente naturellement à tout esprit non instruit des lois de l'hydrostatique; c'est parcequ'elle contredit cette hypothèse que la proposition de STEVIN semble un paradoxe. Il n'est donc pas étonnant qu'elle ait été admise par le premier qni ait traité de l'équilibre des liquides."[1]) — Und es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, dafs auch noch jetzt, wo die mathematische Theorie der Hydrostatik so weit fortgeschritten ist, in vielen Elementarbüchern der Physik der Lehre von Flüssigkeiten dieselbe falsche Prämisse zu Grunde gelegt wird. So, um ein Beispiel herbeizuführen, stellt MÜLLER-POUILLET folgende Behauptung auf, woraus er das hydrostatische Paradoxon ableitet: — „Dafs der Druck auf den Boden eines geraden cylindrischen Gefässes gleich ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers ist klar; dafs aber der Druck auf den Boden der oben erweiterten, verengten und schrägen Gefäfse derselbe sein mufs, bedarf noch eines Beweises."[2])

Unwillkürlich entsteht die Frage: Wie konnte denn STEVIN das hydrostatische Paradoxon nicht begreifen, zumal er selbst es znerst gefunden hat? — Das hydrostatische Paradoxon wird in den fünf *Corollaires* zu der oben angeführten *Proposition X* auseinandergesetzt. Zunächst zeigt STEVIN, dafs ein schwimmender, starrer Körper den Bodendruck nicht alteriert; dann denkt er sich das Wasser im Gefäfse bis auf einen Kanal von beliebiger Form, durch starre Körper von demselben spezifischen Gewicht wie das Wasser („*corps solides parigraves à l'eau*") ersetzt, und der Druck auf den Boden des so erhaltenen beliebig geformten Gefäfses mufs daher der *Proposition X* genügen. Weiter stellt sich STEVIN den ganzen starren Körper bis auf einen gefäfsförmigen Teil entfernt vor und, da dadurch nichts verändert werden soll, mufs der Druck auf den Boden eben so grofs bleiben. STEVIN erklärt also das hydrostatische Paradoxon ähnlich, wie es heutzutage noch in vielen Lehrbüchern geschieht. D. h. er geht von der Annahme aus, dafs auf den Boden nur

1) DUHEM, a. a. O. p. 17.

2) MÜLLER-POUILLETS *Lehrbuch der Physik und Meteorologie*, Aufl. 9 herausg. von L. PFAUNDLER. I. Band (Braunschweig 1886), S. 370 ff.

alles das drückt, was sich über demselben in senkrechter Richtung befindet, um dann durch mehr oder weniger logisch berechtigte Schlüsse das Gegenteil zu zeigen. Von einer Idee, die mit dem Pascalschen Prinzip verwandt wäre, weiſs Stevin nichts.

Während in der obenstehenden Darlegung gezeigt worden ist, daſs die falsche Annahme, auf den Boden drücke nur das, was sich senkrecht darüber befindet, von Stevin indirekt benutzt wird, habe ich diese Annahme bei ihm *auch direkt ausgesprochen* gefunden, und zwar in der Anmerkung zu derselben *Proposition X:* — „*Notez.* — Nous pourrions aussi proposer la 10 proposition comme s'ensuit: — *Sur quelconque fond d'eau. de superfice parallele à la fleur d'icelle, repose un poids egal à la pesanteur de l'eau, comprise dans un secteur spherique, tronqué par une superfice spherique parallele, ou homocentrique à la superfice spherique de la terre.* — Nous eussions fait aussi les demonstrations comme dessus, mais nous l'avons delaissé pour les raisons descrites en la septiesme petition“[1]) (vgl. oben S. 199). Das ist in etwas wenig klarer Formulierung dasselbe, was Duhem bei Archimedes stillschweigend vorausgesetzt findet (vgl. oben S. 198).

Indem ich oben zu beweisen suchte, daſs Stevin ebenso wie Archimedes vom hydrostatischen Drucke eine unrichtige Vorstellung gehabt hat, will ich damit keineswegs sagen, daſs man die Bedeutung Stevins unterschätzen soll. Umgekehrt ist die Aussage von Lagrange (vgl. die Anm. 2 S. 198) ganz zutreffend: Stevin hat zuerst den Druck auf den Boden und die Wände des Gefäſses bestimmt; aber nur für den Fall des unendlich weit entfernten Erdmittelpunktes. Eine allgemeine Theorie der Hydrostatik lieſs sich, wie schon Lagrange bemerkt hat[2]), nur dann entwickeln, als man *das Prinzip der virtuellen Verschiebung* zu Hülfe nahm, was durch Pascal in seiner berühmten Schrift *Traité de l'équilibre des liqueurs* zuerst in einwandsfreier Weise geschehen ist. In der üblichen Darstellung der Geschichte der Hydrostatik ist aber weder die von Duhem hervorgehobene Thatsache in Betreff Archimedes berücksichtigt wor-

---

1) Diese Anmerkung lautet in *Berghinselen des Waterwichts* (p. 23) folgendermaſsen: „— Merckt. Wy souden t'boveschreuen 10° voorstel eyghentlicker aldus uyt ghesproocken hebben: — Op yder bodem des waters in een weereltvlack sijnde, rust een ghewicht euen ande swaerheyt waters die euegroot is mettet clootsdeel begrepen tusschen den bodem ende tweereltvlack duer t'waters hoochste punt, ende t'vlack tusschen die twee vlacken, beschreuen met de oneindelicke rechte lini vast in t'weerelts middelpunt, ende ghedraeyt duer des bodems* omtreck. (*Circumferentiam*). — Daer af bewysende sulcx als bouen bewesen is, maer om de redenen onder de 7e begheerte verclaert, soo ist beter ghelaten.“

2) *Mécanique analytique*, p. 178.

den, noch das, worauf ich in der gegenwärtigen Notiz hinweise, erwähnt.[1]) Und dadurch erscheinen, meiner Meinung nach, die Leistungen von drei grofsen Begründern der Hydrostatik — ARCHIMEDES, STEVIN und PASCAL — in einer falschen Beleuchtung.

1) Vgl. F. ROSENBERGER, *Die Geschichte der Physik* (Braunschweig 1882); J. C. POGGENDORFF, *Geschichte der Physik* (Leipzig 1879); QUÉTELET, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Bruxelles 1864); E. DÜHRING, *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik* (Berlin 1873); E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwickelung* (IV. Aufl., Leipzig 1901).

Über den Ursprung der Benennung „Pellsche Gleichung".

Von G. Eneström in Stockholm.

Am Ende seines Aufsatzes über J. H. Rahn[1]) hat Herr G. Wertheim die Frage nach dem Ursprung der falschen Benennung „Pellsche Gleichung" für $ax^2 + 1 = y^2$ als eine noch offene bezeichnet und die Hoffnung ausgedrückt, daſs die Sache baldigst aufgeklärt werden wird. Unserer Ansicht nach genügt schon das vorhandene Material, um die Entstehung der Benennung befriedigend zu erklären, ohne daſs es nötig ist, eine ganz neue Untersuchung anzustellen; auf der anderen Seite glauben wir nicht, daſs eine solche Untersuchung neue Thatsachen an den Tag bringen würde.

Bekanntlich hat man behauptet, daſs Pell in den Anmerkungen zu der englischen Übersetzung, die Brancker im Jahre 1668 von der deutschen Algebra Rahns herausgab, die von Brouncker und Wallis gefundene Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ dargestellt hat[2]), aber bezüglich dieser Behauptung, die, soweit uns bekannt ist, zuerst von Hankel[3]) bestimmt ausgesprochen wurde, haben die Herren H. Konen[4]) und G. Wertheim[5]) bemerkt, daſs sie unrichtig ist, da das Göttinger Exemplar der Branckerschen Übersetzung, das unzweifelhaft vollständig ist[6]), die Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ *nicht* enthält. Diese Bemerkung ist ohne weiteres entscheidend, und es erübrigt nur zu zeigen,

1) G. Wertheim, *Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben;* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 113—126.

2) Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², S. 777.

3) H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* (Leipzig 1874), S. 203.

4) H. Konen, *Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$* (Leipzig 1901), S. 34.

5) Wertheim, a. a. O. S. 126.

6) Die Bibliothek der schwedischen Akademie der Wissenschaften besitzt ein Exemplar der Branckerschen Übersetzung; zwei andere Exemplare derselben (vgl. die Bemerkung des Herrn G. Wertheim S. 251 dieses Heftes) finden sich in Zürich (Stadtbibliothek und Bibliothek der naturforschenden Gesellschaft). Alle diese drei Exemplare stimmen vollständig mit dem Göttinger überein.

wie HANKEL, der die ziemlich seltene BRANCKERsche Arbeit wahrscheinlich nie selbst gesehen hatte, zu seiner unrichtigen Behauptung gekommen ist. Für diesen Zweck genügt es auf die betreffende Stelle in ARNETHS *Geschichte der Mathematik*[1]) hinzuweisen. Hier findet man nämlich folgende Notiz: „Diese erste Auflösung [durch BROUNCKER] ... wurde von dem englischen Mathematiker PELL wieder vorgenommen, aber seine Auflösung war in vielen Fällen sehr weitläufig. In PELLS neuer Ausgabe von RAHNS Algebra, welche BRANCKER aus dem Deutschen ins Englische übersetzt hatte, kommt noch manches hierher Gehörige vor". Wer diese Zeilen liest, ohne das wirkliche Sachverhältnis zu kennen, mufs wohl die Ansicht bekommen, die PELLsche Auflösung befinde sich gerade in der citierten Arbeit von BRANCKER. Ob ARNETH selbst dieser Ansicht gewesen ist, hat für uns keine Bedeutung, da wir ziemlich leicht erraten können, dafs ARNETH aus KLÜGELS *Wörterbuch* geschöpft hat, und dieser nicht angiebt, dafs die PELLsche Auflösung in der BRANCKERschen Übersetzung vorkommt. Im Artikel: „PELLS Aufgabe"[2]) schreibt nämlich KLÜGEL u. a.: „PELLS Auflösung ist aber in manchen Fällen sehr langwierig. Man sehe EULERS Algebra, den Abschnitt von der unbestimmten Analytik, § 98 ff. ... In seiner [d. h. PELLS] vermehrten und verbesserten Ausgabe von RAHNS Algebra, die BRANCKER aus dem Deutschen übersetzt hatte, kommt vieles über jenen Zweig der Analysis [d. h. der unbestimmten Analytik] vor, wie man aus dem Auszuge sieht, den WALLIS in seiner Algebra Cap. 57 davon giebt." Vergleicht man diesen Passus mit ARNETHS Worten, kann man wohl kaum zu dem Resultate gelangen, dafs die Übereinstimmung nur zufällig ist. Zwar sagt KLÜGEL nicht, dafs BROUNCKER vor PELL die Aufgabe gelöst hatte, aber zu dieser Bemerkung konnte ARNETH sehr wohl durch das Studium des Artikels „Unbestimmte Analytik"[3]) desselben *Wörterbuches* veranlafst worden sein; im Vorübergehen sei darauf hingewiesen, dafs dieser Artikel, der von GRUNERT herrührt, PELL gar nicht erwähnt.

Durch das Vorhergehende dürfte ersichtlich sein, wie die falsche Angabe, dafs PELL in der BRANCKERschen Übersetzung von RAHNS Algebra die Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ gegeben hat, entstand. Mit HANKEL sind wir also jetzt fertig, und auch ARNETHS Behauptung, dafs PELL die BROUNCKERsche Auflösung der Gleichung „wieder vorgenommen" hat, können wir beiseite lassen, da sie allem Anschein nach auf einer unrichtigen Verknüpfung von zwei Notizen beruht, von denen die eine

1) A. ARNETH, *Geschichte der reinen Mathematik* (Stuttgart 1852), S. 278.

2) G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, Th. 3 (Leipzig 1808), S. 789—790.

3) KLÜGEL, a. a. O. Th. 5 (Leipzig 1831), S. 465.

Pell gar nicht erwähnt, und die andere sogleich berücksichtigt werden wird. Wir haben folglich nur auf die Klügelsche Bemerkung, daſs Pells Auflösung in Eulers Algebra Kap. VII, § 98 ff. sich findet, Rücksicht zu nehmen, und zu untersuchen, welche Aufschlüsse Euler über unsere Frage giebt. An der citierten Stelle finden wir freilich nur die Behauptung, daſs Pell die Gleichung aufgelöst hat und die Auseinandersetzung einer Methode, die Euler als die Pellsche bezeichnet[1]); und auch in den übrigen Schriften, wo Euler die Pellsche Gleichung behandelt hat, erwähnt er nur, daſs Pell diese zuerst gelöst hat, einmal sogar, daſs die Aufgabe selbst von Pell herrührt.[2]) Dagegen hat Euler in einem Briefe an Goldbach vom 10. August 1730 bemerkt, daſs „pro hujusmodi quaestionibus solvendis excogitavit D. Pell Anglus peculiarem methodum in Wallisii operibus expositam"[3]); er verweist also ausdrücklich auf Wallis' *Opera*. Nun findet man zwar im zweiten Bande von Wallis' *Opera* sowohl die Auflösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ [4]) als auch Mitteilungen über Pells Forschungen auf dem Gebiete der unbestimmten Analytik[5]), aber an der Stelle, wo die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ behandelt ist, wird Pell gar nicht erwähnt, sondern die Brounckersche Methode dargestellt, und an der Stelle, die von Pell handelt, fehlt jede Erwähnung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$. Auch in den zwei übrigen Bänden giebt es, soviel wir wissen, keine Stelle, die die Eulersche Notiz motivieren kann. Es liegt darum sehr nahe zu vermuten, daſs der junge Euler — als er den citierten Brief an Goldbach schrieb, war er ja nur 23 Jahre alt — die *Opera* des Wallis nur flüchtig gelesen hatte[6]) und aus diesem Grunde Pell mit Brouncker verwechselte.[7]) Diese Ver-

1) Vgl. Konen, a. a. O. S. 46; Wertheim, Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 361.

2) Vgl. Konen, a. a. O. S. 49; Wertheim, Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 360—361.

3) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle publiée par* P. H. Fuss, tome 1 (St. Pétersbourg 1843), S. 37. — Vgl. Konen a. a. O. S. 48.

4) Wallis, *Opera mathematica* II (Oxford 1693), cap. 98 (S. 418—426): „Methodus approximandi in quaestionibus numeralibus; occasione problematis Fermatiani"; cap. 99 (S. 427—429): „Eadem porro continuata".

5) Wallis, a. a. O. cap. 57 (S. 234—236): „De algebra D. Johannis Pellii et speciatim de problematis (!) imperfecte determinatis"; cap. 59 (S. 238—244): „Methodi Pellianae specimen".

6) Vgl. Konen, a. a. O. S. 49.

7) Die Bemerkung von Konen (a. a. O. S. 49): „es scheint mir nicht unmöglich, daſs die Überschrift des betreffenden Abschnittes der Algebra von Wallis, die in der That leicht zu Miſsverständnissen führen kann, an dem Versehen Eulers schuld ist" verstehe ich nicht, da ich in der Algebra von Wallis keine solche zweideutige Überschrift entdeckt habe.

mutung wird auch durch den Umstand bekräftigt, dafs EULER in seiner Algebra, nachdem er angegeben hat, dafs er die von PELL erfundene Methode zur Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ erklären will, genau die BROUNCKERsche Auflösung in der WALLISschen Form darstellt.[1])

Als Resultate unserer Untersuchung ergiebt sich also:

1. Die Benennung „PELLsche Gleichung“ ist dadurch entstanden, dafs EULER die zwei in den *Opera* des WALLIS erwähnten Mathematiker BROUNCKER und PELL verwechselt hat;
2. die Behauptung, dafs PELL die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ in der BRANCKERschen Übersetzung der RAHNschen Algebra behandelt hat, beruht auf einem Mifsverständnis von HANKEL.

---

1) Vgl. KONEN, a. a. O. S. 46.

Der Innsbrucker Mathematiker und Geophysiker Franz Zallinger (1743—1828).

Von Siegmund Günther in München.

Die Verhältnisse der exakten Wissenschaften, so wie sie sich beim Übergange des XVIII. Jahrhunderts in das XIX. gestaltet hatten, fanden in der letzten Zeit eine erhöhte Beachtung. Aber im einzelnen bleibt doch noch vieles zu thun übrig. Unwillkürlich verführt die bekannte Thatsache, dafs Gauss zu den Mathematikern seiner Zeit nur geringe Beziehungen unterhielt, zu dem Trugschlusse, dieselben könnten sich sämtlich über ein gewisses niedriges Niveau nicht erhoben haben, während doch daraus nur auf die unleugbare Überlegenheit des gröfsten Denkers seiner Zeit geschlossen werden kann, der gegenüber auch andere, im Lichte der Zeitgeschichte betrachtet, ihren Platz als Gelehrte und Lehrer voll ausfüllten. Und gerade auf den kleinen süddeutschen Universitäten, denen man vielfach nur kulturhistorisches Interesse zuzubilligen geneigt ist, gab es einzelne in ihrer Art bedeutende Männer, die ganz gewifs innerhalb ihres engeren Kreises einen segensreichen Einflufs ausübten, wenn sich ihnen auch schon durch die Stellung, welche sie einnahmen, die Möglichkeit entzog, stärker hervorzutreten. Hier bleibt der historischen Forschung, welche mit der Universitäts- und Gelehrtengeschichte enge Fühlung zu unterhalten hat, noch ein weites Feld eröffnet, dessen Bebauung zwar keine Ergebnisse von grundstürzender Tragweite, wohl aber dankenswerte Einblicke in das Geistesleben damaliger Wissenszentren liefern kann. Wir hoffen, dafs die nachfolgende monographische Schilderung diesen unseren Leitsatz bewahrheiten wird.

Das Lyzeum zu Innsbruck, eigentlich eine unvollständige Universität, der das Recht zustand, Doktoren der Philosophie zu ernennen, erfreute sich mehrere Jahrzehnte lang eines angesehenen Lehrers der Mathematik und Physik, dessen litterarische Thätigkeit eine äufserst vielseitige und zugleich nutzbringende war.[1]) Franz Joseph Zallinger zum Thurn,

1) Trotz unleugbarer Verdienste, mit deren Wesen uns die nachstehende Schilderung bekannt machen wird, ist die Orientierung über Zallinger sehr durch den

aus einer bekannten, geachteten Familie Südtirols stammend, bekleidete diese Professur zunächst in seiner Eigenschaft als Mitglied des Jesuitenordens, dem damals in Österreich das philosophische Studium fast mit Ausschliefslichkeit anvertraut war, und nachher als Exjesuit.[1]) Geboren am 14. Februar 1743 zu Bozen, starb er hochbetagt in Innsbruck am 2. Oktober 1828. Wie immer in solchen Fällen, läfst sich die unmittelbare Einwirkung des akademischen Lehrers auf die studierende Jugend nicht leicht nach festen Merkmalen beurteilen; indessen scheint der Um-

Mangel zuverlässiger Nachrichten erschwert. Selbst die in grofsem Stile angelegte *Deutsche Biographie* kennt ihn nicht. Die beste Quelle ist, wie vielfach, wenn es sich um Jesuiten handelt, die *Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus.* Poggendorffs Aufzählung der Zallingerschen Arbeiten (*Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, 2. Band, Leipzig 1863, Sp. 1391), ist weit davon entfernt, vollständig zu sein. Das Porträt vor dem Titelblatte der später zu erwähnenden Dissertation über die Hochfluten ist nicht, wie zu glauben nahe läge, dasjenige Zallingers, sondern das des Reichsgrafen Firmian, dem die Schrift zugeeignet ist. Natürlich machte der junge Mann zuerst den theologischen Lehrgang durch, und auch bei seiner Doktorpromotion wählte er ein einschlägiges Thema (*Dei infinita potestas cum ejus oeconomia conciliata,* Ingolstadt 1773), das aber doch schon die Neigung zur naturwissenschaftlichen Spekulation hervortreten läfst.

1) Ganz in gleicher Eigenschaft, d. h. als Professor der Philosophie, wirkte in Innsbruck ein Verwandter, Johann Baptist Zallinger zum Thurn (1731—1785). Auch von ihm rühren ein paar naturwissenschaftliche Schriften (Innsbruck 1769 und 1771), sowie solche über Agrikultur her (*De ortu frugum dissertatio ex mechanismo plantarum deducta*, Innsbruck 1769; *Beobachtungen über den Ackerbau,* Wien 1776). Die lateinisch geschriebene Abhandlung ist als ein Versuch, das Pflanzenwachstum auf physikalische Gesetze zurückzuführen, immerhin beachtenswert Bedeutender war Jakob Anton Zallinger zum Thurn (1735—1815), der folgeweise in München, Dillingen, Innsbruck und Augsburg an den Jesuitenkollegien angestellt war und zuletzt als Privatmann in seiner Vaterstadt Bozen lebte. Er war ein eifriger und überzeugter Newtonianer, kein Anhänger der üblichen jesuitischen Schulphilosophie. Das bezeugen sowohl seine kleineren Arbeiten (*De lege gravitatis universali,* München 1769; *De expositione physica demonstrationum mathematicarum in philosophia naturali,* Dillingen 1772), als auch besonders sein Hauptwerk (*Interpretatio naturae seu philosophia Newtoniana methodo exposita*, Augsburg 1773—1775). Dafs dieses einen sehr achtbaren Standpunkt bekundende und eine umfassende Gelehrsamkeit verratende System gänzlich der Vergessenheit anheimfallen konnte, ist zu verwundern. Der erste der drei Bände ist der Logik, Metaphysik, Psychologie und „natürlichen" Theologie gewidmet; der zweite behandelt die „allgemeine" Physik oder Mechanik, und der dritte die „spezielle" Physik. Zu letzterer gehört auch die physikalische Geographie, die zwar kein Kapitel für sich darstellt, deren einzelne Teile dagegen in den verschiedenen Abschnitten ganz zweckmäfsig untergebracht sind. Von einigen Ausnahmen abgesehen, tritt allenthalben des Autors Bestreben zu tage, dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft Rechnung zu tragen. Da die bezüglichen Ausführungen gröfstenteils dem Sinne nach mit denjenigen übereinstimmen, die sich bei Franz Zallinger finden, so soll zunächst darauf nicht näher eingegangen werden.

stand, dafs Zallinger wiederholt bei der Verteidigung von Streitsätzen als Präses fungierte, dafür zu sprechen, dafs er auch Schüler herangebildet hat. Uns gehen hier natürlich nur seine Veröffentlichungen an, und zwar wieder am meisten jene, in denen uns selbständiges Denken und Forschen begegnet. Die übrigen mag es genügen in einer Randnote zusammenzustellen.[1])

Nach vier Seiten hin erstreckt sich Zallingers Streben, neue wissenschaftliche Werte zu produzieren. Er bearbeitet die Elektrizitätslehre, die Meteorologie, die Kartographie und Geodäsie, die Mechanik, und endlich, mit besonderem Erfolge, die Hydrologie. Aber auch seine Thesensammlungen dürfen nicht aufser acht gelassen werden. Er liebte es nämlich, anderen Veröffentlichungen eine Zusammenstellung von kurzen, auf die verschiedensten Zweige der Mathematik und Naturwissenschaft bezug nehmenden Ansprüchen anzuhängen, die ohne Beweis fundamentale Wahrheiten enthalten sollen. Wir werden ihrer jeweils bei den einzelnen Schriften gedenken, die wir der Besprechung unterziehen.

Zallingers elektrische Arbeiten sind der Nachwelt völlig aus dem Gedächtnis gekommen; kein physikalisches Geschichtswerk thut ihrer Erwähnung, und selbst Hoppes selten versagendes Repertorium[2]) befragt man vergebens. Und doch mufs die einschlägige Schrift Beifall gefunden haben, weil sie eine neue Auflage erlebte.[3]) Uns freilich will die Annahme einer „elektrischen Materie“, welche zur „phlogistischen“ einige Verwandtschaft unterhalte, nicht mehr zusagen, aber vor hundert und mehr Jahren entsprach dieselbe doch dem allgemeinen Zeitbewufstsein, das auch noch am „Wärmestoffe“ keinen Anstofs nahm, ganz und gar. Aber Zallinger begnügte sich nicht mit theoretischen Auseinandersetzungen, sondern wandte seine Hypothese auch auf ein Problem an, das damals hohe Aktualität besafs und selbst heute noch nicht als endgiltig geklärt gelten

---

1) Es sind die folgenden: *Praelectiones ex mathesi pura*, Augsburg 1783; *Praelectiones ex mathesi applicata*, ebenda 1798; *Praelectiones ex physica theoretica et experimentali*, Innsbruck 1805.

2) E. Hoppe, *Geschichte der Elektrizität*, Leipzig 1884.

3) F. Zallinger, *Von den elektrischen Grundsätzen*, Innsbruck 1779; zweite Ausgabe, ebenda 1801. Der Autor hatte sich, dem Vorworte zufolge, zur Abfassung dieser Schrift wesentlich durch den Umstand anregen lassen, dafs seine Vorlesung über Experimentalphysik niemals so gefüllt war, als wenn die elektrischen Versuche an der Reihe waren, dafs mithin dieser Gegenstand auf allseitige Teilnahme rechnen durfte. Viel Nenes darf man nicht erwarten; wohl aber liegt eine gute Verarbeitung der damals den modernsten Standpunkt anzeigenden Untersuchungen von Priestley, Volta und Beccaria vor. Angehängt sind auch diesem Schriftchen *Propositiones ex physica*, die sich auch über die Anfangsgründe der — zur Zeit natürlich phlogistischen — Chemie erstrecken.

kann. Er gehört zu den zeitlich ersten Erforschern der Thermoelektrizität der Krystalle.[1]) Was LINNÉ, AEPINUS, WILCKE, CANTON in der Erkundung der elektrischen Eigenschaften des aus Ceylon nach Europa gebrachten Halbedelsteines geleistet, war dem Tiroler Gelehrten wohl bekannt, und vor allem war seine Erkenntnis wertvoll, daſs der in seinem Vaterlande häufige, gemeine Schörl, wiewohl als schwarz und undurchsichtig vom „brasilianischen Smaragd“ und „Rubellit“ dem Anscheine nach sehr verschieden, thatsächlich echter Turmalin sei. Diese Behauptung eröffnet gleich die inhaltreiche Monographie[2]); auch der sächsische Schörl sei wahrscheinlich identisch. Die wohl ausgestattete Mineraliensammlung eines Grafen ENZENBERG lieferte die aus Brasilien bezogenen Probeexemplare. Zur Untersuchung diente ein Elektroskop, dessen Kügelchen aus Kork oder aus dem Mark der Sonnenblumen hergestellt waren. So glückte denn die Wiederholung aller bereits bekannten Grundversuche, ferner die Elektrizitätserregung durch Reibung; wesentlich neu war die Ausdehnung des Experimentes auf die Abkühlung.[3]) Die „Mutmaſsungen über die Elektrizität des Turmalins“[4]) zeichnen sich durch verständige Abwägung dessen aus, was der Physiker leisten und was er nicht leisten kann. Das Publikum

1) E. HOPPE, a. a. O. S. 50 ff. AEPINUS (*Recueil de différents mémoires sur le tourmaline*, St. Petersburg 1762) hatte zuerst gezeigt, daſs der Turmalin, den die holländischen Entdecker „Aschentrekker“ nannten, von Hause aus völlig unelektrisch ist, und daſs entgegengesetzte Pole an einem solchen Krystalle erst dann bemerkbar werden, wenn man ihn erwärmt, wobei jedoch noch ein wichtiges Moment unberücksichtigt geblieben war. Die Ergänzung lieferte der Schwede BERGMAN (*Om tourmalinens electriska egenskaper*, Upsala 1766) durch den Nachweis, daſs der Erwärmungsakt als solcher neutral verläuft, und daſs die Herausbildung von Polen an den Enden des Krystalles nur erfolgt, wenn die letzteren ungleich temperiert sind. Ziemlich gleichzeitig hatte WILCKE die analoge Wahrnehmung gemacht. CANTON endlich (*An account for the regular diurnal variation of the horizontal magnetic needle, and also for its irregular variation at the time of an Aurora Borealis*; Philosophical Transactions 1759, S. 398 ff.; damit zusammenhängend *On the electrical properties of tourmaline*; Gentlemen's magazine 1759) konnte das verwandte Verhalten eines Magneten darthun, welches sich äuſsert, wenn man beide in Stücke zerbricht; jedes Fragment hat wieder seine eigenen Pole. „CANTON“, schreibt HOPPE (a. a. O., S. 52), „hatte zu seinen Experimenten einen vollständigen Krystall, während alle anderen an geschliffenen Ringsteinen beobachteten, also wenig Elektrizität erhielten.“ Wir werden uns gleich überzeugen, daſs ZALLINGER in diesem Punkte noch weit günstiger als sein englischer Vorgänger gestellt und im Besitze eines viel reichhaltigeren Beobachtungsmateriales war, das er auch gut auszunützen verstand.

2) F. ZALLINGER, *Abhandlung von der Electricität des in Tirol gefundenen Turmalins*, Innsbruck 1779.

3) Ebenda S. 13: „Es ist unlaugbar, daſs der Turmalin bey der Abkühlung an seinen zwoen Grundflächen entgegengesetzte Electricitäten enthält.“

4) Ebenda S. 37 ff.

14*

verlange gewöhnlich von ihm eine Aufklärung über die innersten Ursachen, „denn sonst, sagt man, ist er nichts als ein Geschichtsschreiber der Natur.“ Zallinger scheint sich, obwohl er dies nicht geradezu sagt, in dieser Rolle ganz behaglich zu fühlen. Ihm kommt es nur darauf an, die Gesetze aufzufinden, denen die natürlichen Erscheinungen gehorchen; hat man erst sie ermittelt, so mag man ja wohl noch über den Urgrund der Dinge nachdenken, aber besser ist es durchweg, die eigene Unwissenheit einzugestehen, damit nicht andere in Irrtümer verfallen. Doch sei wohl gewifs, dafs die elektrischen Eigenschaften „mit dem inneren Baue“ des Krystalles zusammenhingen. Auch stehe, weil das Verhalten der beiden Pole niemals ein gleichartiges sei, ganz fest, dafs „die elektrische Materie“ an einem Pole eine „leichtere Bewegung“ — d. h. eine gröfsere Bewegungsfreiheit — als am anderen finde. Ganz befriedigt die Hypothese ihren Begründer nicht; er wünscht, die Versuche mit einem kräftigeren Turmalinkrystalle wiederholen zu können.

Der Appendix enthält „Propositiones ex physica“. Satz 19 handelt von absoluter und relativer Festigkeit („cohaerentia respectiva“). In der Lehre vom Lichte gilt noch die Emanationstheorie, deren Gegnerin, die Vibrationstheorie, der Autor übrigens auch kennt, indem er in Satz 38 sein Glaubensbekenntnis folgendermafsen formuliert: „Lumen non consistit in pressione, aut motu vibratorio aetheris circa corpora lucida diffusi; sed potius in tenuissimo effluvio, praesertim materiae igneae, e corpore lucido jugiter emisso.“ Das Wesen der Körperfarben — Absorption und Reflexion — wird zutreffend angegeben. Als klar denkender Vertreter der neueren, antischolastischen Quellenlehre erscheint der Autor in Satz 54: „Origo fontium ac fluminum a pluviis aliisque aquis ex atmosphaera deciduis repetenda videtur.“ Hinsichtlich des Polarlichtes steht Zallinger natürlich auf dem Boden seines Zeitalters, wogegen sein Abweichen von der Herschelschen Sonnenfleckenhypothese und seine Auffassung der Kometenschweife den selbständigen Denker verraten.[1])

Gleich nach seiner Anstellung in Innsbruck begann Zallinger mit regelmäfsigen Beobachtungen, die er konsequent weiterführte. Zuerst legte er 1784 der Öffentlichkeit seine Resultate vor.[2]) Aufser Luftwärme und Luftdruck wurden auch der Stand des — Branderschen — Hygrometers,

1) Satz 58 und 59: Lux borealis potissimum reflexione luminis solaris vel lunaris in particulis coagulatis, politis, inaequaliter densis, et vento quovis mobilibus facta nascitur. Maculae solares non sunt nisi exhalationes et fuligines ex sole ascendentes; caudae vero cometarum tenuissimi vapores ab eorum capite in propria atmosphaera elevati.“

2) F. Zallinger, *Witterungsbeobachtungen, nebst einigen Höhenmessungen mit dem Barometer,* Innsbruck 1784.

Heiterkeit und Bewölkung des Himmels, Regen und Windrichtung in die Tabellen aufgenommen. Eine Vergleichung des Witterungscharakters von Innsbruck und Bozen lehrt, dafs derselbe an letzterem Orte ein ungleich günstigerer ist — gerade wie heute. „Wetterableiter“ sah man schon in jener frühen Zeit hin und wieder in Tirol, vorzugsweise auf Pulvermagazinen. Von Erdbeben war im XVIII. Jahrhundert innerhalb des Beobachtungsgebietes wenig zu verspüren.

Nunmehr tritt Zallinger an die für die Witterungskunde seines Zeitalters mafsgebendste Frage heran: Inwieweit beeinflufst der Mond das Wetter? Dafs eine derartige Einwirkung, und zwar eine recht kräftige, bestehe, galt als gewifs, denn die Lehren zweier hochgeschätzten italienischen Meteorologen, Toaldo und Chiminello, beherrschten suverän die Geister.[1]) Um so höher müssen wir es Zallinger anrechnen, dafs er sich von jedem Autoritätsglauben freihielt und eine kühle Prüfung seiner Register an die Stelle erhabener Spekulationen setzte. Was er auf Grund der ersteren als seine Überzeugung hinstellt, ist so verständig, dafs auch ein moderner Meteorologe nichts daran auszusetzen finden wird. Der betreffende Satz lautet nämlich: „Allgemein bin ich der Meinung, dafs es zwar zwischen den Barometerhöhen“ — insoweit diese nämlich der Mond bestimmen hilft — „und dem Wetter eine Verbindung gebe, die sich aber wegen der allzu vielen Ursachen, von welchen beide abhängen, niemals auf einen gröfseren Grad der Wahrscheinlichkeit wird bestimmen lassen.“ Alle Regeln Toaldos werden für unhaltbar erklärt. So halte derselbe beispielsweise dafür, dafs bei Annäherung des Mondes an die Erde, weil dann die Anziehungskraft sich stärker bethätige und das atmosphärische Gleichgewicht störe, die Regenhäufigkeit zunehmen müsse. Allein von 735 Regentagen entfielen 345 auf das Perigäum, 390 auf das Apogäum. Auch sei durch Boscovich und Frisi schlagend erhärtet worden, dafs ein mefsbarer Einflufs der Mondattraktion auf unsere Lufthülle nicht angenommen werden dürfe.

Auch der Höhenbestimmung mit dem Barometer schenkte Zallinger

1) Da uns, trotz so vieler schätzbaren Einzelbeiträge, eine zusammenfassende Geschichte der atmosphärischen Physik immer noch fehlt, so ist auch jene hochinteressante, folgenreiche Episode eines letzten kräftigen Auflebens der Astrometeorologie noch nicht in ihrer historischen Bedeutung charakterisiert worden. Zum einen Teile traten jene Italiener für die Hypothese ein, dafs die Witterung in erster Linie von der mit der Entfernung jener Weltkörper wechselnden Anziehung des Mondes und der Sonne auf unsere Lufthülle abhänge; zum anderen Teile huldigten sie dem Irrglauben, dafs nach Umflufs einer bestimmten Zeit („Saros météorologique“) die Witterungsfaktoren sich ganz in der gleichen Reihenfolge und Stärke immer wieder zusammenfinden müfsten. Vgl. des Verf. Schrift: *Der Einflufs der Himmelskörper auf die Witterungsverhältnisse*, Nürnberg 1884.

grofse Aufmerksamkeit. Er teilt[1]) eine gröfsere Anzahl von tirolischen Höhenkoten mit, die vermöge der De Lucschen Höhenformel, also unter Bedachtnahme auf die Temperaturverschiedenheit der unteren und oberen Station, berechnet worden waren. Auch waren damals schon mehrfach Barometerbeobachtungen in Schächten angestellt worden, um deren Tiefe zu ermitteln. Dies zu thun, hatte allerdings schon hundert Jahre vorher der Schotte Sinclair vorgeschlagen[2]), aber Zallingers Vorgänger J. v. Weinhart[3]) ist jedenfalls unter den ersten zu nennen, die in diesem Sinne konsequent vorgingen. Derselbe erhielt für die Sohlentiefen der Schwazer Silbergruben sehr gut mit der Wirklichkeit stimmende Werte, die aber erst durch seinen Nachfolger bekannt gemacht wurden. Von letzterem wäre auch noch zu erwähnen, dafs er L. v. Buch bei seinen damals weit aussehenden Unternehmen, ein barometrisches Nivellement quer von Nord nach Süd durch die Ostalpen zu legen, seine Unterstützung lieh.[4]) Er und U. Schiegg in Salzburg übernahmen die zu diesem Behufe erforderlichen Korrespondenzbeobachtungen.

Auch der zuletzt besprochenen Schrift ist ein Anhang („Materia tentaminis publici ex mathesi applicata") beigegeben, der zumeist katechetisch, in Frageform, abgefafst ist. Einbezogen sind praktische Arithmetik, Mechanik fester Körper, Zivil- und Kriegsbaukunst, Hydrotechnik, praktische Optik, Feldmefskunst, Gnomonik und Astronomie. In Satz 46 ist von M. Hells neuen Methoden die Sprache, Polhöhe und geographiscbe Länge zu bestimmen.

Auch später noch ist Zallinger auf seine Witterungsbeobachtungen zurückgekommen, die natürlich um so wertvoller wurden, einen je längeren Zeitabschnitt sie umfafsten. Im Jahre 1807 lief die dreifsigjährige Reihe ab, und ein Jahr später war die grofse Aufgabe der Sichtung dieses stattlichen Materiales soweit bewältigt, dafs ihr Ergebnis an die Öffentlichkeit treten konnte. Diesmal waren es besonders die thermometrischen und barometrischen Aufzeichnungen, die zur Gewinnung einer Charakteristik des

1) Zallinger, a. a. O. S. 22 ff.

2) Sinclair, *Ars nova et magna gravitatis et levitatis*, Rotterdam 1669, S. 128 ff.

3) Dieser Gelehrte, der den gröfsten Teil seines langen Lebens (1705—1787) als Professor der mathematischen Wissenschaften in Innsbruck zubrachte, ist in der Geschichte der Vermessungskunde namentlich wegen der Stellung, die er zu dem allgemein bekannten Kartographen Peter Anich einnahm (v. Weinhart, *Elogium rustici celeberrimi Petri Anich*, Wien 1766) bekannt. Seiner thatkräftigen Beratung und Mithilfe hatte der geniale Antodidakt bei der Herstellung der ersten diesen Namen verdienenden Karte von Tirol vieles zu verdanken.

4) L. v. Buch, *Über die im Jahre 1798 auf dem Brenner vorgenommenen Höhenmessungen*, (Gehlens) Journal für Chemie, Physik und Mineralogie 9. Band, S 358 ff.; v. Buchs *Gesammelte Schriften*, 2. Band, Berlin 1870, S. 55 ff.

Innsbrucker Klimas verwertet wurden.[1]) Für das Jahr sowohl, wie für dessen einzelne Monate wurde die Mitteltemperatur abgeleitet; als Ablesungstermine waren die Zeiten 4^h a. m. und 2^h p. m. festgehalten, indem zugleich nach Thunlichkeit, so gut es ohne automatische Instrumente geschehen konnte, die Extremtemperaturen aufgesucht wurden. Als Wärmemittel für den Beobachtungsort fand ZALLINGER 7,505° R. = 9,381° C. Es freute ihn, diese Zahl durch eine theoretische Betrachtung kontrollieren zu können. TOBIAS MAYER der Ältere hatte kurz zuvor eine Formel für die Bedingtheit des thermometrischen Jahresmittels t_m durch die Breite φ angegeben[2]), indem er $t_m = 24 \cdot \cos^2 \varphi$ setzte, eine Lage des Ortes am Meeresspiegel vorausgesetzt. Dies liefert für die Polhöhe 47° 16′ $t_m = 11{,}5°$ R. Nun liegt aber Innsbruck 354 Klafter hoch, und da man auf 100 Klafter 1° R. Temperaturabnahme rechnen kann, so ist die wahre Mitteltemperatur gleich 11,05° — 3,54° = 7,51° R.; übereinstimmend mit dem empirischen Werte. Ein so harmonisches Zusammentreffen war freilich nur dem Zufalle zu danken.

Die Barometerhöhe fand sich im langjährigen Mittel gleich 25 Zoll 11,74 Linien. Verglichen mit der Wiener Durchschnittszahl, lehrte die erstere, dafs die Innsbrucker Sternwarte 175,47 Klafter über der Wiener gelegen sei; die Berechnung stützte sich auf eine TREMBLEYsche Formel.[3]) Es lag nahe, auch wieder an der Hand ausgiebiger Daten auf das Problem der lunaren Wetterbeeinflussung zurückzukommen.[4]) Nach TOALDO werden aufs neue „die Ziehkräfte des Mondes und der Sonne“ untersucht, von denen man, falls sie überhaupt wahrnehmbar sind, voraussetzen darf, dafs sie sich ganz in derselben Weise, wie die Gezeiten des Meeres, offenbaren

1) F. ZALLINGER, *Auszug meteorologischer Beobachtungen von dreifsig Jahren in Innsbruck mit einer Anwendung auf das letzte Jahr 1807*, Innsbruck 1808 (Auszug aus dem 4. Bande der Zeitschrift Sammler für Geschichte und Statistik in Tirol). Die Instrumente waren richtig aufgestellt, während für ihre Konstruktion nach unseren Begriffen keine Gewähr hätte übernommen werden können, da sie, wie ausdrücklich bemerkt wird, ganz einfach beim „Barometer-Krämer“ gekauft worden waren.

2) TOB. MAYERI *Opera inedita*, ed. LICHTENBERG, 1. Band, Göttingen 1775. Darin ist als erster Teil die für terrestrische Physik und Ausgleichungsrechnung gleich wichtige Abhandlung enthalten: *De investigandis legibus variationum thermometri ex methodo, qua astronomi ad motuum coelestium inaequalitates cognoscendas utuntur.* Eine analoge Formel besafs man bereits von HALLEY (*On the proportional heat of the sun in all latitudes*; Philosophical Transactions 1693, S. 878 ff.).

3) Hier müssen starke Fehler obwalten. Nehmen wir nämlich, wie es stets geschieht, Wien als in 170 m, Innsbruck als in 579 m Meereshöhe gelegen an, so ist die Höhendifferenz gleich 409 m = 215,7 Klafter, die alte österreichische Klafter gleich 1,8965 m gerechnet.

4) A. a. O. S. 21 ff.

müssen. Allein die mittleren Barometerstände erweisen sich von den Stellungen des Mondes und der Sonne so gut wie ganz unabhängig. Der Neumond entspricht mehr heiteren Tagen als der Vollmond, und das Zusammenfallen einer Syzygie mit der Erdnähe ist ohne jede Bedeutung. „Man kann also mit Grund behaupten, dass der Einfluſs der Ziehkräfte des Mondes und der Sonne auf das Barometer und die Witterung in einiger Rücksicht wahrscheinlich, doch noch zweifelhaft und so klein sei, daſs er leicht von anderen Ursachen könne unmerklich gemacht werden." Der neunjährige Zyklus in den Regenbeobachtungen bestätige sich ebensowenig. Einer schematischen Auffassung der meteorologischen Prozesse tritt Zallinger mit dem Hinweise auf die seinen Aufzeichnungen zu entnehmende Thatsache entgegen, daſs schönes Wetter gelegentlich auch bei tiefem, stürmisches Wetter auch bei hohem Barometerstande eintreten kann. Von Erdbeben waren in den abgelaufenen drei Jahrzehnten neunundzwanzig, von Nordlichtern elf[1]) registriert worden.

Hiermit wenden wir uns der dritten Gruppe wissenschaftlicher Arbeiten unseres Autors zu. Wir besitzen von ihm nur eine einzige Veröffentlichung[2]) geodätisch-kartographischen Charakters, aber diese ist es wohl wert, einer ebenso totalen wie ungerechtfertigten Vergessenheit entrissen zu werden. Es handelt sich um drei nicht direkt zusammenhängende Probleme. Zuerst nämlich soll gezeigt werden, wie auf Grund einer Landesvermessung eine Karte dieses Landes angefertigt werden kann; zum zweiten ist von der Verbesserung älterer Karten die Rede; an dritter Stelle endlich werden gewisse Methoden der Netzentwurfslehre, vor allem die perspektivischen, der Erörterung unterstellt. Es wird also zunächst das Wesen der Basis- und Winkelmessung auseinander gesetzt, indem für die Einzelheiten eine Verweisung auf die Werke von Boscovich, Liesganig, Scherffer und Ammann stattfindet. Das Meſstischchen und die Zollmannsche Winkelscheibe sind, als zu wenig Genauigkeit gewährleistend, zu verwerfen, und unter allen Umständen ist zur Anvisierung der entfernten Fixpunkte das

1) Diese Zahl läſst sich ganz gut vereinharen mit den von H. Fritz (*Das Polarlicht*, Leipzig 1881, S. 11 ff.) gezogenen Isochasmen, den Ortskurven der Erdorte, für welche die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl von Nordlichtern in gegebener Zeit zu sehen, die gleiche ist. Durch Innsbruck geht ungefähr die Isochasme 0,5 hindurch, und nach obiger Zählung läge die Stadt auf der Isochasme 11 : 30 = 0,37.

2) F. Zallinger, *Anmerkungen über die Verbesserungen der partikulären Landkarten*; Abhandlungen einer Privatgesellschaft von Naturforschern und Oekonomen in Oberdeutschland 1, München 1792, S. 36 ff. Dieser erste Band scheint auch der einzige geblieben zu sein; über den Verein selbst, der dieses Organ besaſs, hat sich nichts ermitteln lassen. Herausgeber war der bekannte bayerische Akademiker F. v. Schrank (1747—1835), dem wir weiter unten nochmals begegnen werden.

Fernrohr zu verwenden. Auch von der Bussole, deren Nadel durch Metallmassen beeinflufst werden kann, sieht man besser ab. Dagegen kann zur Einschaltung von Ortslagen in die grofsen Dreiecke die Mensel unbedenklich angewandt werden. Von einer Reihe von Punkten mufs man die geographischen Koordinaten kennen, zu deren Bestimmung die von Hell angegebenen Verfahrungsweisen zu empfehlen sind, während für die Azimutmessung Boscovich und Liesganig sehr brauchbare Regeln angegeben haben. Von letztgenanntem rührt auch eine Näherungsmethode zur Ermittelung der einer gegebenen Polhöhe entsprechenden Länge eines Meridiangrades her, von welcher Zallinger um so lieber Gebrauch macht, weil die Theorie der sphäroidischen Erdgestalt noch nicht so vollkommen begründet sei, um ganz zuverlässige Berechnungen jener Bogenlängen zu ermöglichen. Die Längen der Parallelkreisbogen kann man, so lange es sich um kleine Längendifferenzen handelt, auch ohne sphärische Trigonometrie durch eine einfache Proportion finden. Nachdem man so die Grundlagen für die Karte erhalten, setzt man für dieselbe einen Mafsstab fest und trägt an eine gerade Linie, die den ebenfalls nach Gutdünken anzunehmenden Mittelmeridian repräsentiert, in den berechneten Abständen senkrecht die gleichfalls berechneten Parallelbogen an. Nun tritt freilich eine Schwierigkeit auf: Einerseits sollen sich Meridiane und Parallele möglichst in den der Wirklichkeit angepafsten Verhältnissen schneiden, und andererseits sollen die Schnittwinkel durchweg rechte sein. Zallinger schlägt vor, die Abszissen und Ordinaten einer Anzahl von Punkten zu bestimmen und daraufhin deren Ort auf der Karte festzulegen, worauf man dann die Verbindungslinien als geradlinig gelten lassen könne. Damit wäre dann das Netz der Karte, die natürlich keinen grofsen Teil der Erde umspannen darf, hergestellt, und es bedarf nur noch einer Verständigung über die Gröfse der geographischen Meile, die in der richtigen Reduktionsgröfse am Rande verzeichnet sein soll. Wenn man den Halbmesser R der Erdkugel, die dem Erdellipsoide substituiert werden kann, dadurch bestimmt, dafs man die sphäroidische Erdoberfläche E ausmittelt und $4R^2\pi = E$ setzt[1]), so ist

1) Wie Zallinger dieses E gefunden hat, sagt er hier noch nicht. Er mufs ersichtlich die Komplanation eines Umdrehungsellipsoides durchgeführt haben, was zwar in geschlossener Form möglich, aber immerhin nur durch ziemlich mühsame Rechnungen zu bewerkstelligen ist, insofern es ihm um die Auswertung des Doppelintegrales

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

zu thun ist, wenn

$$b^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 = a^2b^2$$

als die Gleichung des Ellipsoides betrachtet wird (s. u.).

$$1 \text{ Geogr. Meile} = \frac{R\pi}{15 \cdot 180} = 3916,125 \text{ Klafter}$$

zu setzen. Zur Flächenmessung eignet sich die Überdeckung der Karte mit durchscheinendem Papiere; auf ihm zeichnet man die Grenzen nach und summiert die innerhalb derselben gelegenen Kartenrechtecke. Die Anichsche Karte lieferte so für die gefürstete Grafschaft Tirol einen Flächeninhalt von 7355649573 Quadratklaftern.

Die zweite der oben genannten Aufgaben verlangt, dafs man nicht nur angenäherte, sondern möglichst genaue Werte für die Meridian- und Parallelgrade des Erdsphäroides besitze. Hier nun zeigt sich Zallinger mit dem Mechanismus der analytischen Geometrie in einer Weise vertraut, wie es damals wohl noch nicht sehr allgemein war. Den Aquatorialhalbmesser der Meridianellipse $= a$, den Polarhalbmesser $= b$ setzend, während n das Stück der im Punkte A an die Kurve gelegten Normale zwischen A und dem Durchschnitte mit der Ebene des Äquators bedeutet, findet er den Krümmungshalbmesser im Punkte A

$$\varrho_A = \frac{a^2 n^3}{b^4}.$$

Gesetzt, es sei derjenige Meridiangrad, der durch den Äquator halbiert wird, $= G_0$ und derjenige, der durch den Breitenkreis des Punktes A halbiert wird, $= G_A$; da sich mit sehr grofser Annäherung die Gradlängen wie ihre Krümmungsradien in den Mittelpunkten verhalten, so hat man

$$G_0 : G_A = \varrho_0 : \varrho_A.$$

Es ist ferner $\varrho_0 = \frac{b^2}{a}$ und sonach

$$G_A = G_0 \cdot \frac{a^3 n^3}{b^6}.$$

Die Gröfse n läfst sich durch die geographische Breite φ des Mittelpunktes von G_A ausdrücken, und zwar ist

$$n = \frac{b^2}{\cos\varphi \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}};$$

setzt man dies oben ein, so erhält man die Länge des Meridiangrades durch lauter bekannte Gröfsen folgendermafsen dargestellt:

$$G_A = \frac{a^3 G_0}{\cos^{\frac{3}{2}} \varphi \, (a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daraus berechnet sich der zugehörige Parallelgrad als Kreisbogen gleich

$$\frac{a^3 G_0}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}}.$$

Die obige Formel für G_A, so wie sie Zallinger giebt, ist noch etwas

unbehilflich; sie nimmt aber eine elegante Gestalt an, sobald man die Exzentrizität ε der Meridianellipse mittelst der Relation

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

einführt. Dann wird nämlich

$$G_A = \frac{a^2 G_0}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Und dies ist keine andere als die berühmte BOHNENBERGERsche Formel, welche von dem württembergischen Mathematiker[1]) dazu benutzt ward, aus zwei gemessenen Meriadianbogen G_A und G_B mit den Mittelbreiten φ und ψ die Exzentrizität ε herzuleiten, indem durch einfache Umformung

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{G_A^{\frac{2}{3}} - G_B^{\frac{2}{3}}}{G_A^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi - G_B^{\frac{2}{3}} \sin^2 \psi}}$$

gefunden wird. Die Formel BOHNENBERGERS ist hiernach implicite in derjenigen von ZALLINGER enthalten. Und letzterer ist sich auch völlig klar über den wirklichen Sachverhalt. „Wäre die Erde", schreibt er, „eine vollkommene Sphaeroide, und würden die Beobachtungen durch nichts gestört, so könnte man aus jedem Paare von gemessenen Meridiangraden die Achsen bestimmen[2]); allein, wenn man die wirklich ausgemessenen Grade mit einander vergleicht, so findet man fast aus jedem Paare ein etwas verschiedenes Verhältnis der Achsen". Es leuchtet aus diesen Worten bereits ein leiser Zweifel daran hervor, ob wirklich eine endgültige Identität von Geoid und Sphäroid obwalte. Doch glaubt ZALLINGER den Bruch $b : a$, im Einklange mit SCHERFFER und FRISI, sehr approximativ gleich 230 : 231 setzen zu dürfen, was einer Abplattung von $\frac{1}{231}$ gleich käme. In Wahrheit ist bekanntlich die Abweichung der Meridianellipse vom Kreise eine viel geringere.

Nunmehr wird an die Aufgabe der Komplanation, deren wir oben bereits gedachten, herangetreten, und wohl mit Recht durfte der Autor der Meinung[3]) sein, daß vor ihm noch niemand sich an jene herangewagt habe.[4]) Die eine der im Doppelintegrale verbundenen Integrationen erledigt

---

1) BOHNENBERGER, *Astronomie*, Tübingen 1811, S. 187 ff.

2) Richtiger sollte es statt Achsen heißen Achsenverhältnis, wie ja auch aus dem Folgenden unmittelbar hervorgeht.

3) A. a. O. S. 61.

4) In der That scheint nur einmal vor ZALLINGER die Berechnung der Oberfläche eines zweiachsigen Ellipsoides geleistet worden zu sein, nämlich von L. EULER (*De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet*; Novi commentarii Petro-



sich leicht, und es bleibt noch

$$\int \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)\, y^2}\, dy$$

übrig. Dieses Integral findet sich gleich

$$\frac{y}{2}\sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2}} + \frac{b^4}{2(a^2 - b^2)} \log\left(y + \sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2}}\right) + C,$$

und die Konstante ist durch die Erwägung gegeben, dafs für $y = 0$ das ganze Integral sich annullieren mufs. Damit hat sich schliefslich ergeben:

$$E = 2 a \pi \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\right].$$

Der Meridiangrad jener Kugel, die dem Erdsphäroide an Oberfläche gleichkommt, mufs gleich 58742 Wiener Klaftern gesetzt werden, und die geographische Meile bekommt den früher vermerkten Wert.

Gestützt auf diese Resultate konstruiert Zallinger[1]) eine Tabelle, welche für jeden einzelnen Grad folgende Werte zu entnehmen gestattet: die Länge des Meridiangrades auf Sphäroid und Kugel, sowie die Länge eines Parallelgrades auf Sphäroid und Kugel nebst deren Differenz. Zallinger dürfte als einer der ersten — wo nicht als der erste — anzusehen sein, die uns Berechnungstafeln von der Einrichtung an die Hand gaben, wie sie nachmals durch H. Wagner und Hartl so erheblich vervollkommnet wurden. Wie man Interpolationen vornehmen und konkrete Aufgaben lösen könne, wird an mehreren Beispielen gezeigt. Auch die Frage, ob man bei der gewöhnlichen Kartometrie der sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen verpflichtet sei, wird gestreift. Bei einem einigermafsen grofsen Kartenmafsstabe ist dies natürlich der Fall, wie dies durch die Betrachtung der Karte von Tirol unter verschiedenen Gröfsenverhältnissen erläutert werden kann.

Damit ist auch der zweite Teil von Zallingers Abhandlung genugsam besprochen, und es hat jetzt der dritte an die Reihe zu kommen. Es wird gleich die sehr allgemeine Forderung gestellt: Für eine ellipsoidische Erde die Gesetze der äquatorialen und polaren stereographischen Projektion aufzustellen.[2]) Durch Spezialisierung gelangt man zu den ana-

politani **16**, 1772). Dafs Eulers Arbeiten noch nicht in die vom litterarischen Verkehre, nach des Autors eigener Angabe, nur wenig berührte Provinzuniversität gedrungen waren, wird nicht überraschen können. Kästners Studie, in der erwähnt wird, dafs auch schon Huygens sich mit dem Probleme beschäftigt habe (*Fläche eines elliptischen Sphäroids*, *Weitere Ausführung der mathematischen Geographie*, Göttingen 1795, S. 97 ff.), war damals noch nicht erschienen.

1) A. a. O. S. 64 ff.

2) A. a. O. S. 74 ff.

logen Ausdrücken für die kugelförmige Erde. Eigentlich Neues konnte hier nicht wohl gebracht werden, da u. a. KÄSTNER[1]) und RICHMANN[2]) die einschlägige Theorie sehr gründlich entwickelt hatten. Auf die stereographische folgt die zentrale Projektion, die man jetzt auch als die gnomonische bezeichnet[3]); doch wird hier nur die Kugelfläche ins Auge gefaſst. Die orthographische, zu der nächstdem übergegangen wird, behandelt dagegen unser Schriftsteller wiederum ganz allgemein, indem er zeigt, daſs sich Meridiane und Breitenkreise des Rotationsellipsoides durchweg, soweit sie nicht Kreise oder Gerade werden, in Ellipsen verwandeln.

Den Schluſs des Ganzen bildet ein kurzer Hinweis auf die Natur der flächentreuen Abbildungen[4]), wobei LAMBERTS grundlegende Arbeit[5]) zur Richtschnur genommen wird, obwohl ZALLINGER seine Zylinderprojektion[6]) wenigstens für Länder unter niedrigen Breiten vorzieht. Endlich beschreibt er noch ein ihm eigenes Verfahren[7]), „die halbe Erdfläche so auf der Karte vorzustellen, daſs in den Meridian- und Parallelstücken ein sehr kleiner Fehler begangen werde“. Die Parallelkreise erscheinen als konzentrische Kreisbogen von der gemeinsamen Gröſse 229°; der Mittelmeridian ist gerade, und die übrigen Meridiane sind gekrümmte Linien, welche dem ersteren, je nachdem ihre Länge östlich oder westlich ist, ihre konkave Seite symmetrisch zuwenden. Geradlinig sind die beiden den erhabenen Kreisausschnitt begrenzenden Meridiane, in welche die um 180° vom Mittelmeridiane abstehende Meridianhälfte auseinanderfällt. Ein Versuch, die Meridiane auf eine Gleichung zurückzuführen, ist nicht gemacht worden.

Der dritten Kategorie ZALLINGERscher Arbeiten gehört, wie wir ein-

1) KAESTNER, *Theoria projectionis stereographicae horizontalis*; Dissertationes mathematicae et physicae, Altenburg 1771, 12. Abteilung.

2) RICHMANN, *De perficiendis mappis geographicis, inprimis universalibus, per idoneas scalas metiendis distantiis inservientes*; Commentarii Petropolitani 13, 1751.

3) Einer früheren Bearbeitung der Lehre von der gnomonischen Abbildung (Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 18, S. 137 ff.) möge hier der nachträgliche Zusatz folgen, daſs auch KAESTNER (*Theoria projectionis superficiei sphaericae in planum tangens oculo in centro posito*; Acta academiae Moguntiacae, 1776) und SCHEFFER (*Abhandlung über die geographische und orthographische Projektion einer bei den Polen zusammengedrückten Ellipsoide*, Leipzig 1778) diese Manier ziemlich eingehend abgehandelt haben.

4) ZALLINGER, a. a. O. S. 89 ff.

5) LAMBERT, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, 3. Band, Berlin 1770.

6) Die Meridiane stehen, als gleichabständige Gerade, auf den gleichfalls geradlinigen Parallelen senkrecht. Die Abstände zweier Parallelen wachsen dagegen proportional zum Sinus der Breite.

7) ZALLINGER, a. a. O. S. 93 ff.

gangs festsetzten, die Mechanik an, und zwar kommt ebenso die Prinzipienlehre, wie auch die Hydraulik zu ihrem Rechte. Die Schrift[1]), welche sich mit der ersteren beschäftigt, trägt ein entschieden didaktisches Gepräge. In der Vorrede wird Klage darüber geführt, dafs im herkömmlichen physikalischen Lehrkurse so gar wenig Zeit auf die grundlegende Wissenschaft verwendet werden könne; auch liest man zwischen den Zeilen, dafs dem exakt denkenden Manne die Verquickung der Naturlehre mit der Schulphilosophie unbequem war. Er habe, sagt er, durchweg die metaphysischen Begriffe durch physikalische ersetzt und eine geeignete Formelsprache eingeführt. „Et hoc quidem artificio problemata plurima mechanicae longe expeditius, elegantius, distinctius solvuntur.“ Mit La Caille[2]) halte er eine tiefergehende Behandlung der Mechanik ohne Infinitesimalrechnung für ganz unthunlich, womit natürlich nicht ausgeschlossen sei, dafs doch auch der Anfänger in den wenigen verfügbaren Stunden sich nützliche Kenntnisse aneigne. Dafs die mechanischen Grundlehren noch keiner ganz allgemeinen Anwendung in der Natur fähig seien, müsse zugestanden werden, weil man eben zunächst die den Thatsachen zu Grunde liegenden Gesetzmäfsigkeiten aufgedeckt haben müsse; die molekularen Kraftäufserungen, wie sie bei der Kohäsion und beim chemischen Verhalten der Körper vorlägen, befänden sich noch nicht in diesem Falle. Wären aber einmal diese Sätze bekannt, so werde auch der Unterstellung jener Kräfte unter die rationelle Mechanik nichts mehr entgegenstehen.

Alle Druck- und Stofskräfte gestatten die Zurückführung auf die Schwerkraft.[3]) Diese letztere wird deswegen zur Norm genommen, aber trotzdem werden die Bewegungsgleichungen auch für ein allgemeineres Attraktionsgesetz $m\mu : r^n$ (m und μ Massenpunkte, r deren Entfernung, n eine beliebige ganze Zahl) abgeleitet. Beispielshalber wird nach Newton der Weg bestimmt, den der Mond, von der Schwungkraft befreit, in einer Sekunde gegen die Erde zurücklegen würde. Auch wird der Luftwiderstand sowohl beim freien Falle, wie auch beim lotrechten Wurfe berücksichtigt. Anläfslich der Zentralbewegung berechnet Zallinger Werte für die Krümmungsradien der drei Kegelschnitte (s. o.) Sodann verbreitet er sich über menschliche und tierische Kräfte, über Flüssigkeitsbewegung und über die Reibung. Indem er zum Schlufs alle Maschinen als Hebelverbindungen auffafst[4]), entwickelt er die Beziehungen zwischen Weg und

1) Zallinger, *De generali et absoluta virium mechanicarum mensura dissertatio*, Innsbruck 1777.

2) La Caille, *Leçons de mécanique* (1. Auflage Paris 1743).

3) Zallinger, a. a. O. S. 14 ff. „Et igitur in casu particulari res devolvitur, ut ratio datae vis ad gravitatem terrestrem rite determinetur.“

4) Zallinger, a. a. O. S. 75 ff. Im Gegensatze zu Varignon, der — sowie es

Zeit und kennzeichnet die mechanische Arbeit in ganz zutreffendem Sinne, wobei er auf EULERS[1]) Theorie der einfachen Maschinen bedacht nimmt. Der ganze Tenor der Darstellung zeigt, daſs sich der Autor sehr gründlich in die durch GALILEI begründete Reform der Statik und Dynamik eingelebt hat und zumal auch der Erkenntnis des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit gar nicht ferne stand.

Nur kurz sei hingewiesen auf eine Studie zur Dynamik[2]), welche uns wesentlich nur beweist, daſs gerade auch die EULERschen Arbeiten ihm nicht fremd geblieben waren. Über die theoretische Maschinenlehre verbreitet sich noch eine weitere Universitätsschrift[3]) welche teilweise die in der vorgenannten (s. o.) niedergelegten Gedanken weiter ausführt. Sie beginnt mit einer Einleitung in die Festigkeitslehre, die hauptsächlich an GALILEI und MUSSCHENBROEK anknüpft, behandelt sodann mit Litteraturangaben — DE LA HIRE, LEIBNIZ, BELIDOR, AMONTONS, BOSSUT — die Reibung und die Steifheit der Seile und geht sehr gründlich auf die Messung der tierischen Kräfte ein. Daran schlieſst sich die Lehre von den einfachen Maschinen, die manch neues oder doch wenig bekanntes enthält, wie etwa die Beschreibung einer Vorrichtung zum Ausheben der Bäume mit den Wurzeln, welche ein Berner Bauer PETER SOMER erfunden haben soll. Das Ganze darf als ein sehr brauchbarer Abriſs der gesamten Maschinenkunde gelten, in der ZALLINGER offenbar ganz besonders zu Hause war, und deren Litteratur er höchst vollständig beherrschte.

So war er denn auch ganz dazu berufen, den Betrieb von Bewegungsmechanismen durch das strömende Wasser wissenschaftlich zu prüfen. In seiner Abhandlung über die Wasserräder[4]) betont er, daſs die Praxis sich mit den Lehren, welche BELIDOR und v. LANGSDORF vortrugen, gar nicht vertragen wolle.[5]) Daraufhin werden die Stoſsmomente für senk-

heutzutage wieder mit Vorliebe gemacht wird — vom Parallelogramme der Kräfte ausgegangen war, stellte CHR. WOLF den Hebel an die Spitze der Lehre von Gleichgewicht und Bewegung, und ihm schloſs sich die Mehrzahl der Fachmänner des XVIII. Jahrhunderts an. Ein besonderes Verdienst WOLFS erblickt in diesem seinen Vorgehen KAESTNER (*Anfangsgründe der angewandten Mathematik*, Göttingen 1780, S. 4 der Vorrede).

1) L. EULER, *De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso*; Comment. acad. Petrop. 10, 1747.

2) ZALLINGER, *Von der krummlinichten Bewegung der Körper*; Neue Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften 3, 1783.

3) ZALLINGER, *De aestimanda perfectione machinarum ad mechanicam solidorum pertinentium dissertatio*, Innsbruck 1780.

4) ZALLINGER, *Von der Anzahl der Schaufeln bei unterschlächtigen Rädern*; SCHRANKS Sammlung naturhistorischer und physikalischer Aufsätze, Nürnberg 1786, S. 415 ff.

5) Gemeint sind die folgenden Werke: BELIDOR, *Architecture hydraulique*, Paris

rechten und schiefen Wasserstofs berechnet, um so diejenige Anzahl von Schaufeln, welche ein Optimnm des Nutzeffektes gewährleiste, ansfindig zu machen. Doch sieht auch Zallinger sich zuletzt genötigt, einzuränmen, dafs die mathematische Betrachtnng für sich allein nnvermögend sei, eine Entscheidung zu bringen.

Eine zweite Abhandlnng[1]) über verwandte Dinge ist wegen einer Exkursion beachtenswert, die ihr Verfasser, wie schon zum öfteren, auf das Gebiet der abstrakten Mechanik unternimmt. Er ist nämlich, als ihm das Projekt eines neuen Bewässerungsrades vorgelegt worden war, zur Stellung der Frage veranlafst: Wie kommt es, dafs sehr häufig das Modell einer Maschine trefflich fnnktioniert, während letztere versagt, wenn man sie in den richtigen Dimensionen ausführt? „Die Modelle der Maschinen", so lautet die zntreffende Antwort, „verschaffen uns ohne Zweifel den Vorzng, dafs wir in denselben ihre Einrichtung viel deutlicher einsehen und anch einige Versnche im Kleinen damit anstellen mögen; doch würde man sich damit nicht selten in seiner Hoffnung betrügen, wenn man bei der Maschine die Ähnlichkeit aller Teile beibehielte und sich auch ähnliche Wirkungen verspräche". Nun wachse aber die Wasserkraft quadratisch, der Widerstand kubisch, und damit sei die Möglichkeit, aus dem Kleinen ohne weiteres auf das Grofse zu schliefsen, ganz von selbst negiert, denn die Maschine erfordere eine Geschwindigkeit des strömenden Wassers, wie sie kein „freier" Flufs darbieten könne. Wie man sieht, ist Zallinger damit dem Begriffe der geometrischen Ähnlichkeit der Bewegungen sehr nahe gekommen, wie ihn achtzig Jahre später Helmholtz[2]) formuliert und bei der Erklärung des Vielen unerwartet gekommenen Umstandes verwertet hat, dafs die Aëronantik als solche nichts dabei gewinnt, wenn man tadellos arbeitende Mechanismen im kleinsten Mafsstabe ausführt. Diese Erkenntnis war also schon gegen Ende des XVIII. Jahrhunderts angebahnt, freilich nur bei Einzelnen. Zallinger behandelt übrigens in diesem inhaltreichen Essay auch sonst noch manche interessante Aufgabe,

1737—1751; K. C. v. Langsdorf, *Lehrbuch der Hydraulik, mit beständiger Rücksicht auf die Erfahrung*, Altenburg 1794. Dafs gerade in der sehr schwierigen Theorie des Wasserstofses die Ausführungen v. Langsdorfs nicht genügen können, hatte ganz um dieselbe Zeit auch ein anderer deutscher Gelehrter mit grofser Entschiedenheit in der Recension hervorgehoben, welche er dem fraglichen Lehrbnche widmete (Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 6. Heft, S. 230 ff.).

1) Zallinger, *Beurteilung eines neuen Wasserschöpfrades*; Schranks Sammlnng (s. o.) S. 441 ff.

2) Helmholtz, *Ein Theorem über geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper*; Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1873, S. 501 ff.

u. a. diese[1]): „Den Fall eines Körpers über eine schiefe Ebene zu bestimmen, deren Neigungswinkel indessen immer gleichmäfsig zunimmt."

ZALLINGERS Arbeiten über Strombau und Stromregulierung sollen, als für die physische Geographie höchst bemerkenswert, an anderer Stelle zur Besprechung gelangen. Auch hier zeigt er sich nicht minder als Mann von selbständiger Denkart und weifs, unbeeinflufst von Vorgängern, neuen Auffassungen Geltung zu verschaffen, wie dies insonderheit die oben berührte Untersuchung über die Überschwemmungen darthut.

1) ZALLINGER, a. a. O. S. 451 ff.

Wie soll ein Mathematiker-Kalender zweckmäfsig bearbeitet werden?

Von G. Eneström in Stockholm.

Anläfslich des geplanten Mathematiker-Kongresses in Zürich wurde ich 1897 von dem Organisationskomité des Kongresses aufgefordert, demselben einige Fragen zu bezeichnen, die meiner Ansicht nach geeignet wären am Kongresse behandelt zu werden, und in meiner Antwort gab ich als solche an auch die womöglich jährliche Herausgabe eines Adrefsbuches aller Mathematiker der Erde mit Angabe ihrer speziellen Fachrichtung. Herr F. Rudio war dann so freundlich, diesen Vorschlag in seinem Vortrage *Über die Aufgaben und die Organisation internationaler mathematischer Kongresse* zu erwähnen[1]), und dadurch scheint Herr C. A. Laisant angeregt worden zu sein, ein Annuaire des mathématiciens in Angriff zu nehmen, dessen erster Jahrgang kürzlich erschienen ist.[2])

Wenn man eine litterarische Arbeit beurteilen will, kann man sich darauf beschränken, ganz einfach zu fragen: „Ist die Arbeit nützlich?“, und die Antwort auf diese Frage als Urteil gelten zu lassen. Thut man dies, so wird das Urteil gewifs dahin ausfallen, dafs der erste Jahrgang des Annuaire des mathématiciens eine nützliche Arbeit ist. Seine Hauptabteilung enthält nämlich etwa 6000 Namen und Adressen von Personen, die laut dem Titel des Buches Mathematiker sein sollen, und zum Teil wirklich Mathematiker sind. Die Adressen sind ohne Zweifel in den meisten Fällen richtig[3]); zwar kann man durch Zuhilfenahme der von verschiedenen Mathematiker-Vereinigungen veröffentlichten Mitglieder-Ver-

1) Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich 1897, herausg. von F. Rudio (Leipzig 1898), S. 34.

2) Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et A. Buhl (Paris, Naud 1902), Préface, S. I.

3) Dafs Seite 36, Zeile 24 „Paris (France)“ statt „Bruxelles (Belgique)“ steht, ist natürlich nur ein Schreibfehler.

zeichnisse oft eine erwünschte Adresse ermitteln, aber dieses Verfahren ist natürlich zuweilen zeitraubend, und dazu kommt noch, dafs das Annuaire die Adressen einer gewissen Anzahl von wirklichen Mathematikern erwähnt, die in den genannten Verzeichnissen fehlen.

Aber meiner Ansicht nach ist es nicht genug, dafs eine Arbeit, die dem gelehrten Publikum geboten wird, als nützlich bezeichnet werden kann, und mit voller Absicht habe ich in den Titel dieses Artikels die Worte „zweckmäfsig bearbeitet" gesetzt, die für mich etwas ganz anderes als nur „nützlich" bedeuten. In der That habe ich das vorangehende Urteil über das Annuaire hier ausgesprochen, um diesen Umstand schon von Anfang an besonders kräftig hervorzuheben, denn wenn die Begriffe „nützlich" und „zweckmäfsig bearbeitet" identisch wären, so würde ja die Frage in der Überschrift unmittelbar durch eine Verweisung auf das Annuaire erledigt und damit der ganze Artikel überflüssig sein.

Im Vorworte des Annuaire macht Herr Laisant auf einige Hauptfragen aufmerksam, die bei der Herstellung eines Mathematiker-Verzeichnisses zu berücksichtigen sind, und die erste unter diesen ist natürlich: Welche Personen sind hier als Mathematiker aufzuführen?

Auf diese Frage giebt Herr Laisant folgende Antwort[1]):

1° Les membres de toutes les sociétés mathématiques ou, dans les sociétés scientifiques d'ordre général, ceux qui en font partie comme représentant la science mathématique;

2° Les auteurs ayant publié dans un Recueil ou sous forme d'ouvrages, des travaux mathématiques originaux, et non pas de simples solutions d'élèves;

3° Les personnes qui, par leurs fonctions, sont appelées à enseigner *spécialement* la science mathématique ou l'une de ses branches, quel que soit le degré de l'enseignement.

Herr Laisant will also drei Gruppen berücksichtigen, und in Bezug auf die zweite Gruppe bin ich mit ihm wesentlich einverstanden. Meines Erachtens mufs es nämlich der Hauptzweck eines Adrefsbuches der Mathematiker sein, den Forschern auf dem mathematischen Gebiete zu ermöglichen, sich mit einander in Verbindung zu setzen, und in unseren Tagen giebt es wohl wenige Forscher, die nicht litterarisch thätig sind. Dagegen scheint es mir nicht an sich klar, dafs das Verzeichnis auch solche Personen umfassen soll, die vor längerer Zeit eine einzige mathematische Abhandlung veröffentlicht haben. Auf Grund dessen, was ich soeben bemerkt habe, stelle ich also den folgenden Satz auf:

1) Annuaire des mathématiciens 1901—1902, Préface, S. IV.

Ein Mathematiker-Kalender soll in erster Linie die Namen und die Adressen der Mathematiker bringen, die in ihrem Fache litterarisch thätig sind.

Herr Laisant hat besonders betont, dafs solche Personen, die *nur* Lösungen von einfachen Aufgaben veröffentlicht haben, ausgeschlossen werden sollen, und dagegen habe ich nichts einzuwenden; indessen könnte man wohl ausnahmsweise solche mitnehmen, die eine sehr umfassende Wirksamkeit auf diesem Gebiete entwickelt haben.

Die dritte von Herrn Laisant erwähnte Gruppe umfafst Lehrer, deren Spezialfach Mathematik ist. Hier bin ich mit ihm einig, sofern es sich um Universitätslehrer handelt, denn wenn auch ein solcher nicht mehr als Verfasser auftritt, so soll er ohne Zweifel im Verzeichnisse aufgenommen werden. Dagegen scheint es mir unnötig und unnütz, alle Schullehrer, die sich speziell mit mathematischem Unterricht beschäftigen, zu verzeichnen. Es giebt ja eine grofse Menge von Gymnasiallehrern, die möglicherweise einmal eine mathematische Doktordissertation veröffentlicht haben, aber sonst der wissenschaftlichen Forschung fremd sind, und weder sie selbst, noch ihre Fachgenossen haben irgend einen Nutzen davon, ihre Namen und Adressen im Verzeichnisse zu finden. Auf der anderen Seite giebt es gewifs eine grofse Anzahl von Schullehrern, deren Namen nicht fehlen dürfen, nämlich die, welche noch in ihrem Fache litterarisch thätig sind; aber diese sind schon in der vorigen Gruppe enthalten.

Aufser diesen zwei Gruppen giebt Herr Laisant noch eine dritte an, die er sogar in erste Linie stellt, nämlich Mitglieder der mathematischen Vereinigungen oder der mathematischen Klassen allgemeiner wissenschaftlicher Gesellschaften. Diese Gruppe aber möchte ich fast vollständig streichen. Haben die Vereinigungen einen wissenschaftlichen Charakter, so sind wohl ihre Mitglieder fast ohne Ausnahme entweder Universitätslehrer oder Verfasser von mathematischen Arbeiten, und dasselbe dürfte ebensosehr von den Mitgliedern der mathematischen Klassen wissenschaftlicher Gesellschaften gelten; handelt es sich dagegen um Vereinigungen von Studenten, so liegt meiner Ansicht nach kein Grund vor, die Mitglieder derselben in das Verzeichnis aufzunehmen.

Eigentlich würde ich jetzt mit dem Laisantschen Vorschlag zur Begrenzung des Mathematiker-Verzeichnisses fertig sein, und wenn dies der Fall wäre, könnte ich mich wohl im Grofsen und Ganzen mit ihm einverstanden erklären. Aber Herr Laisant hat als Note zu seinem ersten Absatze eine Bemerkung hinzugefügt, die praktisch genommen so wesentlich ist, dafs die Begrenzung, um die es sich bisher gehandelt hat, fast als eine Nebensache erscheint. Diese Note lautet folgender-

mafsen[1]): „Il nous a semblé aussi qu'il y avait lieu de comprendre l'astronomie dans les sciences mathématiques, au point de vue dont il s'agit.“ Da diese Note, wie gesagt, typographisch zum ersten Absatze gehört, könnte man versucht sein, die ziemlich dunklen Schlufsworte so zu deuten, dafs Astronomen in Betracht kommen sollen, sofern sie Mitglieder der astronomischen Vereinigungen oder der astronomischen Klassen wissenschaftlicher Gesellschaften sind, und das Verzeichnis des Annuaire widerspricht nicht einer solchen Deutung.[2]) In jedem Falle mufs ich aber *bestimmt* von dieser Erweiterung des Kreises von Personen, die in einem Mathematiker-Verzeichnisse zu berücksichtigen sind, Abstand nehmen. Durch eine solche Erweiterung würde man nämlich mit der Redaktion des Annuaire genötigt sein, unter die Mathematiker Hunderte von Personen einzubegreifen, die sich sicherlich gar nicht mit der Mathematik beschäftigt haben, und die wohl auch kein Recht haben Astronomen genannt zu werden, obgleich sie Mitglieder der „Société astronomique de France“ sind. Ich habe keine genauere Zählung der im Annuaire verzeichneten Mitglieder dieser Gesellschaft vorgenommen, aber ich bin geneigt anzunehmen, dafs sie fast ebenso zahlreich sind wie alle Übrigen zusammen, und unter solchen Umständen wird ja in jedem Falle der Titel: „Annuaire des *mathématiciens*“ irreleitend.

Man könnte möglicherweise einwenden, teils dafs ein Adrefsbuch um so nützlicher wird, je mehr Namen es enthält, teils dafs man auf diese Weise die Aussicht hat, eine viel gröfsere Anzahl von Käufern zu bekommen, wodurch der Preis des Buches wesentlich ermäfsigt werden kann. Diese Einwendung ist ja nicht ganz und gar unbegründet, aber auf der anderen Seite mufs ich bestimmt festhalten, dafs das Verfahren der Redaktion des Annuaire meines Erachtens wesentliche Übelstände mit sich führt. Um ein *gutes* Adrefsbuch herstellen zu können, genügt es nämlich nicht, eine Menge von Fragezetteln auszusenden und die Antworten in bestimmter Ordnungsfolge drucken zu lassen, sondern es ist auch nötig, eine gewisse Personenkenntnis zu besitzen, sodafs man das vorhandene Material kritisch behandeln kann, und je umfassender das Gebiet ist, dem die Personen angehören, um so schwieriger wird es, Redakteure mit dieser Art von Sachkunde zu bekommen. Welche Ungenauigkeiten aber durch fehlende Sachkunde verursacht werden können, davon giebt eben das

1) Annuaire des mathématiciens 1901—1902, Préface, S. IV.

2) So findet sich z. B. S. 328 ein hervorragender schwedischer Dramaturg und Romanverfasser, der sich als Dilettant mit der Astronomie beschäftigt hat und darum Mitglied der „Société mathématique de France“ geworden ist, während die ordentlichen Professoren der Astronomie an den zwei schwedischen Staatsuniversitäten (in Upsala und Lund) im Annuaire fehlen.

Annuaire genügende Auskunft; so z. B. findet man dort ziemlich bekannte Mathematiker verzeichnet, die schon vor dem Anfange des Jahres 1901 (das **Annuaire** erschien Anfang März 1902) gestorben sind[1]), in einigen Fällen ist der Vorname als Familienname aufgefafst worden[2]), für viele Mathematiker, deren jetzige Adressen sehr leicht ermittelt werden können, sind nur ihre Wohnorte am Ende 1900 angegeben, u. s. w.[3]) In diesem Zusammenhange erlaube ich mir zu bemerken, dafs ein Mathematiker-Kalender auch dazu benutzt werden kann, eine Übersicht der Forscher auf dem mathematischen Gebiete zu geben, und eine solche Übersicht wird natürlich erschwert, wenn die wirklichen Mathematiker nur $^1/_2$ oder sogar nur $^1/_3$ der verzeichneten Personen betragen.

Aber die Art, in der die Redaktion des **Annuaire** das Verzeichnis erweitert hat, bringt noch einen anderen Übelstand mit sich. Wenn nämlich ein Buch, das sich ein „Annuaire des *mathématiciens*“ nennt, eine Anzahl von Personen aufnimmt, die sich gar nicht mit der Mathematik, und überhaupt nicht mit wissenschaftlichen Studien beschäftigt haben, so gewährt es diesen Personen den Anschein Gelehrte zu sein, und bekanntlich giebt es Menschen, die sehr gern sehen, dafs sie als Gelehrte betrachtet werden, obgleich (oder vielleicht *weil*) sie kein Recht dazu haben. Solche Personen werden gewifs mit Vergnügen ein Exemplar des Verzeichnisses kaufen, nur um ihren Bekannten zeigen zu können, dafs sie unter die Gelehrten gerechnet werden, und durch diesen Umstand kann ein rühriger Verleger leicht versucht werden, sich der menschlichen Eitel-

---

1) Schon am 15. Dezember 1899 starb K. Bobek (S. 32); im Jahre 1900 sind gestorben O. Böklen (S. 33), F. Bucca (S. 44), E. B. Christoffel (S. 62), Th. Craig (S. 71; auch in der Abteilung „Nécrologie“ genannt!), H. Schaeffer (S. 305) und K. Zelbr (S. 372). — Vor dem Ende des Jahres 1901 sind gestorben A. Berger (9. Juni 1901), F. Caspary (17. Juli 1901; auch in der Abteilung „Nécrologie“ genannt!), R. Doergens (4. Februar 1901), P. Pokrowsky (14. Februar 1901), O. Schlömilch (7. Februar 1901), F. Schmidt (7. März 1901), W. Schur (1. Juli 1901), und es wäre wohl nicht unmöglich gewesen, einige derselben zu streichen, wenn die Redaktion rechtzeitig von ihrem Tode Kenntnis gehabt hätte.

2) Dies ist der Fall z. B. S. 23 („Bellino“), 69 („Corrado“), 94 („Eduardo“), 186 („Lauro“), 218 („Matteo“), 301 Zeile 34 („Salvatore“), etc.

3) Dafs zuweilen eine und dieselbe Person an zwei verschiedenen Stellen vorkommt (vgl. S. 78 und 104, sowie S. 198 und 273), beruht ohne Zweifel nur auf einem kleinen Übersehen; wenn dagegen, wie es S. 43, 216 und 336 der Fall ist (an letzterer Stelle mufs wohl Z. 19 „Thomas“ als Druckfehler betrachtet werden), derselbe Name wiederholt ist, mufs wohl ein Sachkundiger leicht ermitteln können, dafs auch dieselbe Person gemeint ist. — Ebenso kann es ja unter allen Umständen leicht eintreffen, dafs gewisse Namen verdruckt werden, aber Fehler wie Cantir“ (S. 51), („Hüll“) (S. 140), „Winnan“ (S. 365) deuten vielleicht an, dafs die Redaktion keine umfassendere Personenkenntnis besitzt.

keit in der Weise geschäftlich zu bedienen, dafs er im Verzeichnisse eine möglichst grofse Anzahl von Nicht-Mathematikern aufnimmt. Aber solche Konsequenzen müssen vermieden werden, und Eitelkeit haben wir ja schon genug unter den wirklichen Mathematikern.

Nachdem nun festgestellt ist, welche Gruppen von Personen in einen Mathematiker-Kalender aufzunehmen sind, wird die nächste Frage sein: Welche Angaben sollen für jede Person mitgeteilt werden? Dafs hierbei Familienname, Vorname[1]), Beruf und Adresse in Betracht kommen sollen, ist an sich klar; hinsichtlich des Übrigen hat Herr LAISANT in seiner schon zitierten Vorrede bemerkt, dafs es nötig ist, sich auf das Wichtigste und besonders auf das Nützlichste zu beschränken.[2]) Diesem Grundsatze mufs gewifs Jedermann beipflichten, aber die Schwierigkeit ist natürlich zu bestimmen, was hier das Wichtigste und das Nützlichste ist. Im Annuaire kommen, so viel ich sehen kann, nebst dem Namen, dem Berufe und der Adresse, eigentlich nur zwei Arten von Angaben vor, nämlich: 1) „docteur en philosophie" (oder ein äquivalenter Titel), 2) Namen von Gesellschaften, deren Mitglied die betreffende Person ist, aber weder das eine noch das andere kann ich als wichtig anerkennen. Im Gegenteil scheinen mir die Angaben der ersten Art in Bezug auf die Universitätsprofessoren die unnötigsten, die man überhaupt ersinnen kann, da es nur ausnahmsweise vorkommt, dafs ein solcher Professor nicht entweder „docteur en philosophie" oder „ingénieur" ist; noch wertloser wird natürlich die Angabe, wenn man, wie das Annuaire thut, inkonsequent verfährt, sodafs wohl kaum die Hälfte der Professoren, die Doktoren sind, als solche angegeben werden. Nur in den sehr seltenen Fällen, dafs ein Mathematiker keinen gelehrten Beruf hat, ist das Hinzufügen der fraglichen Titel zu billigen.

Auch in Bezug auf die Angaben zweiter Art bin ich der Meinung, dafs das Verfahren der Redaktion des Annuaire nur sehr geringes Interesse bietet, und zwar sowohl an sich, als weil die Redaktion ohne jede Konsequenz zu Wege gegangen ist. Dafs ein Mathematiker Mitglied einer geschlossenen wissenschaftlichen Gesellschaft geworden ist, beruht bekannt-

1) Leider giebt es viele französische Mathematiker, deren Vornamen fast unmöglich zu ermitteln sind, da sie immer als Verfasser *nur* Familienname mit vorangehendem M. [= Monsieur] angeben, und in vielen Fällen vermag auch das Annuaire hierüber keine Auskunft zu geben. — Ich benutze diese Gelegenheit, um darauf aufmerksam zu machen, dafs es sehr nützlich wäre, wenn die Schriftführer der verschiedenen Mathematiker-Vereinigungen in die Mitglieder-Verzeichnisse auch Geburtsjahre einführen wollten. Eine solche Anordnung hat schon seit vielen Jahren der „Circolo matematico di Palermo" getroffen.

2) Annuaire des mathématiciens 1901—1902, Préface, S. V.

lich in sehr vielen Fällen auf persönlichen Beziehungen (zuweilen kommt es vor, dafs ein Mathematiker besondere Mafsregeln ergreift, um Mitglied der möglichst gröfsten Anzahl von Akademien zu werden), und ob ein Professor der Mathematik Mitglied z. B. der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung" ist oder nicht, hat ja gar keine Bedeutung. Da hierzu noch kommt, dafs die Redaktion offenbar keine Möglichkeit gehabt hat, die ihr zugegangenen Mitteilungen im Bedarfsfalle wesentlich zu ergänzen, so versteht man leicht, dafs die Angaben ohne Konsequenz[1]) eingefügt worden sind, und darum noch wertloser werden.

Aus dem Anfange dieses Artikels geht hervor, dafs ich bei jedem Namen womöglich das Hinzufügen einer Angabe der speziellen Fachrichtung empfehlen möchte. In einer gewissen Anzahl von Fällen wird es ohne Zweifel schwierig sein, eine bestimmte Fachrichtung anzugeben, aber im allgemeinen dürfte es verhältnismäfsig leicht sein, und gewifs wäre es nützlich, wenn ein Forscher auf diese Weise imstande sein könnte, seine Fachgenossen im beschränktesten Sinne kennen zu lernen. Eine andere sehr erwünschte Angabe ist meiner Ansicht nach das Geburtsjahr, denn wenn es auch ziemlich unwesentlich ist, ob man genau das Geburtsjahr eines Fachgenossen kennt oder nicht, so kann es doch zuweilen von grofsem Interesse sein zu wissen, ob er z. B. 25 oder 65 Jahre alt ist.

Selbstverständlich giebt es noch viele andere Angaben, die nützlich sein könnten, da es aber meines Erachtens sehr wichtig ist, dafs ein Mathematiker-Kalender bequem zu handhaben und dazu wohlfeil ist, so möchte ich dem Verzeichnisse nichts Weiteres hinzufügen. Vielmehr will ich auf das wärmste empfehlen, dafs, mit Bezugnahme auf das soeben Bemerkte, alle Abkürzungen, die das Verständnis nicht erschweren, eingeführt werden. Namen und Adressen können wohl nur wenig abgekürzt werden, dagegen ist es ja durchaus unnötig, oft vorkommende Worte, z. B. „Professor", vollständig auszuschreiben, sondern in solchen Fällen genügen im allgemeinen die Anfangsbuchstaben. Auf diese Weise brauchte man für jeden Namen nur eine Zeile in Anspruch zu nehmen, und da die Gesamtzahl der Namen kaum 2500 überschreiten wird, könnte das ganze Verzeichnis auf etwa 60 Druckseiten (à 40 Zeilen) Platz finden.

Bisher habe ich nur von der Anordnung eines Mathematiker-Verzeichnisses gesprochen, obgleich ich in der Überschrift des Artikels und zuweilen auch im Texte das Wort „Mathematiker-Kalender" gebraucht habe. In der That bin ich mit der Redaktion des Annuaire darüber einig, dafs es angemessen ist, dem Verzeichnisse auch andere Mitteilungen hinzu-

1) So z. B. findet sich S. 171 für einen hervorragenden Mathematiker nur „Deutsche math. Vereinigung" aufgeführt, während S. 72 für einen anderen hervorragenden Mathematiker 16 gelehrte Gesellschaften angeführt sind.

zufügen. Im Annnaire giebt es deren folgende: 1) Nachruf für Ch. Hermite (mit Porträt); 2) Verzeichnis kürzlich verstorhener Mathematiker; 3) Verzeichnis wissenschaftlicher Gesellschaften; 4) Verzeichnis periodischer Schriften, die mathematische Artikel enthalten; 5) sechs „notices scientifiques". Hier bin ich im Grofsen nnd Ganzen mit dem Plane der Redaktion des Annnaire einverstanden, aber bezüglich der Ausführung derselben könnte ich wohl hier und da eine abweichende Ansicht hahen. Dafs der Mathematiker-Kalender mit dem Nachrufe für einen hedeutenden Mathematiker beginnt, scheint mir nicht unangemessen, aber anch in Bezug auf ührige kürzlich verstorbene Mathematiker möchte ich knrze biographische Notizen (womöglich mit Porträts) empfehlen.[1]) Das Verzeichnis wissenschaftlicher Gesellschaften kann meiner Ansicht nach ohne Schaden auf mathematische Gesellschaften wissenschaftlichen Charakters beschränkt werden, und auch im Verzeichnisse periodischer Schriften halte ich es für unnötig, andere Zeitschriften als die rein oder wenigstens überwiegend mathematischen aufzunehmen.[2]) Endlich hin ich der Ansicht, dafs in einen Mathematiker-Kalender kein Artikel, wie z. B. „Les fontions elliptiqnes au point de vue de lenrs applications" gehört. Auf der anderen Seite habe ich mir einige Sachen notiert, die in einem Mathematiker-Kalender von Interesse sein können, nnd hesonders scheint es mir wünschenswert ein alphabetisches Verzeichnis der Universitäten und Technischen Hochschulen mit Angabe der Namen der Professoren der Mathematik zn bringen.

Ich habe jetzt in grofsen Zügen den Plan zur Herstellung eines Mathematiker-Kalenders angegeben, und erlauhe mir hinzuzufügen, dafs ich einen solchen Kalender auch schon in Angriff genommen habe. Um die Namenliste zu bekommen, habe ich znerst die letzten Jahrgänge des

1) Anch hier zeigt das Annnaire, wie notwendig es ist Personenkenntnis zn haben, nm eine gute Arbeit leisten zn können. Im Vorworte (S. V—VI) bemerkt Herr Laisant: „Nons donnons une liste des mathématiciens décédés dans le courant des années 1900 et 1901. Nous l'avons limitée . . . à nn petit nombre de mathématiciens connus." Aber in der Liste findet sich auch Sophus Lie, der bekanntlich schon am 18. Februar 1899 starb, nnd dafs die Liste nicht *nur* „bekannte" Mathematiker aufnimmt, dürfte wohl schon daraus ersichtlich sein, dafs die Redaktion selbst nicht weifs, ob für Nr. 10 „Guelfo" Familienname oder Vorname ist, und über ihn gar keine Auskunft geben kann.

2) Dafs S. 399 nnter den Herausgebern des Giornale di matematiche G. Battaglini (der bekanntlich schon 1894 starb) angegeben wird, ist wohl nur ein *lapsus calami*. Meines Wissens giebt es nur eine mathematische Zeitschrift, die lange Zeit nach dem Tode eines Mathematikers denselben noch als Mitglied der Redaktion angiebt, nämlich die Acta Mathematica (siehe die zweite Seite des Umschlages des am 15. Dezember 1901 erschienenen Doppelheftes **25** : 1—2, wo unter „Redaction" auch der Name „S. Lie" vorkommt).

Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik und der Revue semestrielle des publications mathématiques benutzt, und die Liste dann durch Zuhilfenahme der Mitgliederverzeichnisse verschiedener mathematischer Gesellschaften u. s. w. ergänzt. Dann habe ich begonnen, Angaben über Geburtsjahr, Beruf, Fachrichtung und Adresse zu sammeln; selbstverständlich fehlt noch sehr viel, aber ich hoffe auf den Beistand der Fachgenossen rechnen zu dürfen, sodafs der Kalender am Anfange des Jahres 1903 druckfertig sein kann. Ich hoffe auch, dafs es möglich sein wird, den ganzen Kalender auf etwa 100 Druckseiten in kl.-Oktavformate zu beschränken, und dafs der Preis des Büchleins, in biegsamen Leinwandband gebunden, nicht mehr als 2 Mark betragen wird.

Zur Frage über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften.

Von Felix Müller in Steglitz.

Bei dem Versuche, die von Herrn Stäckel in der Bibliotheca Mathematica 2_3, 1901, S. 133—138 aufgestellten Regeln auf die Titel von mehr als 700 Zeitschriften, in denen wiederholt Abhandlungen aus der reinen und angewandten Mathematik zu finden sind, anzuwenden, bin ich auf einige Gesichtspunkte aufmerksam geworden, die ich hier mitzuteilen mir erlauben möchte.

Die erste Regel (l. c. S. 135) verbietet, die Namen der Herausgeber der Zeitschriften bei der Abkürzung der Titel zu verwenden. Im allgemeinen wird wohl Jeder mit dieser Regel einverstanden sein, der den wiederholten Wechsel der Redaktion einer und derselben Zeitschrift berücksichtigt. Nur in demjenigen Falle dürfte eine Personalbezeichnung gestattet sein, wo die Zeitschrift während ihres Bestehens nur den einen und einzigen Herausgeber gehabt hat. Solche Nominalbezeichnungen haben immerhin den Vorzug der Kürze, sind aber nur in Ausnahmefällen zu billigen.

Die zweite Regel des Herrn Stäckel (l. c. S. 135) fordert für häufig wiederkehrende Worte feste Abkürzungen, zunächst betreffen sie den Charakter der Zeitschrift oder ihren Namen, wofür man auch Hauptwort oder Stichwort sagen kann. Die Bedeutungen der Mehrzahl der gebräuchlichen Abbreviaturen sind, allerdings mit Berücksichtigung der verschiedenen Sprachen, leicht zu erraten, bei einzelnen bedürfte es aber doch einer Warnung vor unrichtiger Ergänzung, und bei einzelnen mufs erst der „Schlüssel“ ergeben, ob der Singular oder der Plural gelesen werden soll.

Wenn ich hiernach mich nicht damit einverstanden erklären kann, alle Abbreviaturen zu vermeiden, zu deren Erklärung es eines „Schlüssels“ bedarf, so stimme ich doch durchaus der Regel III (l. c. S. 135) des Herrn Stäckel bei: „Es ist unzulässig, dem ersten Stichwort ein Beiwort hinzuzufügen, das in dem Titel der Zeitschrift selbst nicht vorkommt.“ Ebenso beherzigenswert ist die vierte Regel (l. c. S. 136), welche die Abkürzung

verbietet, wenn entweder keine wesentliche Raumersparnis erzielt werden oder darunter die Deutlichkeit leiden würde. Wir lassen mithin ungekürzt die ersten Stichworte: Acta, Actes, Atti, Abstracts, Analyst, Årsskrift, Circular, Cronica, Diary, Essays, Rapport, Recueil, Revue, Rivista, Revista, Resultate, Séances, Sessioni, Saggi, Sammlung, sowie (um Verwechslungen mit der gebräuchlichen Deutung von Ann., Mém., Proc. zu vermeiden) Annuaire, Annuario, Mémorial, Procès (verbaux). Auch Report darf nicht in Rep. gekürzt werden, wofür man möglicher Weise Repertorium lesen könnte.

Aufser diesen Stichworten kommen in den Titeln noch andere Hauptworte vor, wie die Namen der Gesellschaften, Vereine, Institute, welche die Zeitschrift veröffentlichen. Für diese hat man eine Reihe vielfach benutzter Abkürzungen; unter diesen könnte Obs. für Observatoire Anstofs erregen, da es oben für Observations gebraucht ist, doch ergiebt sich die betreffende Bedeutung leicht aus dem Zusammenhang. Ebenso verständlich sind Abkürzungen für Wissenschaften und ihre verwandten Zweige, wie Wiss., Weet., Vet., Sc. (Science), Math., Astr., Bibliogr., Gesch. u. ä.

Was die Adjektive betrifft, die neben den Hauptworten auftreten, so sind die gewöhnlichen Abkürzungen im allgemeinen nicht mifszuverstehen.

Die Ortsnamen (für den Ort des Erscheinens und für den Sitz der Gesellschaften) sollten nur in den seltensten Fällen abgekürzt werden, und nur dann, wenn mindestens 3 Typen erspart werden, z. B. bei Amst(erdam), Bol(ogna), Brux(elles), Christ(iania), Edin(burgh) aber nicht Berl., Lond., Par., für Berlin, London, Paris.

Wir kommen nun zu der wichtigen Frage: in welcher Reihenfolge sollen die Worte der Titel bei den Abkürzungen wiedergegeben werden und welche dieser Worte sollen überhaupt fortgelassen werden. Die Hauptregel des Herrn Stäckel (l. c. S. 138) lautet: „Die Titel der Zeitschriften sollen in der Weise abgekürzt werden, dafs der Reihe nach 1. das Hauptwort (Abh., Ann., Arch., Ber. u. s. w.), 2. die sachlichen, 3. die lokalen Beiworte in geeigneter Abkürzung aufeinander folgen; 2. oder 3. können auch, wenn die Deutlichkeit es gestattet, wegfallen". Das Wesentlichste in derselben ist, dafs der Ortsname an das Ende gesetzt werden soll, dafs also nicht, wie es bisher vielfach üblich war, geschrieben wird: Paris Mém., London Proc., Bologna Mem. etc. Bei der grofsen Zahl von Zeitschriften, die an einem und demselben Orte (wie Paris, London, Berlin, Leipzig etc.) erscheinen, ist diese Umstellung wohl gerechtfertigt, weil dann der charakteristische Name der Zeitschrift am Anfange deutlicher hervortritt. Dieser charakteristische Name besteht häufig nicht blos aus dem oben angeführten Hauptwort allein; es gehen diesem Artikel und Beiworte vorauf. Deshalb möchte ich als Ergänzung

zu obiger Regel vorschlagen: die Beiworte, welche im vollständigen Titel dem Hauptworte vorangehen, dürfen im gekürzten Titel nicht hinter dasselbe gestellt werden. Also nicht: Ann. (nouv.), J. (Amer.), sondern: Nouv. Ann., Amer. J., Gött. gel. Anzeigen, etc. Es gilt also die Regel: diejenigen im Titel einer Zeitschrift auftretenden Worte, welche nicht fortgelassen werden, sind in derselben Reihenfolge (verkürzt oder unverkürzt) anzugeben, in welcher sie im vollständigen Titel aufeinander folgen.

Schwieriger ist die Frage, welche Beiworte fortgelassen werden dürfen. Es giebt eine Anzahl von Zeitschriften, deren Name oder Hauptwort so charakteristisch ist, dafs schon ein Wort oder zwei Worte genügen würden, den Titel eindeutig zu bestimmen. Solche Namen sind: The Analyst, L'Astronomie, The Athenaeum, Časopis, Il Cimento, etc.; ebenso eindeutig bestimmt sind die Titel: L'Ateneo Veneto, Biblioteca Italiana, Biblioteca fisica, Bibliotheca mathematica, etc. Soll man hier den Artikel Der, Il, Le, La, The, etc. fortlassen? Ich würde vorschlagen, ihn überall, wo er im vollständigen Titel steht, beizubehalten. Wenn wir z. B. La in La Nature fortliefsen, so könnte eine Verwechslung mit dem englischen Journal eintreten.

Auch die Ortsnamen würde ich überall, selbst in den soeben angeführten Titeln beifügen und dieselben nur fortlassen, wenn der Ort sich aus den Namen der Zeitschrift oder der herausgebenden Gesellschaft ergiebt, wie in: Atti R. Ist. Ven., Comm. Bon. Inst., Königsb. Arch. für Naturw. und Math.

Vor den Namen der Gesellschaften resp. Institute kann der Artikel ohne Schaden fortbleiben, z. B. Abh. Ak. der Wiss. Berlin, Ann. Ec. Normale Paris, Atti R. Acc. Napoli, C. R. Ac. des Sc. Paris.

Ob „die Deutlichkeit es gestattet", dafs einzelne sachliche oder lokale Beiworte fortfallen, kann nur an speziellen Beispielen entschieden werden, indem man den Titel einer Zeitschrift mit dem ähnlich lautenden einer anderen vergleicht. Es genügt nicht zu schreiben Proc. London, da man Proc. R. Soc. London und Proc. Math. Soc. London unterscheiden mufs. Ebensowenig Proc. Edinb. wegen Proc. R. Soc. Edinb. und Proc. Math. Soc. Edinb., ferner Proc. Philad. wegen Proc. Amer. Phil. Soc. Philad. und Proc. Ac. of Nat. Sc. Philad. etc. Dafs der Titel „Hist. Ac. Berlin avec les Mém." nicht einfach mit Mém. Berlin bezeichnet werden darf, versteht sich von selbst.

Über die Bezeichnung der Serie, des Bandes, des Jahres der Abfassung und der Veröffentlichung, sowie der Seitenzahl (z. B. Mém. Ac. des Sc. Paris (2) **6**, an. 1823 (1827) 1—60) habe ich nichts hinzuzufügen.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, 22, 29, 34, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103, 135,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135, 144, 155, 169, 171,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, 137—138. — **1:190, 197, 202,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:225, 234,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138.

1:255. Für die Leser der *Vorlesungen* würde es willkommen gewesen sein, wenn Herr Cantor auch die Sätze 54 und 57 des 10. Buches der *Elementa* besonders horvorgehoben hätte. Bekanntlich bringen diese Sätze die Umformung des Ausdruckes $\sqrt{m+\sqrt{m^2-n}}$ in $\sqrt{\frac{m+\sqrt{n}}{2}}+\sqrt{\frac{m-\sqrt{n}}{2}}$, woraus man durch die Substitution $m^2-n=m'$ unmittelbar die bekannte Formel $\sqrt{m+\sqrt{m'}}=\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-m'}}{2}}+\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-m'}}{2}}$ erhält In deu *Vorlesungen* kommt diese Formel zum ersten Mal S. 586 vor, wo es sich von Bhâskara handelt; die meisten Leser müssen dadurch bewogen werden, Bhâskara als Erfinder der Umformung anzusehen (vgl. H. Fehr, L'enseignement mathématique **4**, 1902, 25), und dies um so mehr, als man aus den *Vorlesungen* keine Auskunft über das Vorkommen dieses Verfahrens bei den Arabern oder im früheren christlichen Mittelalter bekommt. Jetzt weiſs man ja, daſs die Araber dasselbe lange Zeit vor Bhâskara kannten (siehe Curtzes Anaritius-Ausgabe S. 341) und abgesehen von den direkten Euklides-Übersetzungen, wurde es etwa gleichzeitig mit Bhâskara im Abendlande auch durch Gherardo Cremonese bekannt (siehe Curtzes Anaritius-Ausgabe S. 270; vgl. Leonardo Pisano, *Scritti* ed. Boncompagni I, S. 363). G. Eneström.

1:283, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383, 400, 432,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

1:457. Le Patritius des écrits héroniens est peut-être le „Nicephorus patricius, geometriae ludo praefectus sub Constantino Porphyrogenito“ (Fabricius, *Biblioth. graeca*, ed. Harles, VII, p. 679). Ce serait donc un byzantin du 10e siècle. P. Tannery.

1:463, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:467, 469,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314.

1:519—520. Bekanntlich hat Herr Cantor zuerst darauf hingewiesen, dafs bei den Agrimensoren die Formel

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3 = \left(\tfrac{10 \cdot 11}{2}\right)^2$$

vorkommt, und er glaubt auch den Weg aufgefunden zu haben, worauf der von den Agrimensoren benutzte, jetzt unbekannte Mathematiker, zu dieser Formel gelangte. Es ist ja immer eine mifsliche Sache, sich über solche Fragen zu äufsern, aber viel einfacher wäre es wohl anzunehmen, dafs die Agrimensoren (oder der Verfasser ihrer Vorlage) beobachtet hatten, dafs jede der Summen

$$1^3 + 2^3 = 9,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225, \text{ u. s. w.}$$

eine Quadratzahl ist, und dafs die Wurzeln 3, 6, 10, 15, u. s. w. dieser Quadratzahlen offenbar die Reihe der Dreieckzahlen bilden. — Dafs an der (S. 520, Anm.) zitierten Stelle des Pascal das Wort „veteres“ die Griechen oder die Römer bezeichnet, scheint uns wenig wahrscheinlich; konnte Pascal nicht z. B. Stifel (vgl. *Arithmetica integra*, fol. 306—307) gemeint haben?

G. Eneström.

1:537, 540, 542, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 449—500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854, 855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

2:20. Z. 2 ist $b^2 + (a + b)^2 + (2a + b)^2 + \cdots + (na + b)^2$ zu setzen, da Leonardo auch Einzelfälle, wo b nicht gleich Null ist, in Betracht nimmt; er behandelt nämlich den Fall $a = 2$, $b = 1$ und bemerkt, dafs man auf ähnliche Weise die Summe für $a = 3$, $b = 1$ erhalten kann. — Z. 3 ist natürlich „Quadratzeilen“ Druckfehler für „Quadratzahlen“. Auf der anderen Seite soll die Bemerkung zur Zeile 11 (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502) gestrichen werden, weil das Wort „arithmetischen“ richtig ist. Freilich wäre es der Deutlichkeit halber angemessen, Z. 12 nach „u. s. w.“ die Worte „einer geometrischen Reihe“ einzufügen.

G. Eneström.

2:25, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352.

2:31. In Bezug auf die frühere Bemerkung (BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352) ist hinzuzufügen, dafs Leonardo auch in dem *Liber abbaci* (S. 381—383) die

gewöhnliche Kubikwurzelausziehung aus den Zahlen 2345, 56789, 456789, 9876543 lehrt (vielleicht hat Herr Cantor Z. 31 diesen Umstand durch das Wort „auch“ andeuten wollen), und zwar ganz wie später in der *Practica geometriae*, aber es scheint uns durchaus unwahrscheinlich, dafs die Worte des Leonardo: „et cum super hanc diffinitionem diucius cogitarem, inveni hunc modum reperiendi radices“ sich auch auf diese Methode beziehen, denn sonst hätte er wohl dieselbe als die wichtigste zuerst dargestellt. Abgesehen hiervon, darf man wohl nicht ohne zwingende Gründe annehmen, dafs ein so elementares Verfahren, das schon den Indern geläufig war, ihm unbekannt geblieben ist.

G. Eneström.

2:34, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:41, 57**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:70**, siehe BM 1_3, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502—503. — **2:98**, siehe BM 1_3, 1900, S. 269—270. — **2:100**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2:105**, siehe BM 1_3, 1900, S. 503. — **2:111**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:122, 128**, siehe BM 1_3, 1900, S. 503—504. — **2:132**, siehe BM 1_3, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:157, 158**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:163, 166**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:175**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2:210, 219**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505. — **2:253**, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:273**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2:282, 283**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 2_3, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354. — **2:313**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2:328**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2:334, 353, 381, 386, 395, 401, 405, 425**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507—508. — **2:430**, siehe BM 2_3, 1901, S. 145. — **2:449, 474, 480**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140—141. — **2:481, 482**, siehe BM 1_3, 1900, S. 508. — **2:482**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354.

2:482. In Bezug auf Scipione del Ferros Lebensumstände wird nur auf S. Gherardi, *Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Fakultät der alten Universität Bologna* (1871) verwiesen, aber der Leser, der sich des Verweises bedient, wird finden, dafs diese Schrift gar nichts über die Wirksamkeit des Ferro im Jahre 1526 enthält. Da hierzu noch kommt, dafs in den meisten Handbüchern 1525 als Ferros Todesjahr angegeben wird, werden einige Leser ohne Zweifel die Sache ein wenig auffällig finden. Es wäre darum gut gewesen, wenn Herr Cantor hier in erster Linie die von ihm wirklich benutzte Quelle, nämlich C. Malagola, *Della vita e delle opere di Antonio Urceo* (Bologna 1878) S. 354—356, citiert hätte.

G. Eneström.

2:484, siehe BM 3_3, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490, 497**, siehe BM 1_3, 1900, S. 509. — **2:509**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270, 509. — **2:510**, siehe BM 1_3, 1900, S. 509. — **2:512**, siehe BM 3_3, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517**, siehe BM 1_3, 1900, S. 509. — **2:530**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354—355; 3_3, 1902, S. 141. — **2:532, 535, 541, 548, 549**, siehe BM 1_3, 1900, S. 509—510. — **2:550**, siehe BM 2_3, 1901, S. 355. — **2:554, 569, 572, 573**, siehe BM 1_3, 1900, S. 510. — **2:572**, siehe BM 3_3, 1902, S. 141. — **2:576**, siehe BM 2_3, 1901, S. 355—356. — **2:579**, siehe BM 2_3, 1901, S. 145. — **2:582**, siehe BM 1_3, 1900, S. 510. — **2:583**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270; 2_3, 1901, S. 356. — **2:592**, siehe BM 2_3, 1901, S. 146. — **2:594, 597**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270. — **2:597, 599—600**, siehe BM 2_3, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270—271. — **2:611**, siehe BM 2_3, 1901, S. 356—357. —

2:612, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:613**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:614, 620**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:621, 623**, siehe BM. **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:655**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:659, 660**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:683**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:700, 701, 703, 704, 705**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:721, 742**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746, 747**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:766**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:767**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:772, 775**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:783**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **2:784, 820, 825, 840, 856, 865**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2:876, 878, 879**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:891**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:901**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:10**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:12, 17, 22**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:26**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:45–48, 49, 50**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3:100**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3:116**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:117**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:123**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:174**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432.

3:188. Ob die Worte: „Bei der letzten hier niedergeschriebenen Formel haben wir allerdings die Treue der Berichterstattung zu Gunsten der Richtigkeit des Ergebnisses verletzt; bei Leibniz fehlt die Quadraterhebung der im Nenner auftretenden Wurzelgröfse" jetzt ohne weiteres als richtig anerkannt werden müssen? Bekanntlich hat C. J. Gerhardt in seiner letzten Ausgabe (1899) von Leibniz' Briefwechsel an der betreffenden Stelle (S. 242) als Nenner $3 \times \overline{a + by + cy}|^{\frac{2}{3}}$, wo also die Quadraterhebung sich findet, aber cy statt cy^2 steht. Auf derseben Seite der Gerhardtschen Ausgabe findet sich als Differential von $b\sqrt[3]{1+y}$ der richtige Ausdruck $\frac{bdy}{3 \times \overline{1+y}|^{\frac{2}{3}}}$, aber auf der folgenden Seite wird als Integral eines Ausdruckes von der Form $\frac{dt}{nt^{\frac{1}{n}}}$ unrichtig $t^{\frac{1}{n}}$ angegeben. Ehe man hier ein entscheidendes Urteil fällt, wäre es vielleicht zweckmäfsig, das in London befindliche Original des Briefes zu vergleichen.

G. Eneström.

3:201, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:207**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:218, 224**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513—514. — **3:225, 228**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:232**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:246**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:303**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155.

3:330—331. Dafs einige von Herrn Cantor erwähnte Sätze aus der *Nova algebrae promotio* viel früher von Leibniz gefunden worden sind, als man aus dem Cantorschen Berichte schliefsen könnte, hat Herr G. Vacca im Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1899, S. 113—116 nachgewiesen. So

war z. B. der polynomische Lehrsatz schon 1678 Leibniz bekannt, und spätestens 1683 entdeckte er selbständig den Fermatschen Lehrsatz. — S. 331 hätte Herr Cantor bemerken können, dafs Leibniz auch den Wilsonschen Satz ausgesprochen hat (siehe Vacca, a. a. O. S. 114). G. Eneström.

---

3 : 447, 455, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 154—155. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 521, 636—637,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 652,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 660, 667, 689, 695,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3 : 750, 758, 760, 766,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 848, 881,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 892,** siehe BM $\mathfrak{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Über eine wiedergefundene Handschrift der Trigonometrie des Johannes Werner. Unter dem handschriftlichen Nachlafs des Nürnberger Pfarrers und Mathematikers Johannes Werner befand sich bekanntlich eine sphärische Trigonometrie, die später in den Besitz des G. J. Rheticus kam (vgl. z. B. Braunmühl, *Vorl. über Gesch. der Trigonom.* I, S. 133). Rheticus hatte die Absicht, dieselbe zusammen mit einer anderen Schrift des Werner herauszugeben, und liefs wirklich 1557 in Krakau eine dünne Broschüre von sechs Folioseiten drucken, deren erste Seite folgenden Titel trägt: „*Ioannis Verneri De triangulis sphaericis libri quatuor; De meteoroscopiis libri sex; nunc primum studio et diligentia Ioachimi Rhetici in lucem editi*“, aber aufser dem Titelblatte nur eine Vorrede des Rheticus enthält. Warum der Druck der zwei Wernerschen Arbeiten unterblieb, ist nicht bekannt, dafs er aber wirklich nach Beendigung der Vorrede unterbrochen wurde, geht aus folgender handschriftlichen Notiz hervor, die sich anf dem einzigen bekannten Exemplare (in der Universitätsbibliothek in Krakau) der genannten Broschüre findet: „Praefatio hec sola Cracoviae impressa, reliquum opus mittere in Germaniam proposuerunt, ut ego intellexi ex quadam epistola manu ipsius Rhetici ad Wolffium scripta; an missum et impressum sit, nondum scio“ (vgl. Zebrawski, *Bibliografia pismiennictwa polskiego z dzialu matematyki i fizyki oraz ich zastosowan*, Krakow 1873, S. 140—141). Ob und wohin das Manuskript gesandt worden ist, weifs man auch jetzt nicht, dafs es aber nicht gedruckt wurde, kann als festgestellt angesehen werden, da trotz umfassender Nachforschungen in verschiedenen Ländern, kein einziges gedrucktes Exemplar der Wernerschen Trigonometrie aufgefunden ist, und bei den Verfassern, die sich mit Werner beschäftigt haben, keine Aufschlüsse hierüber gegeben worden sind.

Es schien also, als ob die Wernersche Trigonometrie verloren gegangen wäre, aber kürzlich hat Herr A. A. Björnbo das Glück gehabt, in der Vatikanischen Bibliothek in Rom eine Handschrift (Cod. Reg. Su. 1259) zu finden, die wahrscheinlich mit dem oben erwähnten Druckmanuskript identisch ist, und jedenfalls die zwei Wernerschen Schriften enthält, die Rheticus herauszugeben beabsichtigte. In dieser Handschrift findet sich nämlich zuerst „*Ioannis Verneri norimbergensis de triangulis sphericis*“ in vier Büchern (367 Seiten),

und dann „*Ioannis Verneri norimbergensis de meteoroscopiis*“ in sechs Büchern (622 Seiten); die Figuren fehlen ganz.

Dafs man es hier nicht mit dem Originalmanuskripte des Werner, sondern mit einer Bearbeitung oder Abschrift des Rheticus zu thun hat, dürfte daraus hervorgehen, dafs nach zuverlässigen Angaben (vgl. Braunmühl, a. a. O. S. 133) die von Werner hinterlassene handschriftliche Trigonometrie den Titel „*De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V*“ hatte, während die von Herrn Björnbo gefundene Handschrift nur vier Bücher enthält; ebenso wird als Titel der im Nachlasse des Werners gefundenen praktischen Astronomie: „*De constructione et utilitatibus meteoroscopiorum libri V*“ angegeben, während Cod. Reg. Su. 1259 eine Schrift „*De meteoroscopiis*“ in sechs Büchern enthält. Auf der anderen Seite stimmen ja sowohl die Titel als die Einteilung der zwei Abhandlungen des Cod. Reg. Su. 1259 genau mit den Angaben auf dem Titelblatte vom Jahre 1557. Vielleicht könnte man auch den Umstand, dafs im Cod. Reg. Su. 1259 alle Figuren fehlen, dahin deuten, das wir hier eine speziell für den Druck angefertigte Handschrift vor uns haben.

In einem der nächsten Hefte der Bibliotheca Mathematica wird Herr Björnbo über die Bedeutung, die sein Fund für die Geschichte der Trigonometrie hat, Auskunft geben. Vorläufig sei nur bemerkt, dafs dadurch die Richtigkeit der Braunmühlschen Darstellung a. a. O. S. 135—137 wesentlich bestätigt wird.

Stockholm. G. Eneström.

Anfragen.

99. Über Summierung der Reihe von Kubikzahlen im christlichen Mittelalter. Bekanntlich bringt Paciuolo in seiner *Summa* (1494) die Formel für die Summe der Reihe von Kubikzahlen, und da er ausgiebig Leonardo Pisano benutzt, hat Libri (*Histoire des sciences mathématiques en Italie* III, S. 140) vermutet, dafs auch diese Formel von Leonardo herrührt. Nun findet sich in den von Boncompagni herausgegebenen *Opere* desselben keine Stelle, wo die Reihe der Kubikzahlen behandelt wird, aber da ein Teil des *Liber quadratorum* verloren gegangen ist, und da Leonardo, der die Reihe der Quadratzahlen vermittelst der Identität

$$r(r+2)(2r+2) = (r-2)\,r\,(2r-2) + 12r^2$$

summiert, ebenso gut erkannt haben könnte, dafs die Reihe der Kubikzahlen vermittelst der Identität $r^2(r+1)^2 = (r-1)^2 r^2 + 4r^3$ summiert werden kann, so ist es ja nicht unmöglich, dafs diese letzte Reihe entweder am Ende des *Liber quadratorum* oder in einer jetzt verlorenen Schrift behandelt wurde.

Welche Mathematiker des christlichen Mittelalters haben sich mit Summierung der Kubikzahlen beschäftigt, und findet sich bei ihnen irgend eine Andeutung, aus welcher Quelle sie dabei geschöpft haben?

G. Eneström.

Recensionen.

W. W. R. Ball. A short account of the history of mathematics. Third edition. London, Macmillan 1901. XXIV + 527 S. 8⁰. Sh. 10.

Die erste Auflage des *Account* erschien 1888 (Anzeige von G. Loria in der Biblioth. Mathem. 1889, S. 56—58), die zweite 1893 (Anzeige von G. Eneström in der Biblioth. Mathem. 1893, S. 90—91) und ein Auszug daraus wurde 1895 unter dem Titel: *A primer of the history of mathematics* veröffentlicht (Anzeige von G. Eneström in der Biblioth. Mathem. 1895, S. 55—63). Der Plan des Buches geht aus den genannten Anzeigen hervor; es behandelt nicht in erster Linie die Entwickelung der mathematischen Ideen, sondern beschäftigt sich hauptsächlich mit den Mathematikern, ihren Lebensverhältnissen (wobei sehr oft Anekdoten hinzugefügt werden) und ihren Entdeckungen. Auf der anderen Seite giebt es auch hie und da kürzere Übersichten der Entwickelung gewisser Theorien oder Begriffe, und zuweilen ist ein ganzes Kapitel (chap. VII: „systems of numeration and primitive arithmetic", S. 125—133) solchen Gegenständen gewidmet.

In der dritten Auflage hat Herr Ball S. 272 seine Darstellungsweise folgendermaſsen motiviert:

> To give a sense of unity to a history of mathematics it is necessary to treat it chronologically, but it is possible to do this in two ways. We may discuss separately the development of different branches of mathematics during a certain period (not too long), and deal with the works of each mathematician under such heads as they may fall. Or we may describe in succession the lives and writings of the mathematicians of a certain period, and deal with the development of different subjects under the heads of those who studied them. Personally, I prefer the latter course; and not the least advantage of this, from my point of view, is that it adds a human interest to the narrative. No doubt as the subject becomes more complex this course becomes more difficult, and it may be that when the history of mathematics in the nineteenth century is written it will be necessary to deal separately with the separate branches of the subject, but, as far as I can, I continue to present the history biographically.

Inwieweit wir mit den soeben angeführten Ansichten des Herrn Ball einverstanden sind, brauchen wir nicht an dieser Stelle auseinanderzusetzen, da wir am Anfange des vorigen Bandes der Bibliotheca Mathematica unsere Meinung über die verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung angegeben haben (vgl. auch Biblioth. Mathem. 1895, S. 55—57). Nur im

Vorübergehen erlauben wir uns zu bemerken, dafs wir nicht ganz verstehen, warum die biographische Darstellungsweise schwieriger werden mufs, wenn man das 19. Jahrhundert erreicht, aber vielleicht will Herr Ball sagen, dafs in diesem Falle die von ihm bevorzugte Darstellungsweise weniger geeignet ist, dem Leser eine Übersicht über die Geschichte der Mathematik zu bieten, und wenn seine Worte diesen Sinn haben, sind wir mit ihm einig.

Bezüglich der Einzelheiten wurde in den oben citierten Anzeigen darauf aufmerksam gemacht, dafs die von Herrn Ball ursprünglich benutzten Quellen zum Teil unzuverlässig waren, und dafs in seinem Buche darum viele unrichtige Angaben sich fanden. Zwar hat Herr Ball bei der Herausgabe der neuen Auflagen eine ziemlich grofse Anzahl von Fehlern berichtigt, aber teils sind einige solche noch stehen geblieben[1]), teils scheint ihm die neueste mathematisch-historische Litteratur nur spärlich zugänglich gewesen zu sein, so dafs in seinem Buche noch viel zu verbessern übrig ist. Die Art der Fehler dürfte aus den folgenden Beispielen hervorgehen.

S. 63. „A work which purports to be the *Catoptrica* [of Euclid] exists in the form of an Arabic translation, but there is some doubt as to whether it represents the original work written by Euclid.“ Hier genügt es auf den 7. Band von Euclidis *Opera omnia*, ed. von J. L. Heiberg und H. Menge zu verweisen, wo der *griechische* Text der Katoptrik abgedruckt ist, und wo in der Einleitung dargelegt wird, dafs die Schrift *nicht* von Euklides herrühren kann.

S. 102. „A book on *optics* ... [is] sometimes attributed to him [Ptolemy], but [its] authenticity is doubtful.“ Diese Notiz ist als ganz veraltet zu bezeichnen, nachdem teils die lateinische Übersetzung der Optik des Ptolemaios bekannt und herausgegeben worden ist, teils die Schrift *De speculis* als dem Heron angehörend, im zweiten Bande von Heronis *Opera omnia* publiciert wurde.

S. 116. Nachdem Herr Ball bemerkt hat, dafs Eutokios Kommentare zu den vier ersten Büchern der *Conica* des Apollonios und zu verschiedenen Schriften des Archimedes verfafst hat, fügt er hinzu: „he also published some examples of practical Greek arithmetic. His works have never been edited, though they would seem to deserve it.“ Das Wort „also“ ist hier vielleicht nichs ganz passend, da die fraglichen Rechenbeispiele in einem der schon angedeuteten Kommentare sich finden (Eutocii *Commentarius in dimensionem circuli*; Archimedis *Opera omnia* ed. Heiberg III, 263—303), aber besonders auffällig mufs es sein, dafs die Schriften des Eutokios als unediert angegeben werden. Bekanntlich besitzen wir vom Kommentar zu Apollonios Übersetzungen oder Ausgaben von F. Commandino, E. Halley und J. L. Heiberg; über Ausgaben der Kommentare zu Archimedes hätte Herr Ball in *The works of Archimedes by* T. L. Heath (Cambridge 1897), S. XXIX—XXX ohne Mühe Auskunft bekommen können.

Ähnliche Unrichtigkeiten bezüglich der litterarischen Notizen kommen ziemlich oft vor, zumal in solchen Fällen, in denen die richtigen Angaben

1) Die Angabe S. 59, dafs auch das 10. Buch der *Elementa* der Zahlentheorie gewidmet ist, mufs wohl als ein dreimal übersehener Schreibfehler betrachtet werden, da S. 62 richtig bemerkt wird, dafs dies Buch die Lehre von den irrationalen Gröfsen enthält.

leicht den CANTORschen *Vorlesungen* zu entnehmen sind. Etwas unangenehm ist es auch, dafs Herr BALL zuweilen ganz unbestätigten Konjekturen den Rang von wirklichen Thatsachen giebt. So z. B. behauptet er (S. 97—98) kategorisch, dafs NIKOMACHOS ein Jude war, der im Jahre 50 n. Chr. geboren und c. 110 gestorben ist, weiter (S. 99), dafs PTOLEMAIOS im Jahre 168 starb, und (S. 173) dafs LEONARDO PISANO im Jahre 1175 geboren wurde. Solche Behauptungen sind ja an sich recht unschuldig, aber sie tragen dazu bei, die Zuverlässigkeit der Arbeit verdächtig zu machen.

Auf der anderen Seite enthält die BALLsche Arbeit eine grofse Anzahl von bibliographischen Notizen, die sehr nützlich werden können, für den Fall dafs der Leser über einen gewissen Gegenstand etwas Näheres erfahren will; insbesondere scheint der Verf. besorgt gewesen zu sein, auf Auflagen der Gesammelten Werke der verschiedenen Mathematiker, sowie auf ausführliche Biographien derselben hinzuweisen.

Von den Bemerkungen, die wir noch notiert haben, erlauben wir uns die folgenden hier hinzuzufügen.

S. 13. Es ist wahr, dafs CANTOR noch in der 2. Auflage seiner *Vorlesungen* (1, Leipzig 1894, S. 108) THEOFRASTOS als Geschichtsschreiber auf dem Gebiete der Mathematik nennt, aber USENER und nach ihm P. TANNERY (*La géométrie grecque*, Paris 1887, S. 73) haben bemerkt, dafs die betreffende Stelle des DIOGENES LAERTIUS einen anderen Sinn hat, und wenn wir uns nicht irren, ist auch CANTOR jetzt der Ansicht, dafs THEOFRASTOS mit Unrecht unter den Geschichtsschreibern der Mathematik genannt worden ist.

S. 79 (Anm.). Es ist ein wenig auffallend, dafs die HEIBERGsche Ausgabe von APOLLONIOS' Schriften (Leipzig 1891—1893) nicht erwähnt wird; statt p. 51 lies p. 52.

S. 87. Wenn Herr BALL sagt, dafs HYPSIKLES „developed the theory of arithmetical progressions which had been so strangely neglected by the earlier mathematicians", so schreibt er wohl HYPSIKLES zu viel zu. Wie S. 72 angedeutet worden ist, summierte ja ARCHIMEDES auch die arithmetische Reihe, und HYPSIKLES hat nur im Vorübergehen drei hierher gehörende Sätze aufgestellt, von denen die zwei letzten eigentlich nur die ARCHIMEDische Summenformel enthalten.

S. 91. Dafs die HERONischen Vielecksformeln nicht trigonometrisch, sondern auf rein geometrischem Wege hergeleitet wurden, hat W. SCHMIDT in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 319—320 nachgewiesen.

S. 97. Statt „SERENUS of Antissa" ist „SERENUS of Antinoeia" zu setzen (vgl. HEIBERG, Biblioth. Mathem. 1894, S. 97—98).

S. 103. Es dürfte jetzt ziemlich bekannt sein, dafs es keinen Mathematiker Namens „Ottajano" (Oltajano ist wohl ein Schreibfehler) gegeben hat; der von Herrn BALL erwähnte „Neapolitan lad" hiefs ANNIBALE GIORDANO (geb. 1771, gest. 1835) und war aus Ottajano.

S. 172. Was meint der Verf. mit der Notiz: „ADELHARD also procured a manuscript or a commentary on ALKARISMI's work, which he likewise translated into Latin"? S. 162 hat er *drei* verschiedene Schriften ALKHWARIZMIS citiert, nämlich die Algebra, die Arithmetik und die astronomischen Tafeln; bekanntlich ist die letzte Schrift von ATELHARD übersetzt worden, und man hat die Vermutung ausgesprochen, er habe auch die Arithmetik übersetzt (vgl. hierüber Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 520).

S. 184. Bradwardin war nicht „the first European to introduce the cotangent into trigonometry"; die Kotangente findet sich schon bei Robertus Anglicus (vor 1276).

S. 185. Der Passus „Nicholas Oresmus ... is said in most histories of mathematics to have influenced the development of the subject ... but I do not propose to discuss his writings" ist uns unverständlich. Hat der Verf. irgend einen Grund zu bezweifeln, dafs die gewöhnliche Darstellung von Oresmes Verdiensten um die Mathematik unrichtig ist?

S. 188 (Anm.). Der Verweis auf „an article in the supplement (pp. 1—100) of the Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 1877" ist ungenau; entweder sollen die Worte „the supplement of" gestrichen werden, oder soll Zeitschrift für Mathematik und Physik Band 22 zitiert werden.

S. 195. Dafs die Neunerprobe nicht „was invented by the Arabs" sondern schon den indischen Mathematikern bekannt war, kann wohl jetzt als ziemlich sicher angesehen werden (vgl. Cantor, *Vorl. über Gesch. d. Mathem.* I², S. 571), und P. Tannery hat Spuren derselben bei den Griechen gefunden (*Sur l'invention de la preuve par neuf*; Bullet. d. sc. mathém. 6_2, 1882, S. 142—144).

S. 201. Die Notizen über + und — sind nicht gut abgefafst (Z. 19 ist natürlich 1554 Druckfehler für 1544), und auch die folgenden Stellen (S. 212 —214, 217, 220, 221, 222), wo derselbe Gegenstand behandelt wird, enthalten unvollständige Aufschlüsse hierüber.

S. 209. Dafs Regiomontanus *res* für x und *census* für x^2 braucht, ist ganz richtig, aber es wäre wohl angemessen gewesen hinzuzufügen, dafs beide Benennungen weit älter waren. Dafs *res* schon bei Leonardo Pisano vorkommt, kann der Leser aus S. 217 folgern, aber aus dieser Stelle kann er nicht ersehen, dafs Leonardo auch das Wort *census* anwendet.

S. 211. Die Bemerkung des Herrn Ball in Bezug auf den *Algorismus demonstratus*: „it is possible that the text which has come down to us contains additional matter contributed to Regiomontanus" ist nicht ernstlich zu nehmen, da wir bekanntlich Handschriften des Jordanischen *Algorismus* besitzen, die aus dem Anfange des 14. Jahrhunderts herrühren (vgl. z. B. Curtze, *Iordani Nemorarii de triangulis libri quatuor*, Thorn 1887, S. VII). Eine Bemerkung derselben Art findet sich S. 224, wo Herr Ball hinsichtlich der Lösung der Gleichung $x^3 + qx = r$ behauptet, dafs „it is probable that Ferreo had found the result in an Arab work", und auch der Passus S. 225: „it is possible that Tartaglia also wrote a treatise on algebra and the solution of cubic equations, but if so no copy is now extant" zeigt nur, dafs Herr Ball nicht genug Sachkunde besitzt, um kompetent zu sein sich über den betreffenden Gegenstand zu äufsern. Bekanntlich hat Tartaglia die Algebra im 6. Teile (1560) des *General trattato di numeri e misure* und die Lösung kubischer Gleichungen im 9. Buche der *Quesiti ed inventioni* (1546) behandelt.

S. 230. Herr Ball macht hier auf das Vorkommen imaginärer Gröfsen in der *Ars magna* des Cardano aufmerksam, und fügt hinzu: „except for the somewhat similar researches of Bombelli, a few years later, the theory of imaginary quantities received little further attention from mathematicians until Euler took up the matter." Aber vor Euler hat wohl wenigstens Johann Bernoulli den imaginären Gröfsen grofse Aufmerksamkeit gewidmet.

S. 239. Eine Notiz wie die folgende: „an approach to index notation,

such as A^q, are said to occur in VIETA's works" sollte man nicht bei einem Geschichtsschreiber der Mathematik im Jahre 1902 finden.

S. 241. Dafs der Wert, den VIÈTE für $\frac{2}{\pi}$ giebt, *nicht* korrekt, sondern verdruckt ist, hätte Herr BALL aus der neuen Auflage von CANTORS *Vorlesungen* unmittelbar ersehen können.

S. 252. Dafs STEVIN „early in the seventeenth century" gestorben ist, ist zwar richtig, aber warum diese schwebende Angabe, da man sein Todesjahr 1620 genau kennt?

S. 285 (vgl. S. 317). Die erste lateinische Aufgabe von DESCARTES' Geometrie erschien nicht 1659 sondern 1649.

S. 296. Über die Geschichte der Cykloide vor GALILEI siehe z. B. GÜNTHER, Biblioth. Mathem. 1887, S. 7—13.

S. 302. Die Notiz, dafs Band 4 von FERMATS *Œuvres* 1901 erschien, mufs auf einem Mifsverständnisse beruhen (liegt vielleicht eine Verwechselung mit dem 1901 erschienenen 4. Bande von DESCARTES' *Œuvres* vor?).

S. 365. Die Behauptung hinsichtlich LEIBNIZ, dafs „nearly all his mathematical papers were produced within the ten years from 1682 to 1692" ist kaum zutreffend.

S. 413. Z. 26 ist der Druckfehler x für n besonders sinnstörend.

S. 457. Die von SCHERING hesorgte Ausgabe von GAUSS' *Werken* umfafst nicht sieben, sondern nur sechs Bände; Band 7 ist noch nicht erschienen.

S. 476. Es scheint uns wenig passend, in einer Geschichte der Mathematik einen einzelnen Mathematiker als „one of the most distinguished of living mathematicians" zu bezeichnen.

S. 488. Die sehr auffällige Notiz: „SCHUBERTS lectures have been published by F. LINDEMANN" beruht ohne Zweifel auf einem Unfall; das Notenzeichen § ist wohl unrichtig nach SCHUBERT statt nach CLEBSCH gesetzt worden, und dann hat Herr BALL die Note ohne weiteres ergänzt.

Für die kürzlich verstorbenen Mathematiker hat Herr BALL im allgemeinen Geburts- und Todesjahr angegeben, was ja sehr lobenswert ist. Aber unnötig scheint es uns diese Zahlen zweimal, wie für BETTI (S. 460, 486), KRONECKER (S. 469, 473) und BRIOSCHI (S. 473, 486) anzugeben; für HERMITE finden sie sich sogar viermal (S. 469, 474, 475, 486). Auf der anderen Seite fehlen (S. 475, 486, 498, 500) die Zahlen für CH. BRIOT (1817—1882), J. C. BOUQUET (1819—1885), S. H. ARONHOLD (1819—1884), J. GRAINDORGE (1843—1896) und H. A. NEWTON (1830—1896).

S. 489 ist für SOPHIE KOWALEVSKI das Geburtsjahr 1850 zu setzen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

H. Konen. Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Leipzig, Hirzel 1901. 132 S. 8°. Mark 4.

Herr KONEN hat sich in der vorliegenden Schrift die ebenso interessante wie verdienstvolle Aufgabe gestellt, die in ganzen Zahlen zu lösende Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ von der ersten Spur ihres Auftretens bis in die Gegenwart zu verfolgen. Er behandelt zuerst S. 2—18 die Nachrichten über die Auflösung der Gleichung durch die Griechen. Im Anschlufs an die Untersuchungen von M. CANTOR, P. TANNERY, HULTSCH u. a. beleuchtet er die Stellen im PLATO,

Theon Smyrnaeus und Proclus, welche mit jener Gleichung in Verbindung gebracht werden können, und faſst nach Hultsch die Ergebnisse folgendermaſsen zusammen:

Wenn man $s_1 = 1$, $d_1 = 1$ annimmt und allgemein $s_n = s_{n-1} + d_{n-1}$, $d_n = 2 \cdot s_{n-1} + d_{n-1}$ definiert, so gelten für die von den Griechen erfundenen Diametral- und Seitenzahlen d und s die Gesetze:

$$1)\ d_n^2 = 2 \cdot s_n^2 \pm 1; \qquad 2)\ d_n^2 + d_{n-1}^2 = 2\left(s_n^2 + s_{n-1}^2\right);$$

3) $\frac{d_n}{s_n}$ ist ein Näherungswert von $\sqrt{2}$, und zwar nimmt die Annäherung bei wachsendem n zu.

Weiter geht Konen auf die übrigen die Sache betreffenden Nachrichten ein, über deren Auslegung weniger Übereinstimmung unter den Gelehrten herrscht, zunächst auf das *Problema bovinum*, das nach seiner Einleitung von Archimedes herrührt, und dessen vorletzte Bedingung zu der ganzzahlig zu lösenden Gleichung $t^2 - 4729494u^2 = 1$ führt, das also, wenn sein Ursprung gesichert wäre, eine Beschäftigung des Archimedes mit der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ beweisen würde. Zu demselben Ergebnis würde man gelangen, wenn Archimedes die Näherungswerte, die er für $\sqrt{3}$ giebt, ohne darzulegen, auf welchem Wege er sie erhalten, wirklich nach der mit dem modernen Kettenbruchverfahren in Zusammenhang stehenden Methode gefunden hätte, die man von vornherein voraussetzt und dann plausibel zu machen sucht. Freilich ist die Schluſsfolgerung durchaus nicht sicher, denn es ist nicht ausgeschlossen, daſs Archimedes auch anders verfahren, daſs er sich etwa des falschen Ansatzes bedient habe, der gerade für die Ermittelung von Näherungswerten ein nahe liegendes Hülfsmittel ist. Der falsche Ansatz wird nun freilich für durchaus ungriechisch erklärt, aber es ist schwer einzusehen, weshalb die Griechen, die doch sonst so viel von den Barbaren angenommen haben, gerade ihn verschmäht haben sollen. Übrigens mehren sich die Stimmen, die eine Anwendung des falschen Ansatzes seitens der Griechen nicht von der Hand weisen. So hat mir Herr Prof. A. Sturm am 29. 1. 1899 geschrieben, „er habe ebenfalls stets die Überzeugung gehegt, daſs das Heronsche Verfahren der Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln auf dem doppelten falschen Ansatze beruhe.“

Konen erwähnt ferner die von P. Tannery vor etwa 20 Jahren ausgesprochene Vermutung, daſs Diophant, in dessen Arithmetik, soweit sie uns erhalten ist, die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ nicht vorkommt, dieselbe nichts destoweniger behandelt habe; diese Behandlung habe sich in einem der verlorenen Bücher befunden. Ob Tannery noch jetzt dieser Ansicht ist? Konen sagt p. 15 „. . . , und so erübrigt uns nur noch, von den griechischen Mathematikern Diophant zu nennen, in dessen *Arithmetik* man wohl zu allererst nach einer Behandlung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ suchen möchte, wäre es auch nur für rationale t und u.“ Daſs Diophant die Gleichung durch rationale Werte hat befriedigen können, unterliegt wohl keinem Zweifel, da solche Werte durch ein von Diophant vielfach angewandtes Verfahren ohne weiteres geliefert werden. Recht zweifelhaft ist es jedoch, ob er, der in der Regel nur rationale Lösungen seiner Aufgaben ermittelt, auch die ganzzahlige Lösung jener Gleichung versucht habe. Wer das behauptet, muſs bessere Gründe vorbringen, als bisher gegeben sind. Auch ist es recht eigentümlich, daſs man

behauptet, der verlorene Teil der Arithmetik DIOPHANTS habe im wesentlichen nichts anderes als der auf uns gekommene Teil enthalten, dann aber eine so wichtige Sache, wie die ganzzahlige Lösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, die dem ganzen Werke DIOPHANTS ein anderes Gepräge aufdrücken würde, in diesen verlorenen Teil verweist. Ob nicht allgemein der Umstand, dafs sich von jener Gleichung keine Spur in den Schriften der *Araber* findet, der Annahme einer Beschäftigung der Griechen mit derselben widerspricht, scheint mir noch weiterer Überlegung zu bedürfen. Jedenfalls steht die Sache hinsichtlich der Griechen nicht so unanfechtbar fest, wie für ein anderes Volk des Altertums, die *Inder*, denen KONEN die Seiten 18—28 seiner Schrift gewidmet hat.

Die „cyklische Methode", wie sie BHÁSCARA und BRAHMEGUPTA anwenden, giebt in allen Fällen die Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ in ganzen Zahlen, und wenn die Inder auch nicht den Beweis geführt haben, dafs ihr Verfahren immer zum Ziele führen müsse, so fällt dieser Mangel für jene entlegenen Zeiten doch nicht sehr ins Gewicht. KONEN schliefst sich in seiner Darstellung des Gedankengangs der Inder im wesentlichen HANKEL an. Er hat diesen Abschnitt, wie es scheint, mit besonderer Liebe behandelt, und seine Darleguug wird wohl bei jedem Leser ein Gefühl völliger Befriedigung hervorrufen. Ob — wie HANKEL annimmt — die Lösung der Aufgabe eine ureigene Leistung der Inder gewesen ist, oder — wie CANTOR und mehr noch TANNERY behaupten — die Inder die Anregung zu derselben von den Griechen erhalten haben, ist eine Frage, die für jetzt wohl keine sichere Beantwortung finden wird, und Herr KONEN hat Recht, dafs er die Frage, nachdem er sie formuliert, wieder fallen gelassen hat.

Seitdem den Indern (etwa 600 n. Chr.) die ganzzahlige Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ gelungen war, verstrichen mehr als 1000 Jahre, bis die Beschäftigung mit derselben wieder aufgenommen wurde. Es geschah dies durch FERMAT, der 1657 nach der Sitte der Zeit die übrigen Mathematiker, speziell die englischen herausforderte, zu beweisen, dafs die Gleichnng für jeden nichtquadratischen Wert von D in ganzen Zahlen lösbar sei, und ein allgemeines Lösungsverfahren derselben zu geben. Der Beweis der Lösbarkeit wurde von den Engländern nicht erbracht. Die Auflösungsmethode, welche im wesentlichen von Lord WILLIAM BROUNCKER[1]) erdacht und von JOHN WALLIS, Professor in Oxford[2]), redigiert worden ist, wird von KONEN eingehend besprochen. Die zwei Jahre früher als die KONENsche Schrift erschienene Arbeit des Referenten über den Streit zwischen FERMAT und WALLIS, der u. a. ebenfalls die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ zum Gegenstande hatte, ist Herrn KONEN, wie er S. 29 bemerkt, erst nach Abschlufs des gröfsten Teils seiner Schrift bekannt geworden. KONEN schildert weiter EULERS Bemühungen um die Gleichung, die in der Lösung derselben durch Kettenbrüche endigen, ohne dafs freilich der Beweis der dabei zur Anweudung kommenden Fundamental-Sätze gegeben wird. Dabei erörtert er auch die Frage nach dem Ursprung der von EULER aufgebrachten unrichtigen Benennung *„PELLsche Gleichung"*, ohne zu einer befriedigenden Antwort zu gelangen. Übrigens ist es ein Irrtum, wenn

1) Es sind wohl nur Druckfehler, wenn an einigen Stellen BROUNCKER mit THOMAS BRANCKER, dem Übersetzer der RAHNschen Algebra, verwechselt wird.

2) Nicht in *London*, wie KONEN irrtümlicher Weise S. 31 sagt.



Konen S. 33 behauptet, Pell habe die englische Übersetzung[1]) der deutschen Algebra Rahns anfertigen lassen (siehe Bibliotheca Mathematica 3_3, 1902, S. 121). Der Wunsch Konens, dafs der Ausdruck *Pellsche Gleichung* endlich verschwinden und die Aufgabe der Gerechtigkeit entsprechend nach Fermat benannt werden möge, ist vom Referenten schon verschiedentlich ausgesprochen worden. Wenn sich nur nicht auch in diesem Falle zeigen wird, dafs Irrtümer ein zähes Leben haben!

Im folgenden Paragraphen behandelt Konen die einschlägigen Arbeiten von Lagrange, der sich im Jahre 1768 dem Gegenstande zuwandte, und giebt die Resultate, zu welchen derselbe schliefslich gelangte, nach Legendres Darstellung wie folgt wieder:

1) Entwickelt man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch mit nur positiven unvollständigen Quotienten, von denen a der erste sei, so ist der Kettenbruch unrein periodisch. Der Periode geht nur der eine Quotient a voraus, sie schliefst mit dem unvollständigen Quotienten $2a$, und ihre übrigen Glieder bilden eine symmetrische Reihe.

2) Die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ ist stets ganzzahlig lösbar, und zwar genügen ihr Zähler und Nenner jedes zum Quotienten $2a$ gehörigen Näherungsbruchs, wenn die symmetrische Reihe ein mittleres Glied hat, im entgegengesetzten Falle aber nur Zähler und Nenner des zu $2a$ gehörigen Näherungsbruchs der zweiten, vierten u. s. w. Periode.

3) Man erhält auf diese Weise *alle* Lösungen der Gleichung und zwar der Gröfse nach geordnet.

Konen geht sodann zu den Fortschritten über, welche die Theorie der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ durch Gauss erfahren hat, der sie als Spezialfall der Gleichung $t^2 - Du^2 = m^2$ behandelt, ferner durch Dirichlet und Jacobi, die 1837 unabhängig von einander gefunden haben, dafs dieselbe mit Hülfe der Kreisteilungstheorie als möglich bewiesen und aufgelöst werden kann, endlich durch verschiedene andere Mathematiker, wie Stern, Minnigerode, Roberts, welche die Zulässigkeit von Kettenbrüchen mit negativen unvollständigen Quotienten näher untersucht haben.

Es war hier natürlich nur möglich, eine kurze Übersicht über den reichen Inhalt der Konenschen Schrift zu geben, die überall erkennen läfst, dafs der Verfasser den Gegenstand in allen seinen Einzelheiten beherrscht und gut darzustellen verstanden hat. Mit dem von dem russischen Mathematiker Schapira vorgeschlagenen und von Konen adoptierten Ausdruck „gemeinteilig" für „mit gemeinschaftlichen Divisoren" kann sich der Referent freilich nicht befreunden; derselbe hält es auch für recht unwahrscheinlich, dafs dieser Ausdruck in die deutsche Sprache aufgenommen werden wird.

1) In meiner Arbeit: *Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben* im vorigen Heft dieser Zeitschrift ist Zürich unter den Städten genannt, welche die englische Übersetzung nicht besitzen. Es ist das ein Irrtum, in Zürich befinden sich sogar 2 Exemplare des seltenen Buches, das eine in der Stadtbibliothek, das andere in der Bibliothek der naturforschenden Gesellschaft. Meine falsche Notiz beruht auf einer unrichtigen Auskunft, die ich aus Zürich erhalten habe, und die dadurch etwas entschuldigt wird, dafs die Kataloge beider Bibliotheken das Buch nicht unter dem Namen „Brancker", sondern unter „Rahn" enthalten.

Frankfurt a. M. G. Wertheim.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
12 (1902).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
3_3 (1902): 1. — [Recension der Bände 1_3—2_3:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 659—665. (H. Bosmans.)

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [3
1_2 : 6. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Procès-verbaux sommaires du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, rédigés par E. Duporcq. Paris 1901. [4
8°, 17 S.

Annales internationales d'histoire. Congrès de Paris 1900. 5e section. Histoire des sciences. Paris 1901. [5
8°, (7) + 348 S. — Die Beiträge zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften sind in diesem oder im vorhergehenden Schriftverzeichnis besonders erwähnt.

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Recension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 309—310. (A. Gutzmer.) [6

Eneström, G., Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik. [7
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 1—6.

Jacobi, M., Die Bedeutung der modernen historischen Forschung in den mathematischen Wissenschaften. [8
Das Weltall 2, 1902, 89—91. — Der Titel verspricht zuviel: der Artikel behandelt eigentlich die Bedeutung der Kenntnis der astronomischen Mythen der Urvölker.

Müller, Felix, Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Litteratur und die mathematisch-historische Forschung. [9
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 1901—1902, 17—18.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. = 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 137—139. (A. Sturm, W. Schmidt.) = 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 140—142. (A. Sturm, H. Bosmans.) = 3^2 (1900—1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 142—143. (G. Eneström.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 15—18. (G. L.) — Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 128. (E. Lampe.) [10

Loria, G., La trasfigurazione di una scienza (1900). [Recension:] Jornal de sc. mathem. 14, 1901, 187. (G. T.) [11

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, traduite par J. Mascart (1902). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 699—700. — Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 146—148. (G. Eneström.) — Revue scient. 17_4, 1902, 400—401. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1902, 353—355. (D. E. Smith.) [12

Klimpert, R., Storia della geometria. Traduzione di P. Fantasia (1901). [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, 116—118. (G. L.) [13

Buzzi, O., La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione. [14
Bollett. di matem. (Bologna) 1, 1900, 19—23, 51—55, 114—117, 168—171, 209—212, 320—333, 362—366; 2, 1901, 115—117.

Vivanti, G., Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. [15
Giorn. di matem. 38, 1900, 265—314; 39, 1901, 317—365. — Abdruck einer 1894 publicierten Arbeit. — Auch besonders herausgegeben (Napoli 1901; (3) + 103 + (1) S.)

Fehr, H., Les extensions de la notion de nombre dans leur développement logique et historique. [16
L'enseignement mathém. 4, 1902, 16—27. — [Bemerkungen:] L'enseignement mathém. 4, 1902, 126—127. (G. Eneström.)

Gerland, E. und Traumüller, F., Geschichte der physikalischen Experimentierkunst (1899). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 436. [17

***Frobenius, L.,** Die Mathematik der Oceanier. Berlin, Dümmler 1900. [18
8°, 35 S.

b) Geschichte des Altertums.

Ginzel, F. K., Die astronomischen Kenntnisse der Babylonier und ihre kulturhistorische Bedeutung. [19
Beiträge zur alten Geschichte, herausg. von C. F. Lehmann 1, 1902, 1—25, 189—211, 349—380 + Karte.

Kugler, F. X., Zur Erklärung der babylonischen Mondtafeln. Astronomische Masse der Chaldäer. [20
Zeitschr. für Assyriologie 15, 1901, 178—209, 383—392. — [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 665—666. (H. Bosmans.)

***Thirion, J.,** L'évolution de l'astronomie chez les Grecs. Paris, Gauthier-Villars 1900. [21
12°, 286 S.

***Schmidt, M. C. P.,** Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums. III. Leipzig, Dürr 1901. [22
8°, XI + 235 S. — [4, 20 *M*] — [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 32, 1901, 658—659. (E Mayer.)

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro V. L'aritmetica dei Greci. [23
Modena, Accad. d. sc., Memorie 12_3, 1902, 217—411. — [Recension der Teile III—IV:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 666—668. (H. Bosmans.)

Galllan, M., Sur les problèmes mécaniques attribués à Aristote. [24
Congrès de l'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 101—107. — Mit Bemerkungen von P. Tannery (S. 108—111).

Tucker, R., Allmann, G. J., Eumorfopoulos, St., Euclid I, 32 Corr. [25
Nature 63, 1900, 58, 106—107, 157. — Über den Ursprung der in einigen Euklid-Ausgaben vorkommenden Zusätze zu Elem. I, 32.

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher (1901). [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 8_2, 1902, 216—218. (J. L. Coolidge.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 149—150. (J. Boyer.) [26

Schmidt, W., Noch einmal Archimedes' Ephodikón. [27
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 143—144.

Hoppe, E., Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien. Hamburg 1902. [28
4°, 9 S. — Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Wilhelm-Gymnasiums in Hamburg 1902.

***Jagiarz, A.,** Heron z Aleksandryi i jego problemat powierzchni trójkąta. Krakow 1901. [29
4°, 14 S. — [Recension:] Wiadomości matem. 6, 1902, 121. (T. Łopuszański.)

Heiberg, J. L., Anatolius sur les dix premiers nombres (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 668—669. (H. Bosmans.) [30

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. [31
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 7—62.

c) Geschichte des Mittelalters.

Mansion, P., Sur le commentaire d'Anaritius relatif aux éléments d'Euclide. [32
Bruxelles, Soc. scient., Annales 24:1, 1900, 47—49.

Tannery, P. et Clerval, Une correspondance d'écolâtres du XIe siècle (1900). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 669—673. (H. Bosmans.) [33

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. I. [34
Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. 12, 1902. X + 336 S. — [16 *M*] — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 951—953. (M. Cantor.)

Vaux, C. de, Note sur les mécaniques de Bédi ez-Zaman el-Djazari et sur un appareil hydraulique attribué à Apollonius de Perge. [35
Congrès d'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 112—120.

Wertheim, G., Die „Numeri congrui" et „congruentes". [36
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 141—145. — Anfrage.

Björnbo, A. A., Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert. [37
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 63—75.

***Deichmüller, F.,** Die astronomische Bewegungslehre und Weltanschauung des Kardinals Nikolaus von Cusa [38

Bonn, Niederrhein. Gesellsch., Sitzungsber. 1901. — [Recension:] Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 101—102. (S. Günther.)

d) Geschichte der neueren Zeit.

Saavedra, E., Note sur l'histoire de la résolution des équations cubiques [39
Congrès de l'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 58—60. — Mit Bemerkungen von P. Tannery (S. 61—63).

Günther, S., Die Kompromiss-Weltsysteme des XVI., XVII. und XVIII. Jahrhunderts. [40
Congrès de l'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 121—145.

Friezo, G., De numeris libri duo authore J. Noviomago (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 148 (G. Loria.) — Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1211. [41

Eneström, G., Über Gleichungen, die auf Null gebracht sind. [42
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 145. — Anfrage.

Macri, G., Francesco Maurolico nella vita e negli scritti (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 148—150. (G. Vivanti.) [43

Grefse, H., Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts (1901). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 39—70. (F. Unger.) [44

Gravelaar, N. L. W. A., Stevins Problemata geometrica (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 673—678. (H. Bosmans.) [45

***Eckert, H.,** Tycho Brahe in Prag MDIC—MDCI. Zur Erinnerung an sein vor 300 Jahren erfolgtes Ableben zusammengestellt und mit erläuternder Einleitung versehen. Prag 1901. [46
25 Photographien mit Text. — [Recension:] Das Weltall 2, 1902, 105—108. (L. Weinek.)

Bosmans, H., Le traité des sinus de Michiel Coignet (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 31—32. (A. F.) [47

Gravelaar, N. L. W. A., John Napiers werken (1899). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 150—152. (M. Koppe.) [48

Bosmans, H., Le degré du méridien terrestre mesuré par W. Snellius (1900). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1901, 31. (A. F.) [49

Wertheim, G., Ein Beitrag zur Beurteilung des Pietro Antonio Cataldi. [50
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 76—83.

Goldbeck, E., Galileis Atomistik und ihre Quellen. [51
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 84—112.

Tannery, P., Lettres inédites adressées au père Mersenne. [52
Congrès d'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 311—343. — [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 678—679. (H. Bosmans.)

Amodeo, F., Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. [53
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 31, 1902. 60 S.

Wertheim, G., Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben. [54
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 113—126.

Favaro, A., Il metro proposto come unità di misura nel 1675 (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 680—682. (H. Bosmans.) [55

Tannery, P., Notes sur les manuscrits français de Munich 247 et 252 et de Vienne 7049—7050 [contenant des traités de mathématiques et des lettres de mathématiciens du 17e siècle]. [56
Congrès d'histoire des sciences à Paris 1900 (1901), 297—310.

Loria, G., Pseudo-versiera e Quadratrice geometrica. [57
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 127—130.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 1_3, 1902, 623—626. (Ch. J. de la Vallée Poussin.) — Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 749. — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, 40—41. (H. B.) [58

Vacca, G., Sur le mathématicien anglais Braikenridge. [59
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 145. — Antwort auf eine Anfrage.

***Vogler, A.,** Johann Heinrich Lambert und die praktische Geometrie. Festrede. Berlin 1901. [60
8°. — [1 *M.*]

***Streit, H.,** Die wissenschaftlichen Forschungen und Entdeckungen des älteren Seebeck auf dem Gebiete der Optik und Wärmelehre. Schlawe 1901. [61
4°, 15 S. + 1 Taf. — Programm des Progymnasiums in Schlawe. — [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 95. (Stegemann.)

Fehr, H., Sur J. R. Argand. [62
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 115. — Antwort auf eine Anfrage.

***Fliser, R.,** Die Methoden der analytischen Geometrie in ihrer Entwickelung im 19. Jahrhundert. Braunau 1900. [63
4°, 51 S. — Programm.

Günther, S., Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert (1901). [Recension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 65—68. (Dannemann.) [64

***Föppl, A.,** Die Mechanik im 19. Jahrhundert. Vortrag. München 1902. [65
8°, 25 S. — [0, 80 *M.*]

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle (1900). [Recension:] Arch. der Mathem. 3_3, 1902, 62. (M. Cantor.) — Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 876. [66

Gauss, K. F., General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel. Princeton 1902. [67
4°, V + (1) + 126 + (1) S. — [1, 75 doll.] — [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin. 8_2, 1902, 352. (E. O. Lovett.)

Vincent, J., Aperçu de l'histoire de la météorologie en Belgique. II. [68
Bruxelles, Observatoire, Annuaire météorologique 1902, 43—180.

Picard, E., Le premier chapitre d'un rapport sur quelques progrès récentes dans les sciences. [69
Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 37—53.

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятели исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Ольри Теркемъ. [70

Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 243—251. — Bobynin, V. V., Die Litteratur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Olry Terquem.

Valentin, G., Über einen anscheinenden Defekt im sechsten Bande von Boncompagnis „Bullettino". [71
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 131—132.

Wölffing, E., Abhandlungsregister [aus dem Gebiete der angewandten Mathematik] 1900—1901. [72
Zeitschr. für Mathem. 47, 1902, 287—320.

Schotten, H., J. C. V. Hoffmann. [73
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 4—9 + Porträt.

e) Nekrologe.

Eugenio **Beltrami** (1835—1900). [74
Wiadomości matem. 6, 1902, 1—55 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (Polnische Übersetzung des Nekrologes von E. Pascal in den „Rendiconti" des „Istituto Lombardo" 1901.)

Alfred **Cornu** (1841—1902). [75
Nature 66, 1902, 12—13. (S. P. Thompson.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [76
Mathem. Ann. 55, 1901, 337—385. (M. Noether.)

Ernst Gustav **Kirch** (1841—1901). [77
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 188—189. (F. Lorenz.)

Henry **Safford** (1836—1901). [78
Das Weltall 2, 1901, 72.

Franz **Schmidt** (1827—1901). [79
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 141—146 [mit Porträt]. (P. Stäckel.)

Franz Xaver **Stoll** (1834—1902). [80
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 143—144. (Kieffer.)

Georg Heinrich **von Wyss** (1862—1900). [81
Schweizerische naturf. Gesellsch., Nekrologe 1901. 3 S. [mit Schriftverzeichnis]. (F. Rudio.)

Karl **Zelbr** (1854—1900). [82
Das Weltall 2, 1901, 72.

f) Aktuelle Fragen.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. I, II (1900—1901). [Recension:] Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 242. (V. V. Bobynin.) — Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 11—12. — Zeitschr. für mathem. Unterr 33, 1902, 80—81. (W. Ahrens.) [83

Ceretti, U., Per il dizionario di matematica. [84
Periodico di matem. 4_2, 1902, 269—274.

Padoa, A., Per la compilazione di un dizionario di matematica. [85
Periodico di matem. 4_2, 1902, 262—269.

Wölffing, E., Über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften. [86
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 133—136.

Fricke, R., Über den mathematischen Hochschulunterricht. [87
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 236—247.

Loria, G., Donne matematiche. Lettura. [88
Mantova, Accademia Virgiliana, Memorie 1902. 26 S. — Erörterung der Frage, ob die Frauen fähig sind, der mathematischen Forschung wirkliche Dienste zu leisten; der Verf. gelangt zu einem negativen Resultate.

Бобынинъ, В. В., Исторія, философія и библіографія физико-математическихъ наукъ на Парижскихъ международныхъ конгрессахъ 1900 года. [89
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1901, 193—204, 225—242. — Bobynin, V. V., Geschichte, Philosophie und Bibliographie der physisch-mathematischen Wissenschaften an den internationalen Kongressen in Paris 1900.

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Hamburg 1901.] [90
L'enseignement mathém. 4, 1902, 44—51. (J. Schröder.) — Zeitschr. für mathem Unterr. 32, 1901, 661—663.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdocent H. Andoyer in Paris zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor D. A. Gravé in Charkoff zum Professor der Mathematik an der Universität in Kieff.

— Privatdocent E. Haentzschel in Berlin zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule daselbst.

— Privatdocent H. Hohenner in München zum Professor der Geodäsie an der technischen Hochschule in Stuttgart.

— R. J. Paranjpye zum Professor der Mathematik am „Fergusson college" in Poona (Indien).

— „Instructor" B. Porter in New Haven zum Professor der Mathematik an dem „Yale university" daselbst.

— F. Purser zum Professor der Physik am „Trinity college" in Dublin.

— Privatdocent K. Zsigmondy in Wien zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule daselbst.

Todesfälle.

— Alfred Cornu, Professor der Physik an der „Ecole polytechnique" in Paris, geboren den 6. März 1841, gestorben in Chausonnière bei Romorantin den 12. April 1902.

— Immanuel Lazarus Fuchs, Professor der Mathematik an der Universität in Berlin, geboren zu Moschin bei Posen den 5. Mai 1833, gestorben in Berlin den 26. April 1902.

— Peter Sergejewitch Nasimoff, Professor der Mathematik an der Universität in Kasan, gestorben in Kasan den 18. Dezember 1901.

Demnächst erscheinende Werke.

— Herr A. von Braunmühl hat jetzt den 2. Teil seiner *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* beendet und der Druck desselben wird demnächst beginnen.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Prof. A. Macfarlane has this year also delivered (March 14—25) at the „Leigh university" a course of six lectures on British mathematicians of the nineteenth century, the subjects having now been: J. C. Maxwell, H. J. S. Smith, W. J. M. Rankin, J. J. Sylvester, P. G. Tait, W. Thomson (Kelvin).

— Prof. A. Gutzmer in Jena hat im Sommersemester 1902 eine einstündige Vorlesung über die geschichtliche Entwickelung der Analysis gehalten.

— Prof. P. Stäckel in Kiel hat im Sommersemester 1902 eine Vorlesung über Abels Leben und Werke gehalten.

— At the „Cornell university" (Ithaca), Prof. J. I. Hutchinson will deliver in the summer session (July 7th—August 16th) 1902 a course of lectures (five hours) on the history of mathematics.

— At the „university of California" (Berkeley), Prof. I. Stringham has announced for the second semester of the academic year 1902—1903 a course of lectures (three hours each weak) on the history of mathematics.

Vermischtes.

— Le bureau français du catalogue international de la littérature scientifique a commencé à publier une *Bibliographie scientifique française* contenant les titres d'écrits scientifiques parus en France à partir du 1er janvier 1902.

— Le congrès international d'histoire des sciences mathématiques, physiques et naturelles, qui devrait se tenir en 1902 à Rome et dont nous avons parlé ailleurs (voir Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 453), a été renvoyé à une autre année.





E. de Jonquières

ar la sommatio

ns une petite
l'Intermédiaire des M
3, 1902, p. 2
donnée par
temps il a
dans la note au
sous mon nom
être corrig
soutenir mon
au XVIIe siècle
Grecs ou Romains
expliquer
laquelle les an
entiers à partir
Diophante de Nicomaque
suite de nom
carré (ib. II. 28
donnait
rapporté à l'ou
démonstration de
BACHET
polygones
une démonst
mais ne cite
car, si
carrés
autre
entiers
Hypsi
la
et
la
voulu
doit,
je crois
pousse
pas
On
MAQUE,
men-
[illegible]



Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité.

Par Paul Tannery à Pantin.

Dans une petite remarque sur les pages 519—520 du premier tome des *Vorlesungen* de M. Cantor, M. Eneström a soulevé (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 239) la question de savoir comment a été déduite la formule donnée par Epaphroditus pour la somme des cubes entiers, et en même temps il a exprimé un doute relatif à l'interprétation du mot *veteres* dans la note au bas de la page 520 que M. Cantor a bien voulu mettre sous mon nom (le dernier mot latin, imprimé *erorumdem*, doit, bien entendu, être corrigé en *eorumdem*). Tant qu'à ce doute, je crois devoir soutenir mon interprétation, car je ne pense pas qu'on puisse trouver, au XVIIe siècle, un exemple où *veteres* désignerait, non pas les anciens, Grecs ou Romains, mais des auteurs du XVIe siècle. On peut d'ailleurs expliquer de deux façons l'origine de l'assertion de Pascal, d'après laquelle les anciens auraient enseigné à trouver la somme des cubes des entiers à partir de l'unité. Ou bien Pascal se réfère simplement à la proposition de Nicomaque d'après laquelle une suite de cubes entiers équivaut à une suite de nombres impairs (= Boetius, *Arithm.* II, 39), c'est à dire à un carré (ib. II, 28); pour un esprit aussi clair que celui de Pascal, cette proposition donnait immédiatement la sommation des cubes. Ou bien il s'en sera rapporté à l'opinion du premier auteur qui, en France, ait donné la démonstration de cette sommation et de la proposition de Nicomaque, à savoir Bachet dans son édition de Diophante (*Appendix ad librum de numeris polygonis* II, prop. 25 et 27). Sur cette dernière, Bachet mentionne une démonstration antérieure de Maurolycus (*prop. 62 arithmeticorum*), mais ne cite point Stifel, qui ne semble guère avoir été connu en France; car, si Frenicle en parle (*Œuvres de* Fermat II, p. 182) à propos des carrés magiques, Fermat ne le connaissait point (ib. p. 188). Bachet, d'autre part, ne revendique point d'invention dans son *Appendix*, où il cite, comme sur la prop. IX de Diophante, *De multangulis numeris*: „in excerptis nondum editis Apofroditi et Betrubi Rufi architectonis, itemque in Hygini gromatico". Cette citation d'Hyginus se rapporte sans

doute à l'édition de Scriverius (*V. Inl. Fl. Vegetii Comitis aliorumque aliquot veterum de re militari libri.* Ex officina Plantiniana Raphelengii, 1607, p. 69), où l'on trouve la construction des nombres polygones de côté donné et la solution du problème inverse. Dans ses extraits d'Epaphroditus et Vitruvius, Bachet a dû trouver également, avec la sommation des cubes, celle des polygones successifs, qu'il démontre aussi dans son *Appendix*; quoiqu'il ne le dise point expressément, il devait donc considérer ces problèmes comme ayant été résolus par les anciens, et son opinion, transmise oralement, a pu parvenir jusqu'à Pascal.

Sur le fond de la question soulevée par M. Eneström, à savoir si la sommation des cubes a été déduite, comme le pense M. Cantor, de la proposition de Nicomaque par un auteur postérieur à l'invention de cette proposition, ou sous d'autres circonstances, j'estime que la découverte, pour la somme des cubes et pour la proposition de Nicomaque, a été simultanée et appartient au même mathématicien. Je pense d'ailleurs qu'elle est très antérieure aux agrimenseurs et à Nicomaque; et peut-être trouverions-nous la sommation des cubes dans Archimède (à l'occasion, par exemple, du centre de gravité du cône ou de la pyramide), si nous avions toutes ses œuvres.

Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

Die lateinische Übersetzung des „Buches der drei Brüder" durch GERHARD VON CREMONA wurde bekanntlich von M. CURTZE im **49.** Bande der Nova Acta der k. Leopold.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle 1885) hauptsächlich nach dem Basler Codex F. II 33 mit Einleitung und Kommentar herausgegeben. Dieser Codex ist sehr inkorrekt, so dafs der lateinische Text manchmal recht unverständlich ist; leider war das viel bessere Ms. im Pariser Codex 9335 Herrn CURTZE nicht zugänglich, er konnte nur die Anfangs- und Endworte, sowie einen Teil des 7. Satzes benutzen.[1]) Es wird daher nicht unnötig erscheinen, wenn auch nicht das ganze Buch, so doch einige Partien desselben nach dem arabischen Text in deutscher Übersetzung hier wiederzugeben; zu einigen Sätzen der Abhandlung fand ich mich veranlafst, kurze Bemerkungen hinzuzufügen, von diesen Sätzen habe ich jeweilen nur die Titel übersetzt.

Soviel mir bekannt, sind von dieser Schrift vier vollständige arabische Mss. vorhanden, in Berlin (Mf. 258, 16° und Mq. 559, 14°), in Paris (2467, 3°) und in Oxford (URI, 960), und Bruchstücke daraus im India Office (1043, 2° und 3°). Von diesen Mss. standen mir zur Verfügung die beiden Berliner (vgl. Biblioth. Mathem. 12_2, 1898, p. 73—78), ferner hatte Herr Baron CARRA DE VAUX in Paris die Güte, mir über das Pariser Ms. die gewünschten Aufschlüsse zu geben; ich spreche ihm hier auch öffentlich für seine Gefälligkeit den besten Dank aus. Nach diesen Aufschlüssen ist das Pariser Ms. so gut wie identisch mit den beiden Berliner Mss., nur geringfügige Abweichungen kommen vor, die den Abschreibern zur Last gelegt werden müssen.

In welcher Beziehung steht nun der arabische Text dieser Mss. zu der lateinischen Übersetzung des GERHARD VON CREMONA? Eine nur oberflächliche Vergleichung beider zeigt schon, dafs der arabische Text ziem-

1) Vergl. über diese Mss. die Einleitung von M. CURTZE in seiner Ausgabe, sowie A. A. BJÖRNBO, *Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert*, in der Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 63—75, und P. TANNERY, *Sur „le liber augmenti et diminutionis" compilé par* ABRAHAM, ibid. 2_3, 1901, p. 45—47.

lich kürzer ist als die lateinische Übersetzung, wesentlich kürzer allerdings nur am Anfang und am Schlusse, im übrigen sich nur einer knapperen, weniger weitschweifigen Ausdrucksweise bedienend. Diese Kürznngen können keineswegs blofs den Abschreibern zugeschrieben werden, sondern müssen uns notwendig zn dem Schlnsse führen, dafs der noch vorhandene arabische Text nicht mehr der ursprüngliche der Söhne Mûsâs sein könne, sondern eine verbesserte und gekürzte Redaktion desselben darstelle. Wir vermuten nun und dies mit grofser Wahrscheinlichkeit, dafs diese Redaktion von Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî herstamme, znmal sich diese Abhandlung in den Berliner Codices, sowie auch im Pariser, nnter solchen Naṣîrschen Redaktionen alter, allerdings hauptsächlich griechischer[1]) Werke befindet. Ich glanbte in dieser Ansicht noch bestärkt zu werden durch den Schlufs der Berliner Mss., in welchem ich die Jahreszahl *ḥnh* (= 658) zu lesen glaubte; es ist dies die Zeit (1259/60), in der Naṣîr ed-dîn seine Redaktionen alter Werke vorgenommen hat; ich hielt mich hierzu um so mehr berechtigt, als das Berliner Ms. Mq. 559 hinter jenen Buchstaben, die allerdings dort *hnh* lauten, noch das Wort *el-hiǵri*[2]) (sic!) hat. Herr Carra de Vaux aber sieht in jenem Wort keine Jahreszahl, sondern liest es *ǵunh* (= *asile, abri*), nnd übersetzt dann die Schlufsformel im Verein mit den andern, in allen Mss. undeutlichen Worten durch: *„dans mon seigneur (est) accès, asile"*.

Sei dem wie ihm wolle, der noch vorhandene arabische Text kann nicht derjenige sein, der dem Gerhard von Cremona vorgelegen hatte, sondern er ist eine bessere Redaktion desselben, die wir, wenn auch die obigen Buchstaben nicht als Jahreszahl zn lesen sind, doch mit grofser Wahrscheinlichkeit dem Naṣîr ed-dîn zuschreiben dürfen.

Was das Thorner Fragment einer lateinischen Übersetzung unserer Abhandlung anbetrifft, das auch von Herrn Curtze bei seiner Ausgabe benutzt worden ist, so glaubte ich zuerst, dieses könnte die direkte Übersetzung der Redaktion des Naṣîr ed-dîn sein, allein nach den Stellen, die Herr Curtze aus diesem Fragment zitiert[3]), zu schliefsen, ist dasselbe noch kürzer als der redigierte arabische Text, immerhin mag der letztere dem Verfasser des Thorner Fragmentes zn Grunde gelegen haben.

„Das Buch der Kenntnis der Ausmessung der ebenen und sphärischen Figuren von den Söhnen Mûsâs, Muhammed, el-Hasan und Ahmed.[4]) [Es enthält] 18 Sätze."

1) Immerhin befindet sich unter diesen Abhandlungen auch die Redaktion der *Data* des Tâbit b. Qorra durch Naṣîr ed-dîn.

2) *el-sane el- hiǵrije* heifst *„das Jahr der Hiǵra (Flucht)"*.

3) Vergl. die Noten auf p. 116 (12), 117 (13), 125 (21) etc. der Curtzeschen Ausgabe.

4) Was im Folgenden in eckige Klammern geschlossen ist, fehlt im arabischen

„*Anfang (Einleitung) des Buches*: Die Länge ist die erste der Dimensionen, welche die Figuren (Körper) begrenzen, und sie ist das, was sich geradlinig nach beiden Seiten zugleich erstreckt, also kann aus ihr nichts (d. h. kein Gebilde) aufser der Länge (besser wäre „Linie") entstehen. Wenn sich aber die Linie[1]) seitlich, d. h. in anderer Richtung als ihrer eigenen ausdehnt, so heifst diese Ausdehnung die Breite; diese ist also nicht, wie Viele glauben, die Linie, welche die Fläche einschliefst nach der von der Länge abweichenden Richtung, denn wenn es so wäre, so hätte die Fläche nicht nur Länge und Breite[2]), und die Breite wäre auch Länge, weil die Breite nach der Ansicht jener Leute eine Linie ist und die Linie eine Länge; diese Dinge hat schon Euklides richtig gestellt, wenn er sagt: Die Linie hat (wörtl. „ist") nur Länge und die Fläche nur Länge und Breite. Was die Höhe anbetrifft, so ist sie die Ausdehnung in anderer Richtung als nach Länge und Breite, und diejenigen, welche meinen, dafs die Breite eine Linie sei, fassen auch die Höhe als Linie auf, welcher Irrtum auf gleiche Weise widerlegt wird wie vorher. Diese drei Ausdehnungen bestimmen (wörtl. „begrenzen") das Volumen jedes Körpers und den Inhalt jeder Fläche, und das Verfahren für die Bestimmung ihrer Quantitäten besteht nur in der Vergleichung [derselben] mit der Flächen- und Körpereinheit. Die Flächeneinheit, mit welcher die Fläche gemessen wird, ist eine rechtwinklige Fläche von der Länge eins und der Breite eins, und die Körpereinheit, mit welcher der Körper gemessen wird, ist ein rechtwinkliger Körper von der Länge eins, der Breite eins und der Höhe eins. Die Gröfsen, mit denen die Flächen und die Körper gemessen werden, müssen notwendig bei ihrer Aneinanderfügung (wörtl. „Verdoppelung") gut zusammenpassen, sodafs nicht Zwischenräume übrig bleiben, die durch sie nicht mehr ausgefüllt werden können[3]); ferner ist nötig, dafs die Unterscheidung zwischen dem was der Ausmessung fähig ist, und dem was derselben nicht fähig ist, leicht sei, und nichts ist geeigneter zur Erleichterung dieser Unterscheidung, als dafs die Eigenschaft der Einheit, mit der gemessen wird, in ihrer Einzelheit und Zusammensetzung dieselbe sei, damit die Arbeit für die Unterscheidung dessen was möglich ist, von dem was nicht möglich ist (nämlich

---

Text; was in runde Klammern geschlossen ist, erläutert das Vorhergehende oder drückt es besser aus.

1) Der arabische Text hat hier *saṭḥ* = Fläche.

2) Wie dies der Abschreiber oder Redaktor der Abhandlung versteht, zeigt folgende Randbemerkung im Ms. Mq. 559: „d. h. die Fläche hätte Längen und Breiten" (nicht nur eine Länge und eine Breite).

3) Wörtlich, wie auch Gerhard von Cremona übersetzt: „*in die sie nicht kommen können*".

„auszumessen"), in allen Fällen dieselbe sei. Diese Eigenschaft wird aber nur gefunden beim Quadrat, denn dasselbe ändert, wenn es verdoppelt wird, nur seine Gröfse, es bleibt aber die Eigenschaft seiner Viereckigkeit[1]) bestehen; ebenso ist das Viereck mit rechten Winkeln (d. h. das Quadrat) auch die gröfste der viereckigen Figuren. Das ist der Grund, weshalb man diese Figur und keine andere als Mafseinheit gesetzt hat."

Vergleichen wir diese Einleitung mit derjenigen der Übersetzung des Gerhard von Cremona, so sehen wir, dafs die unsrige wesentlich kürzer ist; es fehlt in ihr alles was in der Curtzeschen Ausgabe von Anfang an bis p. 116 (12), Z. 10 steht, ebenso ist der Schlufs von p. 118 (14), Z. 5 bis Z. 18 in die wenigen Worte zusammengefafst: „ebenso ist das Viereck mit rechten Winkeln ...... als Mafseinheit gesetzt hat". Das übrige ist ziemlich übereinstimmend und zeigt nur in den Worten auf p. 117 (13), Z. 3—7 und Z. 17—21 einige Abweichungen. Das Thorner Ms. beginnt an derselben Stelle wie das arabische (vergl. oben p. 260).

I. „*In jedem einem Kreise umbeschriebenen Vieleck ist das Produkt aus dem Halbmesser des Kreises in den halben Umfang des Vielecks die Fläche desselben.*"

Arabischer Text und lateinische Übersetzung des Beweises weichen nur sehr unwesentlich von einander ab; am Schlusse aber, nach den Worten: „Aus diesem erkennt man auch, dafs der Inhalt jedes Körpers, der eine Kugel umschliefst, gleich ist dem Produkt aus dem Halbmesser der Kugel in den dritten Teil der Oberfläche des sie umschliefsenden Körpers; dieser Inhalt ist gröfser als der Inhalt der Kugel", folgt in den arabischen Mss. der Zusatz: „*Ich sage: Dieses kann nur bewiesen werden durch die Voraussetzung der Teilung des Körpers in Pyramiden, deren Spitzen der Mittelpunkt der Kugel ist und deren Grundflächen die Oberfläche des Körpers bilden; es steht dann der Halbmesser der Kugel jeweilen senkrecht auf ihren Grundflächen, und es ist also der Inhalt des Körpers gleich dem Inhalt aller dieser Pyramiden [zusammen].*"

Dieser Zusatz ist jedenfalls von dem spätern Redaktor dieser Abhandlung; mit Recht macht derselbe auf die schwache Seite dieses Schlusses von dem Kreis mit umbeschriebenem Vieleck auf die Kugel mit umbeschriebenem Körper aufmerksam.

III. „*Wenn eine Gerade von bestimmter Länge und ein Kreis gegeben sind, und die Gerade kürzer ist als der Kreisumfang, so ist es möglich, in den Kreis hinein ein Vieleck zu zeichnen, dessen Umfang länger ist als die gegebene Gerade; ist aber die Gerade länger als der Kreisumfang, so ist es*

1) Das Wort *quadratura* in der lateinischen Übersetzung pafst wohl nicht recht für diesen Begriff.

möglich, um den Kreis herum ein Vieleck zu zeichnen, dessen Umfang kürzer ist als die gegebene Gerade.“

Nach dem Beweise, der im allgemeinen, bisweilen etwas kürzere Fassung ausgenommen, mit demjenigen der lateinischen Übersetzung übereinstimmt, stehen noch folgende Worte: „*Ich sage: Dies stützt sich auf die Existenz eines Kreises, dessen Umfang einer Geraden von bestimmter, abgegrenzter Länge gleich sei, dies (d. h. die Möglichkeit dieser Annahme) ist aber nirgendwo bewiesen.*“ Naṣîr ed-Dîn will also wohl hiermit sagen, es gebe keine gerade Linie, die genau gleich dem Umfang eines gegebenen Kreises sei, was eben im Beweise vorausgesetzt wird. Diese Annahme kann immerhin unbeschadet der Richtigkeit des Beweises gemacht werden.

IV. „*In jedem Kreis ist das Produkt aus seinem halben Durchmesser in den halben Umfang die Fläche desselben.*“

Auch hier lasse ich die Übersetzung des Beweises weg und bemerke nur, dafs in einer Randglosse des Ms. Mq. 559 der Beweis gegeben ist, dafs der Kreis von allen Figuren von gleichem Umfang die gröfste Fläche hat; auch der analoge Satz über die Kugel ist angeführt.

VI. „*Wir wollen nun das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang [des Kreises] nach dem Verfahren des* Archimedes *nachweisen, denn bis jetzt ist kein anderer Weg der Auffindung desselben zu uns gelangt als jener, und wenn derselbe auch nicht zu einer solchen Kenntnis des Mafses des einen durch das andere führt, dafs mit demselben vollständig genau gerechnet werden kann, so läfst er uns doch bis zu jeder nur wünschbaren Annäherung an dieses Mafs gelangen.*“

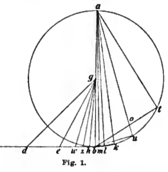


Fig. 1.

Der lateinische Text stimmt mit dem arabischen fast wörtlich überein, ich lasse daher auch hier die deutsche Übersetzung weg; ich habe nur einen Fehler zu verbessern, der sich in den Zeilen 26—28 von p. 128 (24) der lateinischen Übersetzung vorfindet, es heifst dort (vgl. Fig. 1): *sed proporcio duarum linearum ta, ab coniunctarum ad tb est sicut proporcio ab ad bg et proporcio ab ad bg est sicut proporcio au ad bu.* Das „*ab* ad *bg*“ ist natürlich unrichtig, es scheint aber, dafs Herr Curtze diesen Fehler noch schlimmer gemacht hat, als er im Original steht, denn nach der Fufsnote hat dieses „*at* ad *tg*“ statt „*ab* ad *bg*“, und dies ist bis auf den letzten Buchstaben *g* richtig, es sollte nämlich heifsen: „*at* ad *to*“, und der Buchstabe *o* mufs im

Schnittpunkt von bt und au stehen, wie es das arabische Ms. in der That zeigt.[1])

VII. „*Multipliziert man die halbe Summe der drei Seiten eines jeden Dreiecks mit ihrem Überschufs über jede der drei Seiten, d. h. zuerst mit ihrem Überschufs über die eine Seite, dann mit demjenigen über die zweite, und hierauf mit demjenigen über die dritte, so ist das Ergebnis gleich dem Quadrat seiner Fläche* (wörtl. „*gleich dem Produkt seiner Fläche in sich selbst*“).“

Da beide Beweise (VII^a und VII^b), die von diesem Satze gegeben werden, bisweilen etwas abweichen von denen der lateinischen Übersetzung, so gebe ich hier beide in deutscher Übersetzung wieder, indem ich der Kürze halber die hier etwas häufig vorkommenden Proportionen und Produkte in die moderne Form übertrage.

„Es sei (Fig. 2) das Dreieck abg, wir zeichnen in dasselbe den einbeschriebenen Kreis, er sei dzw und sein Mittelpunkt e; wir ziehen ed, ez, ew nach den Berührungspunkten, ebenso ae, so ist klar, dafs ad und aw einander gleich sind, ebenso dafs $bd = bz$ und $gw = gz$[2]); ferner ist ersichtlich, dafs jede der beiden Linien ad und aw der Überschufs der halben Summe der drei Seiten über die Seite bg ist, jede der beiden Linien bd und bz der Überschufs der halben Summe der drei Seiten über ag, und jede der beiden Linien gw und gz der Überschufs derselben halben Summe über ab. Hierauf verlängern wir ae bis t und ab [bis h], sodafs $bh = gz$ wird, und ag [bis k], sodafs $gk = bz$ wird, so ist sowohl ah als auch ak gleich der halben Summe der drei Dreieckseiten; in den beiden Punkten h und k errichten wir zwei Senkrechte ht und hk [auf ah und ak], so werden sich dieselben notwendig in demselben Punkte von at, nämlich in t

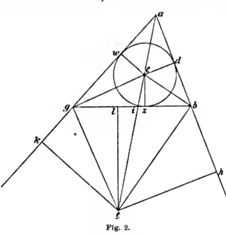


Fig. 2.

1) Da nämlich ao den Winkel bat halbiert, hat man die Proportion: $ab : at = bo : to$ und hieraus $ab + at : bo + to = at : to$, oder $ab + at : tb = at : to = au : bu$, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke aot und abu. Für u haben die Berliner Mss. das arabische j.

2) Dies ist in der lateinischen Übersetzung bewiesen: p. 131 (27), Z. 22—30.

schneiden, und es wird $ht = kt$ sein; oder anders: wir errichten nur die Senkrechte ht, verbinden dann t mit k, und zeigen, dafs kt auch senkrecht [auf ak] stehe: es ist nämlich $ak = ah$, at gemeinschaftlich, und W. hat = W. kat.[1]) Wir ziehen noch bt und gt, schneiden $bl = bh$ von bg ab, und ziehen tl, so ist dieses senkrecht auf bg, denn $bt^2 - gt^2 = bh^2 - gk^2$, aber $bh = bl$ und $gk = gl$, also auch $bt^2 - gt^2 = bl^2 - gl^2$, hieraus folgt, dafs tl senkrecht auf bg steht, es ist aber auch $= ht$, weil $bh = bl$, und bt gemeinschaftlich, und die W. h und l Rechte sind; also sind auch die W. lbt und hbt unter sich gleich. Wir ziehen eb, so sind auch die W. zbe und dbe unter sich gleich, und weil die W. lbh und lth zusammen 2 Rechte sind, ist W. zbd = W. lth, also auch ihre Hälften, d. h. W. ebd = W. bth; ferner sind die W. bde und bht Rechte, also die beiden Dreiecke bde und bht ähnlich, also hat man: $ed:db = bh:ht$; es ist aber $db = bz$ und $bh = gz$, also ist auch $ed:bz = gz:ht$, mithin $ed \cdot ht = bz \cdot gz$. Es ist aber auch $ed^2 : ed \cdot ht$ [2]) $= ed:ht$, d. h. $= ad:ah$, also hat man auch: $ed^2 : bz \cdot gz = ad:ah$, folglich ist $ed^2 \cdot ah = bz \cdot gz \cdot ad$; multiplizieren wir beide [Seiten] mit ah, so erhalten wir: $ed^2 \cdot ah^2 = bz \cdot gz \cdot ad \cdot ah$. Nun ist aber $ed \cdot ah$ die Fläche des Dreiecks, also ist $ed^2 \cdot ah^2$ das Quadrat der Dreiecksfläche, mithin ist das Quadrat der Dreiecksfläche gleich dem Produkt $bz \cdot gz \cdot ad \cdot ah$, d. h. gleich dem Produkt der drei Überschüsse in die halbe Summe der drei Seiten, und das ist, was wir beweisen wollten."[3])

„Noch eine andere Art [des Beweises]: Nachdem feststeht, dafs $ed:db = bh:ht$, so ist, wenn wir die zweite Gröfse als vermittelnde zwischen der ersten und vierten annehmen[4]), das Verhältnis der ersten zur vierten Gröfse zusammengesetzt (d. h. das Produkt) aus dem Verhältnis der ersten zur zweiten Gröfse und demjenigen der zweiten zur vierten Gröfse, oder auch der ersten zur dritten; also [folgt aus obiger Proportion]: $ed:ht = (ed:db) \cdot (ed:bh)$; es ist aber $db = bz$ und $bh = gz$, also hat man auch: $ed : ht$ oder $ad : ah = (ed : bz) \cdot (ed : gz) = [ed^2 : bz \cdot gz]$; mithin ist $ad \cdot bz \cdot gz = ed^2 \cdot ah$; nun wird der Beweis vervollständigt wie oben."[5])

1) Die Darstellung, wie sie hier mit den Worten *„Hierauf verlängern wir ae bis t, etc."* gegeben wird, weicht etwas von derjenigen des lateinischen Textes ab.

2) Im arabischen Text steht hier unrichtig oder vielmehr anticipando $bz \cdot gz$.

3) Was hier in die wenigen Worte: *„multiplizieren wir beide . . ."* bis zum Schlufs zusammengefafst ist, umfafst im lateinischen Text Zeile 1—17 von p. 133 (29); man bemerkt hierin wohl deutlich die kürzende Hand eines verständigen Redaktors.

4) Man könnte nämlich auch die dritte Gröfse als vermittelnde zwischen der ersten und vierten annehmen, d. h. das Verhältnis der ersten Gröfse zur vierten ist auch gleich dem Produkt aus dem Verhältnis der ersten zur dritten Gröfse und demjenigen der dritten zur vierten Gröfse, oder auch der ersten zur zweiten.

5) Auch hier sehen wir wieder eine starke Abkürzung des lateinischen Textes.

XV. *„In jeder Kugel ist das Produkt aus dem Halbmesser in den dritten Teil ihrer Oberfläche gleich ihrem Inhalt.“*

Da der Beweis in der lateinischen Übersetzung nicht ganz korrekt ist (in den Zeilen 28—30, p. 149 (45) fehlt ein Zwischenglied), gebe ich denselben vollständig nach dem arabischen Text.

„Es sei (Fig. 3[1])) *abgd* die Kugel und ihr Halbmesser *sb*; wäre nun das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche der Kugel *abgd* nicht ihr Inhalt, [so müfste es entweder kleiner oder gröfser als derselbe sein]; es sei zuerst kleiner als ihr Inhalt, sodafs also das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche einer Kugel, die gröfser ist als die Kugel *abgd*, gleich ihrem Inhalt sei, diese Kugel sei z. B. *wzlm* und sie sei konzentrisch mit *abgd*; wir beschreiben nun um die Kugel *abgd* einen Körper, wie wir ihn [oben] geschildert haben, welcher die Kugel *wzlm* nicht berühre, so mufs notwendig nach dem was vorangegangen ist, das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche dieses Körpers gleich dem Inhalt des Körpers sein, dieser ist aber gröfser als der Inhalt der Kugel *abgd*, hieraus folgt, dafs der dritte Teil der Oberfläche jenes Körpers gröfser sein müfste als der dritte Teil der Oberfläche der ihn umgebenden Kugel *wzlm*, dies ist ein Widerspruch. — Es sei zweitens das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche der Kugel *abgd* gröfser als ihr Inhalt, sodafs also das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche einer Kugel, die kleiner ist als die Kugel *abgd*, z. B. der Kugel *ehtk*, gleich dem Inhalt der Kugel *abgd* sei. Wir beschreiben nun in die Kugel *abgd* einen Körper, wie wir ihn geschildert haben, der die Kugel *ehtk* nicht berühre, so mufs notwendig nach dem was vorangegangen ist, das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche dieses Körpers kleiner sein als der Inhalt der Kugel *abgd*[2]), also der dritte Teil

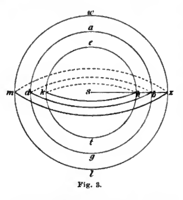


Fig. 3.

1) Ich gebe die Figur, die im arabischen Text schlecht gezeichnet ist, wie sie M. Curtze in seiner Ausgabe gezeichnet hat, nur in den Buchstaben bin ich dem arabischen Text gefolgt, die Reihenfolge derselben ist übrigens nur wenig von derjenigen der Übersetzung verschieden; statt des arabischen *w* setzt Gerhard meistens *n*.

2) Hier ist ebenfalls ein Zwischenglied weggelassen, es sollte nun folgen: nun ist aber das Produkt aus *sb* in den dritten Teil der Oberfläche der Kugel *ehtk* nach Voraussetzung gleich dem Inhalt der Kugel *abgd*.

der Oberfläche der Kugel *ehtk* gröſser als der dritte Teil der Oberfläche des sie umgebenden Körpers, dies ist ein Widerspruch, also steht die Behauptung fest, und das ist was wir [beweisen] wollten."

XVI. *„Wir wollen zwei Gröſsen zwischen zwei gegebenen Gröſsen liegend aufsuchen, sodaſs die vier nach einem und demselben Verhältnis auf einander folgen. Das Verständnis dieser Aufgabe ist für den die Geometrie Studierenden nützlich*[1]); *durch sie wird auch die Seite eines Würfels (d. h. die Kubikwurzel aus einer Zahl) gefunden, indem, wenn wir zwei mittlere Proportionalen zwischen 1 und dem Würfel (der Kubikzahl) gefunden haben, die auf 1 folgende Zahl die Seite des Würfels ist. Dieses (d. h. das folgende) Verfahren stammt von einem Manne der alten Zeit* (wörtl. *„von einem Manne der Alten"*), *mit Namen* Menelaus, *er veröffentlichte* (wörtl. *„brachte"*) *dasselbe in einem Buche von ihm über die Geometrie."*

Ich lasse die Übersetzung der ersten Lösung, die wir nach Eutokius dem Archytas zuschreiben, weg, und gebe nur diejenige, die nach demselben Autor dem Plato zugeschrieben wird.[2])

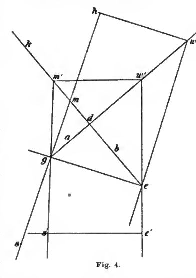


Fig. 4.

„Da nun das von Menelaus angewandte Verfahren (wörtl. „die Dinge"), wenn es auch richtig ist, doch soviel als unmöglich, oder doch sehr schwer auszuführen ist, so haben wir dafür einen leichteren Weg gesucht. Es seien (Fig. 4) die beiden [gegebenen] Gröſsen a und b[3]); wir ziehen $gd = a$, und auf sie die Senkrechte $de = b$, verbinden e mit g, verlängern gd und ed unbestimmt, ziehen von e aus eine Senkrechte[4]) auf eg, welche gd (d. h. ihre Verlängerung) im Punkte w trifft; ferner von g aus eine Parallele zu ew, die ed (d. h. ihre Verlängerung) im Punkte m trifft, sie sei gm, und verlängern sie [nach rückwärts], bis $ms = ew$ wird. Wir

1) Siehe die Note auf p. 150 (46) von Curtzes Ausgabe.

2) Diese zweite Lösung ist nicht nummeriert im Ms. Mq. 559, das Ms. Mf. 258 unterscheidet die einzelnen Sätze gar nicht durch Nummern.

3) In der ersten Lösung sind diese beiden Gröſsen mit m und n bezeichnet.

4) Daſs diese Linie senkrecht auf eg stehen müsse, ist nicht nötig.

nehmen nun an, dafs die Linie ew aus ihrer jetzigen Lage sich gegen d hin bewege, sodafs der Punkt w stets auf wd bleibe, und die Linie stets durch den Punkt e gehe, damit, wenn die Linie ew sich so bewegt, wie wir beschrieben haben, dann dieselbe in jener Lage sich geradlinig erstrecke von ihrem Endpunkt [w] bis zum Punkt e hin(?). Hierauf verlängern wir die gegebene Strecke ed gegen k hin[1]), und nehmen an, die Linie ms bewege sich aus ihrer jetzigen Lage gegen k hin, sodafs der Punkt m immer auf mk bleibe und die Linie stets durch den Punkt g gehe, wie wir es bei der Bewegung der Linie ew angenommen haben; ferner nehmen wir an, dafs die beiden Linien ew und ms bei ihrer Bewegung parallel bleiben, und dafs im Endpunkt e der Linie ew eine Senkrechte auf dieselbe errichtet sei, die jener in ihrer Bewegung folge, aber keine bestimmte Länge habe, also bei ihrer Bewegung beständig die Linie ms schneide. Wenn nun also die beiden Linien ew und ms so bewegt werden, dafs sie sich stets parallel bleiben, und ihre Endpunkte immer auf den Linien wd und mk bleiben, wie wir es beschrieben haben, so mufs notwendig die auf ew errichtete Senkrechte, die sich mit ihr bewegt und beständig die Linie ms schneidet, [einmal] durch ihren Endpunkt $s(s')$ gehen[2]); wenn nun aber diese Senkrechte zum Punkte s' gelangt ist, so hören wir mit der Bewegung der Linien ew und ms auf und ziehen die Linien $e's'$ und $w'm'$; dann ist klar, dafs die Linie $e's'$ auf den beiden Linien $e'w'$ und $m's'$ senkrecht steht, denn sie wurde senkrecht auf ew und sich mit ihr bewegend vorausgesetzt, bis sie durch den Punkt s' gehen würde; ich sage nun, dafs die beiden Linien dm' und dw' zwischen den beiden Gröfsen gd und de so liegen, dafs $gd:dm' = dm':dw' = dw':de$. Beweis: Da die beiden Linien $e'w'$ und $m's'$ parallel und gleich lang sind und die W. $w'e's'$ und $m's'e'$ Rechte sind, so ist auch $w'm' = e's'$ und jeder der W. $e'w'm'$ und $s'm'w'$ ein Rechter; es ist aber auch md senkrecht auf wg und wd senkrecht auf me, also hat man: $gd : dm' = dm' : dw' = dw' : de$; gd ist aber gleich der Gröfse a und de gleich der Gröfse b, also sind dm' und dw' in der That zwei mittlere Proportionale zwischen a und b, was wir [finden] wollten."[3])

---

1) Dies ist oben schon gesagt worden, allerdings ohne Nennung des Punktes k, der übrigens unbestimmt ist.

2) Die Figur ist in den arabischen Mss. schlecht gezeichnet, ich habe sie dem Texte entsprechend ausgeführt, mit Ausnahme der Bezeichnungen $m's'$ und $w'e'$ für die zweite Stellung der Geraden ms und we, die in den arabischen Mss. nicht von der ersten unterschieden ist.

3) Man vergleiche mit dieser Lösung diejenige in dem Artikel von J. L. Heiberg, betitelt: *Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik* (Zeitschr. für Mathem. **33**, 1888; Hist. Abt. 161—163).

Es folgt nun im arabischen Text die Beschreibung einer mechanischen Ausführung dieser Konstruktion, welche in der lateinischen Übersetzung fehlt; ob diese in der Originalabhandlung der Benî Mûsâ schon gestanden habe und vom Übersetzer weggelassen worden sei, oder von einem spätern Redaktor der Abhandlung (Naṣîr ed-dîn) hinzugefügt worden sei, ist schwer zu entscheiden. Solche Zusätze beginnen übrigens gewöhnlich mit den Worten: *„Es sagt N. N."*, oder *„ich sage"*, wie wir es oben am Schlusse von Nr. III gesehen haben; hier steht nichts derartiges, die Beschreibung schliefst unmittelbar an das vorhergehende an mit den Worten: *„Damit nun aber die thatsächliche Ausführung der Lösung erleichtert werde"*, etc.

Die Beschreibung dieser mechanischen Konstruktion war nicht gerade leicht zu übersetzen, zumal auch die Abschreiber (besonders derjenige des Ms. Mf. 258) dieser Stelle keine genügende Sorgfalt gewidmet zu haben scheinen, sie weist mehr Fehler und unlesbare Wörter auf als der übrige Teil der Abhandlung; ich will aber doch versuchen, indem ich mir hier und da eine etwas freiere Übersetzung erlaube, dem Leser das mechanische Verfahren einigermafsen verständlich zu machen.

„Damit nun aber die thatsächliche Ausführung der Lösung erleichtert werde (wörtl. „leicht sei"), setzen wir an Stelle der Linie ew, die auf eg senkrecht steht, ein Lineal, ebenso an Stelle von eg ein solches, das wir mit dem Lineal ew durch eine Axe (Gelenk, Pol) verbinden, welche im Punkte e fest bleibt, um die sich aber das Lineal ew drehen kann; verlängern wir nun die Linie gm, die senkrecht zu eg steht, bis h, und machen $gh = ew$, und setzen an die Stelle von gh ein Lineal, das wir mit dem Lineal eg so verbinden, dafs der feste Drehpunkt (Axe) im Punkt g sei, um den sich also das Lineal gh drehen kann, während das Lineal eg fest bleibt; so können also die beiden Lineale ew und gh sich um die Axen e und g drehen. Legen wir ferner zwischen die beiden Punkte w und h hinein ebenfalls ein Lineal, und verbinden es mit den beiden Linealen ew und gh durch Axen (Gelenke) in den Punkten w und h, welche beide (Axen) aber nicht fest auf ihren Linealen sind, sondern verschiebbar, sodafs sich also die drei Lineale ew, gh und wh um das feste Lineal eg in den Punkten e und g drehen können. Nun setzen wir in der Oberfläche des Lineals ew ein dünnes Holzstäbchen ein, das in einer in jener Oberfläche sich befindenden Rinne läuft (verschiebbar ist), und machen seine Länge gleich derjenigen des Lineals ew, und machen am Ende w dieses Holzstäbchens eiuen Drehpunkt (Axe), dessen Zentrum der Punkt w sei. Dann errichten wir auf beiden Seiten von wd zwei zu wd parallele Ebenen, und bringen sie so nahe zusammen, dafs die Axe (das Gelenk), die sich an diesem Holzstäbchen befindet, beide Ebenen berührt,

so wird, wenn die drei [beweglichen] Seiten des Vierecks *eh* um die feste Seite *eg* gedreht werden, diese Axe zwischen den beiden Ebenen bleiben, und das Zentrum derselben wird auf der Linie *wd* bleiben, und das [andere] Ende des Holzstäbchens wird sich vom Punkte *e* ausgehend immer weiter von diesem [nach rückwärts] entfernen auf der Verlängerung der Linie *we*. Ferner setzen wir in der Oberfläche des Lineals *gh* ein anderes Holzstäbchen ein, das sich in einer daselbst angebrachten Rinne verschieben kann, und das seinen Anfang im Punkte *m* und sein Ende im Punkte *s* habe, damit die Länge dieses Holzstäbchens gleich der Länge des auf dem Lineal *ew* eingefügten sei; am Ende *m* dieses Holzstäbchens bringen wir eine Axe an, und verfahren weiter, wie wir oben geschildert haben, so wird, wenn die drei [beweglichen] Seiten des Vierecks *eh* um die feste Seite *eg* gedreht werden, sich der Mittelpunkt dieser Axe auf der Linie *mk* bewegen und sich dem Punkte *k* nähern. Hierauf befestigen wir auf dem Holzstäbchen, welches auf dem Lineal *ew* eingefügt ist, an seinem Ende *e* ein weiteres Holzstäbchen unter rechtem Winkel zu ihm, welches sich mit ihm bewege, und bis zum Holzstäbchen auf dem Lineal *ms* reiche, ja dasselbe kreuze, damit, wenn die drei Seiten des Vierecks *eh* um die feste Seite *eg* gedreht werden, dieses transversale Holzstäbchen notwendig das Holzstäbchen, das auf dem Lineal *ms* eingefügt ist, in seinem Ende [*s'*] treffen mufs. Aus dem Beweise[1]), den wir oben von dieser Konstruktion gegeben haben, ist nun klar, dafs, wenn die Lineale und die Holzstäbchen, die auf ihnen laufen, an derjenigen Stelle angehalten werden in ihrer Bewegung, zu welcher das transversale Holzstäbchen gelangt ist, nämlich ans Ende [*s'*] des Holzstäbchens auf dem Lineal *ms* (oder *m's'*), dann erreicht ist, was wir auszuführen beabsichtigt haben."

Aus dieser nicht ganz klaren Darstellung kann man immerhin soviel erkennen, dafs das mechanische Verfahren von demjenigen, das dem Plato zugeschrieben wird, doch wesentlich verschieden ist.

XVIII. *„Es sei durch ein ähnliches Verfahren[2]) ein beliebiger Winkel in drei gleiche Teile zu teilen."*

Die lateinische Übersetzung stimmt fast wörtlich mit dem arabischen Text überein, weshalb wir von einer deutschen Übersetzung absehen; auch die Buchstaben der Figur der Übersetzung entsprechen den arabischen, nur ist das arabische *'ain* durch *q* wiedergegeben, statt wie gewöhnlich durch *o*; die in der Übersetzung gezeichnete Kurve fehlt in der Figur des arabischen Textes.

1) Besser wäre: „aus der Darstellung".

2) Wörtlich: *„durch diesen Kunstgriff"*, d. h. die bewegliche oder instrumentale Geometrie.

Nun folgt der Schlufs der Abhandlung, der im arabischen Text der Berliner Mss. keine Nummer trägt, er lautet:

„Es bleibt uns noch übrig, die angenäherte Bestimmung der Seite des Würfels (d. i. der Kubikwurzel) darzulegen, damit nach Bedürfnis mit derselben gerechnet werden kann. Wir verfahren dabei auf diejenige Art, die uns die vollkommenste Annäherung erreichen läfst; soll z. B. der Fehler kleiner als eine Minute oder eine Sekunde sein, so verfahren wir so, dafs wir die Kubikzahl in Bruchteile verwandeln, nämlich in Tertien, oder Sexten oder Nonen[1]), etc.; hierauf suchen wir die Kubikzahl, die dieser gleich ist, wenn es eine solche giebt; wenn nicht, so nehmen wir die nächstgelegene Kubikzahl und merken uns ihre Seite (Wurzel); waren nun die Bruchteile Tertien, so stellt die Wurzel Minuten dar, waren die Bruchteile Sexten, so stellt die Wurzel Sekunden dar, u. s. w. Auf diese Art wird bei solchen Aufgaben verfahren."[2])

„Was wir in unserm Buche auseinandergesetzt haben, ist alles unsere Arbeit, aufser der Berechnung des Kreisumfanges aus dem Durchmesser, welche von Archimedes herrührt, und der Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Gröfsen, die von Menelaus stammt, wie wir schon erwähnt haben. Beendigt ist das Buch."

Die Vergleichung mit der lateinischen Übersetzung zeigt, dafs dieser Schlufs die stärkste Kürzung erfahren hat; wir ersehen aus demselben auch, dafs Herr Curtze unrichtig konjiziert hat, wenn er (p. 158 (54), Z. 20) *iuuamentum in aliis* durch *innitamentum Milei* ersetzt hat, denn der kürzende Redaktor hätte gewifs eine Stelle nicht weggelassen, welche einem Menelaus einen wichtigen mathematischen Satz zugeschrieben hätte.[3])

Die arabischen Mss. haben nun sämtlich noch einen Zusatz, der jedenfalls nicht von den Söhnen Mûsâs ist, sondern sehr wahrscheinlich von Naṣîr ed-dîn hinzugefügt worden ist; er enthält die Heronsche Ableitung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten, mit genau derselben Figur und den entsprechenden Buchstaben, wie sie in der *Dioptra* des genannten Mathematikers sich vorfindet. Nach der Anrufung Gottes[4]) folgen die Worte:

„Ein anderer Beweis des 7. Satzes des Buches der Söhne Mûsâs, es ist dies der gewöhnliche (allgemeine)[5]) Weg für die Berechnung der Dreiecke, und stammt, wie ich vermute, von el-Châzin her."

1) D. h. die Kubikzahl wird mit 60^3, 60^6, 60^9, etc. multipliziert.

2) Carra de Vaux hat diese Stelle über die Kubikwurzelausziehung in französischer Übersetzung veröffentlicht in der Biblioth. Mathem. 12_2, 1898, p. 1—2.

3) Vgl. auch A. A. Björnbo: *Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert*; Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 64.

4) Diese hat nur das Ms. Mf. 258 (Berlin).

5) Das Berliner Ms. Mq. 559 hat hier *el-'âlim* = der gelehrte, theoretische, anstatt *el-'âmm*.

Der letztere Name findet sich nicht genau so vor in den Mss., sondern in Mf. 258 steht el-Ḥârn, in Mq. 559 el-Ḥâzn; da el-Châzin diesen Formen am nächsten kommt, so habe ich diesen Namen gewählt, der also auf Abû Ğa'far el-Châzin (den Bibliothekar) hindeuten würde. Es ist aber keineswegs unwahrscheinlich, daſs diese Schreibweise durch die Schuld kenntnisloser Abschreiber aus der ursprünglichen Form Heron entstanden ist. — Am Rande von Ms. Mq. 559 steht, wahrscheinlich von der Hand des Abschreibers: „Meiner Ansicht nach (?) rührt diese Form des Beweises von dem sehr gelehrten Šîrâzî her.“ Welcher Šîrâzî hier gemeint sei, können wir nicht sagen.[1])

Zum Schlusse noch eine Bemerkung zu einer Stelle der Curtzeschen Ausgabe. In der Einleitung spricht Herr Curtze die Vermutung aus, die Berechnung des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser, wie sie die Söhne Mûsâs geben, möchte wohl die ursprüngliche Form der Archimedischen Kreisrechnung sei. Dies ist nun aber, wie man wohl mit Sicherheit behaupten kann, nicht der Fall; die Archimedische Kreisrechnung wurde ins Arabische übersetzt (wahrscheinlich von Ṯâbit b. Qorra, oder dann von Isḥâq b. Ḥonein), dann von Naṣîr ed-Dîn neu redigiert; diese Übersetzung[2]) stimmt mit Ausnahme der Anordnung der Sätze und einer etwas breitern Darstellung mit dem griechischen Original so ziemlich überein, unterscheidet sich aber doch erheblich von der Darstellung der Söhne Mûsâs. Allerdings schlieſst sich diese, wenigstens in demjenigen Teile, der das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser giebt, eng an die Archimedische Darstellung an, vielleicht mit Benutzung des Kommentars des Eutokius, obgleich hierzu zu bemerken ist, daſs keine arabische Quelle uns verrät, daſs dieser Kommentar den Arabern bekannt gewesen sei; allein eine bloſse Wiedergabe der ursprünglichen Form der Archimedischen Kreisrechnung ist sie nicht, haben sich doch die Söhne Mûsâs, wie ja Herr Curtze selbst anerkennt, in allen Sätzen ihrer Abhandlung eifrig bestrebt, durch abweichende Beweisführung und Wahl anderer Buchstaben von ihren griechischen Mustern sich soweit als möglich zu entfernen; allerdings ist ihnen dies bei der Kreisrechnung am wenigsten gelungen.

1) Vergl. H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*; Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900, p. 125, 158, 189.
2) Vergl. Biblioth. Mathem. **1**$_2$, 1898, p. 75.

The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries.

By T. HAYASHI in Tōkyō.

Japan had her own mathematics in ancient times, but lost it, because the Chinese mathematics was imported frequently during the long interval from the sixth century till the beginning of the seventeenth century. But since that time, the Chinese mathematics became the source of many original investigations, and the so called „Wa-san" or Japanese mathematics was founded firmly. So in a very early period, the Japanese used $\pi = 3$ like the Chinese according to *Chow-pai-swan-king* and *Kiu-chang-swan-shu* written by CHOW-KUNG in the Chow dynasty (792—250 B. C.).

In 1627, MITSUYOSHI YOSHIDA, a celebrated Japanese mathematician, published a book called *Jinkoki*. This is the second of the mathematical books in Japan (the first being *Kijoransho*, 2 vol., written by SHIGEYOSHI MŌRI in about 1600, which was not handed down to us), and is so famous that the Japanese call the book to mind when they tell about the „Wa-san". In this book, the value of π is 3,16.

In the third mathematical book called *Jugairoku* written by CHISHŌ IMAMURA in 1639, it is 3,162.

Although these two values are very inexact, they have been adopted in several works published until about 1660.

In 1664, the value 3,14 is adopted in *Dokaishō* by MOTONAGA NOZAWA. SHIGEKIYO MATSUMURA also used this value 3,14 for π in his *Sanso*, 1663. But he obtained a more exact value of π by calculating the length of one side of a regular polygon inscribed in a circle, the number of whose sides is 32768 or 2^{15}. He found the value 3,14159264877698869248, which is correct to the 7th place of decimals. However he did not use this exact value, but used always 3,14. Compared with the results of VIÈTE, VAN ROOMEN and VAN CEULEN, who found the values to the 10th, 15th and 35th places in 1579, 1593, and 1596 respectively, MATSUMURA's result is inferior in exactness, but his work must be regarded as very excellent to obtain so exact a value in so early a period in Japan.

In *Kongenki*, 1666, by M. Satō, we find 3,142. In *Ketsugishō*, with head notes written by Yoshinori Isomura in 1684, a more exact value 3,1416 is used.

Kōwa Seki (lived from 1642 till 1708), who was so distinguished in his original inventive power that he is regarded as the founder of the „Wa-san“ or Japanese mathematics (though there were many mathematicians previously), shows a very exact value of π in his manuscript *Taiseisankyo*, which is correct to the 24th place of decimals.

Yoshimasa Ohta, a pupil of Murahide Araki, who was the best disciple and first successor of Seki, wrote *Kwatsuyosanpō* in 1709, and used the value of π correct to the eleventh place of decimals.

In 1722, Katahiro Takebe (his two elder brothers were also eminent mathematicians) gives the value correct to the 41st place of decimals in his manuscript *Fukyutetsujutsu*.

Lastly Yoshihide Matsunaga finds out the value correct to the 50th place in his *Höensankyō* written in 1739. This is the most exact value found by the old Japanese mathematicians, and it seems as if there was no mathematician thereafter who obtained a more exact value.

Methods by which such exact values were calculated will be seen in Prof. D. Kikuchi's papers, published in the Tokyo Sugaku-Butsurigakukwai Kiji, 7, 1896, p. 24—26, 47—53, 105—110, 114—117 and 8, 1900, p. 179—198. There we shall also find various series for π and π^2 obtained by the old Japanese mathematicians.

Next I will describe the fractional values of π used by the old Japanese mathematicians. Before the Seki school prospered, $\frac{79}{25}$ which is equal to 3,16 was used. In *Kwatsuyosanpo* written by Y. Ohta in 1709, we find the value $\frac{355}{113}$. As already said, Ohta was a pupil of M. Araki, who was the best disciple of Seki. So it will be fair to say that Seki adopted this value for the first time. The Japanese used a curious method to find this value. The following series was constructed:

$$\frac{3^*}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{25}{8},\ \frac{28^*}{9},\ \frac{32}{10},\ \frac{35}{11},\ \frac{38}{12},\ \frac{41}{13},\ \frac{44}{14},$$

$$\frac{47^*}{15},\ \frac{51}{16},\ \frac{54}{17},\ \frac{57}{18},\ \frac{60}{19},\ \frac{63}{20},\ \frac{66}{21},\ \frac{69^*}{22},\ \frac{73}{23},\ \frac{76}{24},\ \frac{79}{25},\ \ldots\ldots\ldots$$

This series consists of fractions obtained by adding 4 and 1 to the numerator and denominator of the preceding, when this is less than π, or by adding 3 and 1 to the numerator and denominator of the preceding when this is greater than π. In the above, those which are less than π are marked with asterisks. The value $\frac{355}{113}$ was then found as the 113th term of this series.

It is strange that several values of π, which were used by the Chinese, occur in this series. The 7th term $\frac{22}{7}$ which is the ARCHIMEDian value, is the „inaccurate value" of TSU-CHUNG-CHI of the Sung dynasty. The 8th term $\frac{25}{8}$ which agrees with the value attributed ordinarily to VITRUVIUS (see Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 299), was used by another Chinese mathematician (I do not know his name and when he lived). The 20th term $\frac{63}{20}$ is the value of TUNG-LENG and the 25th term $\frac{79}{25}$ is that used by the Japanese before SEKI, as I have already mentioned. The 45th term $\frac{142}{45}$ is due to LUH-TSIH, and the 50th term $\frac{157}{50}$ to LEW-HWEI, of the Tsin dynasty. But it is curious that there was none who noticed the 36th term $\frac{113}{36} = 3,14166\ldots\ldots$ which is more exact. The value $\frac{355}{113}$ is also said to be the „accurate value" of TSU-CHUNG-CHI.

In 1766, Y. ARIMA, a feudal chief, wrote a book called *Hōenkikō* which is the first publication of the „Ten-zan" method invented by SEKI. In this book, he makes π equal to

$$\frac{5419351}{1725033},$$

which is accurate to the 12th place of decimals. Again in his book *Shukisanpo*, published in the same year, he uses

$$\frac{428224593349304}{136308121570117},$$

which is accurate to the 30th place of decimals.

G. KURUSHIMA (died in 1760) shows us that the square of π is equal to

$$\frac{98548}{9985}.$$

Besides the above mentioned values, the Indian value $\sqrt{10}$ was once used. In fact Y. ANDŌ uses this value instead of 3,16 in his *Jugairoku-kanasho*, published in 1660.

L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières.

Par Gino Loria à Genova.

Avec un portrait en photolithographie.

> «Il employoit le temps de Guerre à composer des Ouvrages, non pas tant pour se procurer par-là quelque dédommagement, car que peut-on espérer d'un Livre de Mathématique? que parce qu'il est presque impossible qu'un Mathématicien habile et qui a du loisir, resiste à des vûes et à des méthodes nouvelles, qui viennent s'offrir à lui, et en quelque sorte malgré lui.»
> Fontenelle, *Éloge de M. Ozanam.*

Jean Philippe Ernest Fauque de Jonquières naquit à Carpentras le 3 Juillet 1820. En 1835, admis à l'école navale de Brest, il entra dans la marine française, à laquelle il devait appartenir toute sa vie, en prêtant des services qui lui valurent la reconnaissance de sa patrie. En 1841 il obtint le grade de lieutenant de vaisseau et dans les années 1848—1850, il siégea au conseil de l'amirauté. Dans la suite il séjourna dans plusieurs coutrées, dont il est aisé d'acquérir une connaissance approximative en remarquant les dates de ses mémoires mathématiques (que nous aurons soin de spécifier). Rappelons seulement la navigation de 1860—1861, pendant laquelle de Jonquières eut le loisir de poursuivre, d'une façon moins intermittente, quelques recherches de géométrie auxquelles il se livrait depuis quatre ou cinq années, dans la voie ouverte par Poncelet et Chasles. Comme constatation officielle des résultats de ces recherches, qu'il nous suffise pour l'instant de dire qu'en 1862 on lui décerna les deux tiers du Grand prix des sciences mathématiques[1]), qui avait été proposé sur le sujet suivant: «résumer, discuter et perfectionner en quelque point important les résultats obtenus jusqu'ici sur la théorie des courbes planes du quatrième ordre.»

Promu en 1865 capitaine de vaisseau, de Jonquières eut la charge de chef d'état-major de l'amiral de la Grandière en Cochinchine, ce qui

1) Comptes rendus Paris 55, 1862, p. 933—934; 56, 1863, p. 387.

lui fournit l'occasion d'organiser à Saïgon la première exposition agricole et industrielle. Il entra ensuite au Conseil des travaux de la marine; il fut promu contre-amiral le 17 décembre 1874 et vice-amiral le 1er octobre 1879; il fut tour à tour directeur de l'école des torpilles à Boyardville, préfet maritime à Rochefort, directeur de la Commission permanente de défense maritime, chef du service hydrographique de la France, etc. En 1885 il prit sa retraite. La brillante et utile carrière qu'il fit comme marin et ses travaux mathématiques — auxquels il ne manquait de revenir, dès que le lui permettaient ses occupations professionnelles, car la géométrie a pour coutume de ne pas laisser en paix ceux dont elle a pris possession une fois — lui valurent la place d'*académicien libre*[1]), que l'Institut de France lui décerna le 24 mars 1884[2]); cette élection bien méritée est liée à deux publications de notre savant, c'est-à-dire, à une exposition détaillée de toute sa carrière[3]) et à l'éloge de son prédécesseur.[4])

De Jonquières, auquel de bonnes traductions des *Epîtres d'Horace*[5]) assurent une place dans l'histoire littéraire de la France, s'est éteint paisiblement le 12 Août 1901. Son activité scientifique embrasse à peu près quarante ans et a donné comme résultat un brillant recueil d'environ 150 mémoires mathématiques[6]); elle présente un *maximum* d'intensité pendant

1) Comptes rendus Paris **98**, 1884, p. 703, 713.

2) Depuis plus de vingt ans il avait été plusieurs fois proposé comme *correspondant*; en 1863, à la suite du décès de Steiner, mais on lui préféra Sylvester (Comptes rendus Paris **57**, 1863, p. 918 et 945); en 1866 comme successeur de Hamilton, mais l'Académie choisit Riemann (id. **64**, 1866, p. 652 et 674); en 1867, à la suite de la promotion de Kummer comme associé étranger, mais Weierstrass eut la place (id. **67**, 1867, p. 1201 et 1213); enfin dans la même année il fut candidat à la succession de Plücker, mais Kronecker l'emporta (id. ib. p. 1267 et 1285). Remarquons encore qu'en 1884 il fut en compétition comme successeur de La Gournerie dans la place d'académicien libre, mais on donnait la préférence à M. Haton de la Goupillière (id. **98**, 1884, p. 119 et 131).

3) *Notice sur la carrière maritime, administrative et scientifique du Vice-Amiral de Jonquières, Grand officier de la Légion d'honneur, Directeur général du Dépôt des cartes et plans de la Marine, Vice-Président de la Commission des phares, Membre de la Commission de l'Observatoire.* Paris 1883, 28 pages in-4°.

4) *Notice sur la vie et les travaux de Louis François-Clément Bréguet* (Comptes rendus Paris **103**, 1886, p. 5—14; voir aussi Revue maritime et coloniale, Septembre 1886).

5) De cette traduction (publiée à Orléans, chez Herluison en 1879) quelques-uns de nos lecteurs auront connaissance parce que M. Brocard en a tiré les vers qui servent d'épigraphe à ses *Remarques sur l'analyse indéterminée du premier degré* (Mém. de l'académie de Montpellier **9**, 1879, p. 139—234).

6) Comp. l'*Elenco delle pubblicazioni matematiche di Ernesto de Jonquières* que nous venons de publier dans le Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche **5**, 1902, p. 72—82.

les années 1856—1866 et un *minimum* pendant les dix-années snivantes; elle se manifeste à son début par des travaux de géométrie pure et finit par des recherches d'arithmétique, en donnant plusieurs fois des résultats qn'intéressent la mécanique appliquée et que nous sommes forçés d'exclure de notre examen.

En raison des sujets qu'ils traitent, les travaux que nous allons analyser se snbdivisent naturellement en plusieurs groupes. Un certain nombre se rapportent à la géométrie supérieure, au sens de Chasles (voir ci-après, §§ I et II); il y en a d'autres (§§ III et IV) qui représentent des contributions à la théorie des courbes planes algébriqnes et des systèmes qu'elles forment; ils sont liés très étroitement à ceux, non moins importants, relatifs aux courbes gauches algébriques et aux surfaces (§ V). Une section plns courte (voir § VI) de l'œuvre mathématique de de Jonquières est formée par des investigations, partiellement critiques et historiques, sur les transformations géométriqnes et les polyèdres eulériens. Enfin la dernière (§ VII) est remplie par ses études sur la théorie des équations et la théorie des nombres. Tel est, en quelques lignes, le catalogue des richesses que nous allons exposer en détail.

I.

Applications de la «Géométrie supérieure» à des question élémentaires.

1. La jeunesse de de Jonquières tombe dans la période dans laquelle Chasles avait ramassé et saisi le sceptre de la géométrie pure que Poncelet avait abandonné dans un moment de suprême et regrettable découragement. C'est l'époque où le célèbre autenr de l'*Aperçu historique* prenait possession de la chaire de géométrie supérieure fondée en 1846 exprès pour lui; où il publiait sur cette matière son *Traité*, qui devait être en France, pendant plusieurs dizaines d'années, l'Euclide des nouveaux temps; où il élaborait lentement son *Traité des sections coniques*; où enfin, dans ses cours à la Sorbonne, il montrait, par une infinité d'exemples brillants, l'inépuisable fécondité des idées dont il était en partie le créateur, en partie l'apôtre le plns convaincu. De Jonquières, qui eut l'occassion de vivre à plusieurs reprises à Paris pendant cette période de renaissance de la géométrie, snbit l'influence du milieu; impressionné vivement et profondément par les théories, dont les échos retentissants arrivaient jnsqu'à lui, son imagination géométrique se développa d'une manière étonnante et il ne tarda pas à devenir l'admirateur le plus chaud[1]), l'élève le plus éminent et le commentateur le plns original

1) Comme pièces justificatives de cette admiration on peut citer les articles bibliographiques que de Jonquières écrivit sur *Les trois livres des porismes d'Euclide*

de CHASLES: *élève*, non dans le sens scolastique de ce mot, car il ne put jamais suivre régulièrement les cours de la Sorbonne[1]), mais élève dans le même sens auquel on dit que les grands esprits ont des élèves en tous les temps et dans tous les pays; *commentateur*, non dans l'acception la plus étroite de ce mot, mais en homme qui marche sur la route que son auteur a frayée, en la rendant plus facile et aisée, plus droite, plus longue et plus large.

C'est particulièrement dans ses plus anciens mémoires mathématiques que cette liaison entre DE JONQUIÈRES et CHASLES est plus évidente et plus étroite; car en grande partie ils ont pour but la démonstration de théorèmes où la solution de problèmes, que ce dernier avait énoncés, ou bien l'application des principes de la *Géométrie supérieure* à des questions élémentaires sur les courbes du 2e ou du 3e ordre ou sur l'homographie. Il est nécessaire d'entrer à ce sujet en quelques détails, en examinant séparément les mémoires dont il s'agit.

2. Un de ces mémoires[2]) se rapporte à la construction, que CHASLES avait demandée, de la conique qui coupe harmoniquement cinq segments donnés. DE JONQUIÈRES y parvient par un procédé particulier de déduction, qui permet de décrire la conique qui passe par n (<5) points et coupe harmoniquement $5-n$ segments lorsqu'on sait résoudre le même problème pour $n+1$ points et $4-n$ segments. Le problème dont il s'agit est assez important et la solution proposée par notre auteur est assez simple pour obtenir une place dans toute exposition élémentaire de la théorie des sections coniques.

Une question analogue a pour objet la construction d'une courbe du 2e degré déterminée par un foyer et trois points. Un mathématicien désormais oublié, NICOLLIC[3]), donna vers la moitié du XVIIIe siècle un théorème (assez compliqué) qui permet de trouver la direction de l'axe de la courbe cherchée[4]); ce théorème, dont HOUSEL un siècle après découvrit une dé-

(Bulletin d'histoire etc. qui fait suite au T. 20, 1861, des Nouv. ann. de mathém. p. 1—11) et sur le *Traité des Sections coniques de M. Chasles* (Nouv. ann. de mathém. 4_2, 1865, p. 373—381; article daté de Saïgon [Cochinchine], 14 Mai 1865).

1) Voir *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris 1867), page 11, note (**).

2) *Solution de la Question 303 (voir p. 117)* (Nouv. ann. de mathém. 14, 1855, p. 435—440). La question dont il s'agit porte en effet le n° 298.

3) Voyez une note de M. BROCARD dans L'intermédiaire des mathématiciens 9, 1902, p. 127.

4) *Mémoire sur la détermination des orbites planétaires, où l'on démontre quelques nouvelles propriétés des sections coniques.* Mém. de l'académie des sciences de Paris 1746, p. 291—318). Comparez une lettre de PROUHET *Sur le problème de Haller* (Nouv. ann. de mathém. 14, 1855, p. 263—264).

monstration analytique[1]), peut aussi se tirer des principes de la géométrie moderne; c'est ce que prouva DE JONQUIÈRES[2]), sans manquer d'ajouter la remarque très-juste que pour construire la conique satisfaisant à la question, il n'y a rien de mieux que de se servir de l'homologie qui, d'après PONCELET, existe entre une courbe du 2e ordre et un cercle ayant comme centre un des foyers de la courbe.

Dans le même ordre d'idées est écrite une note ultérieure[3]), ayant pour but l'application des théorèmes de PASCAL, de BRIANCHON et de DESARGUES à la construction de la conique qui passe par n points et qui est tangente à $5 - n$ droites. Les solutions proposées par DE JONQUIÈRES sont au fond celles que tous nos élèves connaissent; mais il ne faut pas oublier qu'elles ont précédé le *Traité des sections coniques* de CHASLES et il est bon de remarquer que ce savant y est parvenu de son côté et les a accueillies dans cet ouvrage, sans même citer le premier qui les avait découvertes.

3. Le même silence fut tenu par CHASLES à propos des remarques[4]) que fit notre géomètre sur certaines propriétés de l'hyperbole et de la parabole et qu'on rencontre, sans aucune citation, dans le même *Traité* (p. 35 et 53).

En appliquant toujours les théories fondamentales de la *Géométrie supérieure*, DE JONQUIÈRES réussit aussi à prouver que « la tangente menée du centre d'une ellipse au cercle circonscrit à un triangle quelconque conjugué à cette ellipse, est égale à la corde du quadrant de l'ellipse »[5]), et, en se servant en outre du « principe de correspondance anharmonique », que venait d'énoncer CHASLES, il donna à la géométrie une contribution bien plus importante[6]), en démontrant les beaux théorèmes sur les coniques inscrites dans un quadrilatère que STEINER avait énoncés dans le

---

1) *Sur le problème de HALLEY* (Nouv. ann. de mathém. **14**, 1855, p. 425—433).

2) *Démonstration des théorèmes de NICOLLIC (voir pages 263 et 425)* (id. ib. p. 440—443).

3) *Applications diverses des théories de la géométrie supérieure. Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions* (Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 116—125). Voir aussi *Discussion d'un problème relatif à la construction des coniques* (id. **18**, 1859, p. 404—406).

4) *Sur les Nos 170 et 652 de la Géométrie supérieure* (id. **15**, 1856, p. 160—161).

5) *Solution de la Question 524 (FAURE) (voir t. XIX, p. 234)* (Nouv. ann. de mathém **20**, 1861, p. 25—26).

6) *Démonstration de quelques théorèmes de M. STEINER (voir t. XIV, p. 141)* (id. ib. p. 94—98). *Démonstration géométrique des théorèmes de M. STEINER énoncés sous les nos 5, 6 et 7 (voir t. XIV, p. 141 et 142)* (id. ib. p. 190—196).

T. 44 du Journal für Mathematik.[1]) Ce travail de notre géomètre ne sera certainement pas oublié par celui qui comblera à l'avenir la regrettable lacune qui, dans la littérature mathématique, provient du manque d'une histoire des recherches faites pour prouver les nombreuses assertions répandues dans les oeuvres de STEINER.

Le mémoire que nous venons de signaler n'est pas le seul par lequel DE JONQUIÈRES ait pris place parmi les commentateurs du grand géomètre allemand, car, trois ans après avoir donné celui-là, il en composa un autre[2]), dont nous allons nous occuper. Son but est d'établir les propositions — qu'on lit dans la dernière section de la dernière publication de STEINER[3]) — qui expriment les valeurs des nombres $N(p, t, n)$ des sections coniques qui passent par p points et sont tangentes à t droites données et normales à n autres droites également données, où naturellement $p + t + n = 5$. En supposant déjà connues les valeurs de $N(p, t, n)$ lorsque $n = 0$, notre géomètre établit celles qui correspondent à l'hypothèse $n > 0$, par un tour de raisonnement que nous allons résumer: Soit a une des droites auxquelles une des coniques cherchées doit être normale et A le point à l'infini par lequel passent toutes les droites perpendiculaires à a. Toutes les coniques qui passent par p points et sont tangentes à t droites et normales à $n - 1$ autres droites forment un système dont les caractéristiques μ, ν — au sens de CHASLES — sont évidemment

$$\mu = N(p + 1, t, n - 1) \quad \text{et} \quad \nu = N(p, t + 1, n - 1).$$

Or le lieu des points de contact des tangentes menées du point A aux courbes de ce système est une courbe de l'ordre $\mu + \nu$, dont A est un point μ-tiple; il coupe la droite en $\mu + \nu$ points, dont chacun donne une conique du dit système qui est en outre normale à la droite a; on a donc la relation récurrente suivante:

$$N(p, t, n) = N(p + 1, t, n - 1) + N(p, t + 1, n - 1).$$

Comme on connaît par hypothèse tous les nombres $N(p, t, 0)$, on pourra trouver par cette équation les nombres $N(p, t, 1)$, ensuite les nombres $N(p, t, 2)$, etc., c'est-à-dire tous les nombres indiqués par STEINER. Cette méthode de démonstration est, suivant notre sentiment, la méthode d'in-

1) *Lehrsätze*, p. 275—276 du vol. cité; voir aussi *Gesammelte Werke* 2 (Berlin 1882), p. 425—428.

2) *Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. Construction de ces coniques. Théorèmes relatifs à un contact d'une série de coniques et d'un faisceau de droites* (Journ. de mathém. 4_2, 1859, p. 49—56).

3) *Vermischte Sätze und Aufgaben* (Journal für Mathem. 55, 1858, p. 365—328; *Gesammelte Werke*, 2, p. 682—683).

vention employée par STEINER lui même; elle est sans donte simple et élégante, mais elle a le grave défaut de ne pas révéler les solutions étrangères; plusieurs des nombres indiqués par STEINER et DE JONQUIÈRES sont en conséquence *faux*, comme l'a récemment prouvé M. WIMAN.[1])

4. Citons encore, avant d'abandonner les coniques, les méthodes imaginées par DE JONQUIÈRES pour déterminer l'espèce de la courbe du 2ᵉ ordre dont on connaît cinq points ou cinq tangentes[2]), sa solution très-simple d'un problème de CAYLEY[3]), la généralisation qu'il a notée pour un théorème de CHASLES[4]), enfin ses démonstrations des propriétés de certains systèmes de coniques.[5])

En passant à d'autres sujets, nous signalerons avant tout la recherche, due à DE JONQUIÈRES[6]), des points, des droites et des plans doubles d'une homographie dans l'espace; c'est une recherche semblable à celle que CHASLES avait déjà faite dans le plan, mais qui, à cause de son importance, méritait bien un travail spécial; c'était l'opinion de STAUDT qui, deux ans après, y consacra un paragraphe du dernier cahier de ses célèbres *Beiträge zur Geometrie der Lage.*[7])

A DE JONQUIÈRES on doit encore[8]) la première solution géométrique de la question suivante, que CHASLES avait proposée: «On donne dans le même plan deux systèmes de sept points qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques.» C'est le *problème de la projectivité* dans le plan que ABADIE[9]) et POUDRA[10]) résolurent par l'analyse, qui a donné lieu à de savants développements de la part de M. CREMONA[11]) et de HESSE[12]), qui enfin a été le point de départ de toute

1) *Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangente und Normale bestimmt sind* (Zeitschr. für Mathem. **40**, 1895, p. 296—301).

2) *Coniques données par des points ou des tangentes* (Nouv. ann. de mathém. **18**, 1859, p. 215—217).

3) *Solutions géométriques de la Question 369 (voir p. 126)* (id. **16**, 1857, p. 189—197).

4) *Théorème concernant quatre coniques inscrites dans le même quadrilatère* (id. **15**, 1856, p. 312—314).

5) *Questions 677, 678 et 679 (SCHRÖTER) (voir 2ᵉ Série, t. II, p. 522)* (id. $\mathbf{3}_2$, 1864, p. 33—36).

6) *Note relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace* (id. **17**, 1858, p. 51—55).

7) § 35 p. 328.

8) *Solution géométrique de la Question 296 (voir t. XIV, p. 142)* (Nouv. ann. de mathém. **17**, 1858, p. 399—403). *Rectification* (id. **18**, 1859, p. 64).

9) Nouv. ann. de mathém. **14**, 1855, p. 145.

10) Id. **20**, 1861, p. 452. 11) Id. **15**, 1856, p. 58.

12) *Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung eines Problems der Homo-*

une longue série d'importantes investigations de M. R. STURM[1]): n'est-ce pas suffisant pour prouver que le travail que nous venons de citer de DE JONQUIÈRES a sa place marquée dans l'histoire de la géométrie?

A ce groupe de notes — différentes dans leurs sujets, mais qui, en considération des méthodes qui y sont appliquées, offrent une ressemblance intime — se rattachent enfin deux autres travaux sur les surfaces du 2e ordre, dont l'un[2]) a pour but la recherche d'une méthode pour reconnaître si un point donné est intérieur ou extérieur à une telle surface, supposée déterminée par neuf de ses points, dont l'autre[3]) donne la solution de cet autre problème: «déterminer l'espèce de la surface du 2e ordre qui passe par neuf points ou qui touche neuf plans donnés».[4]) Les solutions de DE JONQUIÈRES ont été perfectionnées depuis, mais on doit les signaler comme les premiers essais dans un champ nouveau et intéressant.

II.

Les «Mélanges de géométrie pure».

5. A l'époque où DE JONQUIÈRES marchait sur les traces de CHASLES, appartient la collection de travaux qu'il fit paraître sous le titre un peu vague de *Mélanges de géométrie pure*[5]); c'est par ce beau volume que notre auteur prit position parmi les géomètres français; les chapitres qui le composent sont si différents les uns des autres par les sujets qu'il traitent, que c'est une nécessité pour nous de les envisager séparément.

Le premier peut être considéré comme un commentaire du mémoire: *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace*, présenté par CHASLES à l'Institut de France le 26 juin

graphie von M. CHASLES abhängt (Journ. für Mathem. 62, 1862, p. 188—192; *Gesammelte Werke*, München 1897, p. 507—512).

1) *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* (Mathem. Ann. 1, 1869, p. 533—574).

2) *Note sur un problème de géométrie à trois dimensions* (Journ. de mathém. 3_2, 1858, p. 53—56).

3) *Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions* (id. 4, 1859, p. 81—92).

4) Un résumé de ces deux mémoires a été publié dans le Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique annéxé au t. 17, 1858 (p. 45—50) des Nouv. ann. de mathém.

5) *Mélanges de géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le Traité de géométrie supérieure de M. CHASLES, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troi-*

1843.[1]) La question est tellement importante pour la cinématique et la géométrie, qu'on doit être reconnaissant à de Jonquières du soin et du talent qu'il a déployés à expliquer et développer le texte trop concis du grand géomètre français.

La démonstration des élégants théorèmes sur les arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable et sur les arcs de lemniscate, que le même savant énonça dans les séances de l'Institut de France du 23 octobre 1843 et du 21 juin 1845, remplissent le IIe Chapitre des *Mélanges*. Les questions traitées ont une apparence élémentaire; toutefois ces recherches, à un moment où une nouvelle vie commençait pour la géométrie pure, eurent une incontestable opportunité et une grande importance, car elles servirent à prouver qu'on pouvait traiter, sans avoir recours à l'analyse, des questions qui semblent appartenir aux applications géométriques du calcul intégral. Cette signification des recherches citées de de Jonquières fut tout de suite saisie par E. Prouhet, qui l'apprécia en ces termes: «on peut considérer la théorie actuelle comme une conquête de la géométrie sur l'analyse, heureuse conquête qui n'appauvrit pas l'analyse et enrichit la science.»[2])

La généralisation des propriétés des foyers et des diamètres conjugués dans la théorie des sections coniques, que Chasles esquissa en 1846[3]) et qui a pour base la considération de l'involution des droites conjuguées par rapport à une de ces courbes ayant son centre en un point quelconque de son plan, est exposée tout au long dans le IIIe chapitre des *Mélanges*. Cette considération mène directement aux foyers de la courbe; «c'est peut-être», remarque notre auteur (p. 116), «la manière la plus naturelle de les introduire dans la théorie générale des sections coniques»; les géomètres qui après lui ont exposé la théorie de ces courbes eurent précisément la même idée et contribuèrent à répandre dans toutes les écoles ces féconds points de vue.

6. Le IVe chapitre de l'ouvrage que nous analysons se présente avec plus d'originalité, d'élévation et d'importance. C'est le principe de correspondance anharmonique qui en forme le canevas; de Jonquières fait connaître d'abord la définition, proposée par Chasles dans ses leçons[4]), de correspon-

sième ordre, etc. et la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre (Paris 1856; VIII + 261 p., in-8°).

1) Comptes rendus Paris **16**, 1843, p. 1420—1432. Comparez aussi la Note XXXIII de l'*Aperçu historique* et le *Mémoire de géométrie* qui fait suite à cet ouvrage.

2) Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 45.

3) *Généralisation de la théorie des foyers des sections coniques* (Comptes rendus Paris **22**, 1846, p. 874—900).

4) *Mélanges*, p. 153

dance homographique dans les formes de I[e] espèce, comme correspondance biunivoque; c'est la définition que CHASLES lui même publia dans les Comptes rendus du 24 décembre 1855, mais les développements ajoutés par DE JONQUIÈRES remontent à une date plus ancienne; d'ailleurs ils se rapportent presque tous à des questions inspirées par la lecture de mémoires antérieurs du géomètre qu'on a appelé avec raison l'*ARCHIMÈDE du XIX[e] Siècle.* Le passage vraiment original et le plus important est celui où notre géomètre, pour prouver que «deux faisceaux projectifs de courbes des ordres m et n engendrent par les intersections de leurs éléments correspondants une courbe de l'ordre $m + n$», emploie la démonstration ordinaire du principe de correspondance qu'on attribue à CHASLES.[1]) C'est une circonstance qui nous semble très remarquable, mais sur laquelle les historiens du principe de correspondance n'ont pas suffisamment insisté[2]); DE JONQUIÈRES lui-même l'a oubliée ou en a méconnu la valeur, car, au cours d'une célèbre querelle littéraire, il déclarait que «tout le mérite du procédé de démonstration dont il s'agit» appartenait à CHASLES.[3]) On peut ajouter que la détermination, due à DE JONQUIÈRES[4]), de l'ordre du lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n[5]), prouve que dès l'année 1860 il était en mesure de se servir très-bien du principe cité.

Dans la II[e] Section du même chapitre notre auteur complète un mémoire de CHASLES, qu'on lit dans les Comptes rendus[6]), car il expose

1) Nous croyons bon de rapporter ici le raisonnement dont il se sert: «En effet, une transversale quelconque coupera lo premier faisceau en une série de points groupés m par m, et le second faisceau en une série de points groupés n par n, correspondant aux premiers groupe à groupe. Si l'on rapporte tous ces points à une origine fixe, on pourra évidemment les lier entre eux par une équation à deux variables x et z du degré $(m + n)$, qui deviendra du degré $(m + n)$ en x seul pour tous les points communs aux deux séries de groupes, c'est-à-dire pour tous les points d'intersection de la droite et de la courbe, laquelle sera par conséquent du degré $m + n$.» (*Mélanges*, p. 174).

2) Voir l'intéressante note de M. C. SEGRE *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve* (Biblioth. Mathem. 5_2, 1892, p. 33—47); ce consciencieux travail nous dispense d'entrer en beaucoup de détails relatifs aux questions qui y sont traitées.

3) *Lettre à M. CHASLES sur une question en litige* (Paris 1867), p. 10.

4) *Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, p. 206—210. Date: Au Pirée, 20 décembre 1860).

5) Cet ordre avait été déterminé auparavant analytiquement par M. SALMON: voir le note *Rectification à un théorème de MM. STEINER et DEWULF* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1859, p. 314—319).

6) *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points* (Comptes rendus Paris **36**, 1853, p. 943—952).

différentes constructions de la courbe du 3[e] ordre et des méthodes pour trouver les $5-k$ points communs à deux cubiques planes passant par les mêmes $4+k$ points ($k=0, 1, \ldots, 4$); ce sont de nouvelles applications des théories de la *Géométrie supérieure*, «dont les ressources sont inépuisables».[1])

7. La dernière partie du volume que nous analysons est occupée par une traduction libre, accompagnée de nombreux commentaires, du *Traité* de MACLAURIN *sur les courbes du troisième degré.* Le but que s'est proposé DE JONQUIÈRES daus ce travail, est de répandre en France le goût pour la géométrie pure; et il est beau de voir ses efforts, couronnés d'un franc succès, pour rattacher les théories et les méthodes du géomètre anglais aux idées qui portent la marque d'origine de PONCELET et de CHASLES.

Considérée comme ouvrage de propagande, cette partie des *Mélanges* est conforme à une note de notre mathématicien[2]), où plusieurs propositions de la *Géométrie organique* de MACLAURIN (relatives aux courbes du 3[e] et du 4[e] ordre et aux polaires) sont éclaircies à l'aide de la *Géométrie supérieure*; cette note se termine par une élégante traduction française de l'éloquent avant-propos de cet ouvrage de MACLAURIN.

Considérée au contraire comme se rapportant aux courbes du 3[e] ordre, elle est liée à plusieurs de ses notes qu'il ne nous est pas permis de passer sous silence. Deux d'entre elles[3]) servent à établir des générations des cubiques planes; une troisième[4]) à démontrer ou à généraliser des propositions relatives à ces lignes et une quatrième[5]) à prouver géométriquement que le lieu des points de rencontre des normales à une conique en deux points alignés avec un point fixe est une cubique. Dans le même groupe nous trouvons enfin un mémoire[6]) dont le titre pourrait faire croire qu'il se rapportait aux sections coniques; au contraire son but principal est la solution de l'importante question qui suit: «construire, en n'employant que la règle et le compas, la conique osculatrice

1) *Mélanges*, p. 182.

2) *Note sur la Géométrie organique de* MACLAURIN, *contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne* (Journ. de mathém. **2**$_2$, 1857, p. 153—165).

3) *Solution de la Question 306 (voir pag. 211)* (Nouv. ann. de mathém. **14**, 1855, p. 318—320; voir aussi *Mélanges de géométrie pure* p. 166). *Solution géométrique des Questions 494 et 499 (voir t. XVIII, p. 414, et t. XIX, p. 43)* (id. **20**, 1861, p. 26—30).

4) *Solution géométrique de la Question 280 (*CHASLES*)* (id. **15**, 1856, p. 99—102).

5) *Solution de la Question 443 (voir p. 77)* (id. **18**, 1859, p. 261—264). *Addition* (id. ib. p. 406—407).

6) *Exercises sur les sections coniques* (id. **24**, 1865, p. 504—508).

du quatrième ordre en un point donné d'une courbe du 3e degré dont on connait neuf points»; il se termine par l'énoncé de deux élégantes propositions sur les courbes du dit degré, mais l'une d'elles n'est exacte que lorsqu'on se borne à la considération d'éléments réels.[1])

III.

Théorie générale des courbes planes.

8. Presque tous les articles de DE JONQUIÈRES que nous venons d'examiner ont pour but la démonstration de théorèmes ou la solution de questions qui avaient été énoncées par CHASLES ou par d'autres géomètres[2]); l'originalité des résultats établis étant limitée, la valeur de ces travaux est forcément restreinte. Mais pour notre auteur la période de noviciat — et telle est celle caractérisée par les productions dont il s'agit — ne devait pas être longue. En effet, au cours de l'année (1856) dans laquelle il publiait ses *Melanges de géométrie pure*, il présentait (15 septembre et 17 novembre) à l'Institut de France un long

1) L'énoncé donné par DE JONQUIÈRES pour la première de ces propositions est le suivant: «Parmi les coniques qui ont, avec une courbe du troisième ordre, un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a en général *trois* qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point. Les points de contact de ces coniques sont trois points situés sur une même conique, ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné. Si la courbe a un point de rebroussement, il n'y a plus qu'une seule de ces coniques.»

Or, en ayant recours par ex. aux représentations paramétriques des courbes du 3e ordre (elliptiques ou rationnelles), on voit que cet énoncé peut être remplacé par le suivant:

«Parmi les coniques qui ont, avec une courbe du troisième ordre, un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a en général *neuf* qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point. Les points de contact de ces coniques sont trois à trois situés sur trois coniques, ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné. Si la courbe a un point double, il n'y a plus que trois de ces coniques; si elle a un point de rebroussement, il n'y en a plus qu'une seule.»

L'autre des propositions de DE JONQUIÈRES est complètemont exacte; en voici l'énoncé:

«En chaque point d'une courbe du troisième ordre il y a en général trois coniques qui ont avec elle un contact du troisième ordre en ce point, et qui la touchent encore en un autre point. Ce nombre se réduit à un, si la courbe a un point double; il devient nul si elle a un point de rebroussement.»

2) Nous n'avons pas mentionné sa *Solution géométrique de la Question 377 (HARRISON)* (Nouv. ann. de mathém. 16, 1857, p. 407—409) car elle laisse intacte la partie la plus difficile et intéressante du problème proposé.

travail[1]), étroitement lié au IVe chap. de ce livre, sur une question fondamentale de la théorie générale des courbes planes; et, en attendant le jugement de cette illustre corporation, il en publiait un court extrait, dans le principal journal mathématique de la France.[2])

Pour faire comprendre la nature et l'importance de la question traitée par DE JONQUIÈRES, il faut se souvenir que NEWTON, à la fin de son *Enumeratio linearum tertii ordinis*, exposa une construction de la cubique (rationnelle) déterminée par son point double et sept points simples, en ajoutant qu'on pourrait construire d'une manière analogue d'autres courbes algébriques douées de points singuliers; c'est ce que prouvèrent MACLAURIN et BRAIKENRIDGE, sans toutefois aborder le problème — que NEWTON disait «inter difficiliora numerandum» et que G. CRAMER considérait comme nécessaire pour la connaissance des courbes — de décrire la courbe générale de son ordre, déterminée par un nombre suffisant de ses points.

Les moyens de vaincre la difficulté ont été fournis principalement par STEINER, lorsqu'il découvrit (1848) que «deux faisceaux projectifs de courbes des ordres n et n' engendrent, par les intersections de leurs éléments correspondants, une courbe de l'ordre $n + n'$».[3]) Presque en même temps CHASLES apprenait à construire, à l'aide de faisceaux projectifs, les courbes du 3e et du 4e ordre.[4]) Ces résultats faisaient surgir naturellement la question de trouver des constructions analogues pour les courbes des ordres supérieurs à quatre, question d'autant plus essentielle qu'on voyait que, dès qu'elle serait résolue, ou pourrait intervertir le théorème de STEINER, c'est-à-dire affirmer la possibilité d'engendrer toute courbe algébrique plane à l'aide de faisceaux projectifs de courbes d'ordres inférieurs.[5])

1) *Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe du quatrième ordre* (Mém. prés. par divers savants à l'académie des sciences **16**, Paris 1858).

2) *Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points (Extrait d'un mémoire sur la génération des courbes géométriques, présenté par l'auteur à l'Académie des sciences)* (Journ. de mathém. $\mathbf{1}_2$, 1856, p. 411—420).

3) *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (Journ. für Mathem. **47**, 1854, p. 1—6; *Gesammelte Werke* **2**, p. 493—500); comparez aussi p. 124 des *Mélanges de géométrie pure.*

4) *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points* (Comptes rendus Paris **36**, 1853, p. 943—952). *Sur les courbes du quatrième et du troisième ordre* (id. **37**, 1853, p. 222—277, 372—380, 437—443).

5) Cette possibilité a été prouvée, la première fois, par GRASSMANN (*Die höhere Projectivität in der Ebene, dargestellt durch Functionenverknüpfungen*; Journ. für Mathem. **42**, 1851, p. 208); mais qui lisait ou connaissait, vers l'année 1860, les travaux de l'inventeur de l'*Ausdehnungslehre?*

Dans son *Essai sur la génération des courbes géométriques*, DE JONQUIÈRES résolut complètement cette question, et la méthode qu'il employa à cet effet le mena incidemment à une vérité inattendue qu'il nous faut signaler.

On aurait pu croire que les $n^2 + n'^2$ points bases des deux faisceaux générateurs d'une courbe de l'ordre $m = n + n'$ pouvaient être choisis entre les $\frac{m(m+3)}{2}$ points déterminateurs de la courbe; DE JONQUIÈRES prouva que, au contraire, $nn' - 1$ d'entre eux doivent être pris en dehors des points donnés; ces autres $nn' - 1$ points et la correspondance entre les deux faisceaux sont cependant complètement déterminés par les données de la question. En conséquent, pour construire une courbe de l'ordre m passant par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés, on peut avant tout décomposer le nombre m en deux parties n et n' et, ensuite, répartir les $nn' - 1$ points fondamentaux inconnus entre les bases des deux faisceaux; en général on pourra faire cela de différentes manières; mais, dès qu'on en a choisi une, tout le reste est déterminé. Ces conclusions sont si belles qu'elles entrèrent bientôt — sous le nom de *théorème de* DE JONQUIÈRES — parmi les propositions fondamentales de la théorie des courbes planes[1]); je crois bon d'ajouter que ce sont précisément ces recherches de notre géomètre qui ont inspiré à CHASLES (délégué par l'Institut à leur examen) un autre théorème analogue[2]), qui devint aussi bientôt classique.[3])

Une fois arrivé aux conséquences que nous venons de rapporter, la construction effective d'une courbe algébrique n'exige que l'emploi de théorèmes de la géométrie supérieure; DE JONQUIÈRES, exceptionnellement familiarisé avec cette doctrine, n'eut pas de la peine à en tirer les élégantes constructions des courbes du 3e, 4e, 5e et 6e ordre, qui occupent la dernière section de son *Essai* et sur lesquelles CHASLES attira, dans son rapport à l'Institut de France, l'attention du monde mathématique.[4])

Il est bon de citer ici trois petites notes de notre auteur qui contiennent des applications des principes établis dans l'*Essai*. Une d'elles[5])

---

1) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Bologna 1862), §§ 56 et 57.

2) Comptes rendus Paris **45**, 1857, p. 321, note, et *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres* (id. ib. p. 1061—1068).

3) CREMONA, *Introduzione* §§ 54 et 55.

4) L'étude de ce savant et profond Rapport (signé par PONCELET, LIOUVILLE et CHASLES rapporteur et publié dans le t. **45**, p. 318—331, des Comptes rendus Paris) doit être recommandé à quiconque désire des renseignements sur l'*Essai* plus étendus que ceux fournis par notre analyse, forcément incomplète.

5) *Problème sur cinq coniques et cinq droites anharmoniquement correspondantes* (Nouv. ann. de mathém. **15**, 1856, p. 369—370).

se rapporte à la construction d'une courbe du 3e ordre à l'aide de faisceaux projectifs; une autre[1]) à la description analogue d'une courbe du 4e ordre passant par quatorze points, dont huit sont situés sur une conique. La dernière enfin[2]) a pour sujet la courbe dont l'équation polaire est la suivante:

$$\varrho = a \cos \varphi - b \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi;$$

c'est une courbe qui se présenta à l'auteur en traitant une question de cosmographie[3]) et dont il établit les principales propriétés et une construction à l'aide de faisceaux projectifs. On peut ajouter que plusieurs passages d'autres travaux de DE JONQUIÈRES renferment des applications de la même méthode générale de description des courbes algébriques.

9. Sur ces mêmes idées il est revenu bien plus tard, non seulement pour exposer en détail la manière d'engendrer par faisceaux projectifs les courbes unicursales d'ordre quelconque[4]) et en particulier celles du 5e degré[5]), mais encore pour essayer[6]) d'appliquer la génération dont il s'agit à la recherche du nombre maximum de points multiples dont peut être douée une courbe algébrique d'un ordre donné; ce sont certainement des questions du plus haut intérêt; mais il semble que, pour prononcer le dernier mot sur elles, il serait indispensable d'employer des moyens plus puissants que les simples notions arithmétiques, dont fit usage notre savant.

Ce retour de DE JONQUIÈRES à ses anciennes amours est marqué par un autre groupe de travaux dans lequel il se proposa de résoudre le séduisant problème de construire, au moyen de deux faisceaux projectifs de surfaces d'ordres inférieurs, une surface d'ordre m déterminée par

1) *Problème sur les courbes du quatrième ordre* (Nouv. ann. de mathém. p. 370—372).

2) *Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en astronomie* (Annali di matem. **1**, 1858, p. 112—116; date: *Arcole* (nom d'un navire) 3 août 1857; cf. G. LORIA, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven* (Leipzig 1902), p. 241).

3) *Cosmographie. Solution de la Question 331* (Nouv. ann. de mathém. **16**, 1857, p. 354—357).

4) *Génération des courbes unicursales* (Comptes rendus Paris **105**, 1887, p. 1148—1154).

5) *Construction géométrique des courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre douée de six points doubles* (Rendic. del circolo matematico di Palermo **2**, 1888, p. 118—123; date: Paris, Mai 1888).

6) *Recherche du nombre* maximum *de points doubles* (proprement dits et distincts) *qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'orde m, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples qui complètent la détermination de la courbe* (Comptes rendus Paris **105**, 1887, p. 917—923). *Détermination du nombre maximum absolu de points multiples d'un même ordre quelconque r, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique C_m, de degré m, conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe* (id. ib. p. 971—977).

$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1$ de ces points.[1]) Par des considérations très-simples et purement arithmétiques, il crut[2]) avoir établi la possibilité générale de cette construction; même il se figura pouvoir[3]) en tirer des propositions répondant à la question du nombre maximum de points multiples, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer à une surface algébrique de degré m. Mais bientôt il s'aperçut (ou il fut averti?) que ses raisonnements ne pouvaient d'aucune manière être considérés comme concluants, et il s'empressa de le déclarer comme il suit: «Les propositions, essentiellement *arithmétiques*, présentées dans ma Note précitée[4]), doivent dans chaque cas, être complétées et assujetties à des restrictions nécessaires, de telle sorte que les données de la question, d'ailleurs équivalentes au nombre des points qui déterminent la surface, satisfassent aux exigences *géométriques* que celle-ci comporte. Sans cela on se heurterait à des impossibilités que la résolution (lorsqu'elle est possible) des équations à mettre en oeuvre ne manquerait sans doute de révéler (soit par des incompatibilités, soit par des valeurs imaginaires qui en résulteraient pour les inconnues cherchées), mais qu'il vaut mieux éviter *à priori* par des considérations géométriques appropriées au sujet, lorsqu'il est possible de le faire. D'ailleurs ces restrictions tiennent toujours a ce qu'une courbe gauche, d'ordre n^2, intersection complète de deux surfaces d'ordre n, ne se trouve toute entière sur une surface de degré m $(m > n)$ que si elle satisfait à certaines conditions.»[5])

---

1) Chasles (voir la note *Deux théorèmes* etc. citée plus haut) avait déjà remarqué que deux faisceaux projectifs de surfaces des ordres n et n' engendrent une surface de l'ordre $n + n'$, en laissant comprendre qu'il ne croyait pas à la possibilité d'engendrer par cette méthode toute surface algébrique; en effet, pour qu'une surface de degré m puisse se construire de cette manière il est nécessaire et suffisant qu'elle contienne une courbe de l'ordre n^2, n étant $< m$.

2) *Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque* (Comptes rendus Paris **105**, 1887, p. 1203—1209); *Sur quelques notions, principes et formules qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques* (id. **106**, 1888, p. 234—241).

3) Voir les deux notes *Détermination du nombre maximum de points doubles, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface algébrique de degré m, dont la détermination est complétée par d'autres points simples donnés* (Comptes rendus Paris **106**, 1888, p. 19—26); *Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'où dépendent les limites respectives des nombres de points doubles (ou plus généralement, de points multiples d'ordre r) qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement* (id. ib. p. 152—162).

4) Il s'agit de la première entre celles que nous avons citées dans l'avant-dernière note.

5) *Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la*

Ces recherches de DE JONQUIÈRES peuvent donc être supprimées de la liste de celles par lesquelles il fit faire à notre science de réels progrès. Mais elles furent le point de départ d'autres investigations de détail, dont la valeur ne saurait être méconnue, car elles eurent pour résultat, d'abord, une nouvelle construction de la surface du 2e ordre déterminée par neuf points[1]); en second lieu des constructions par faisceaux projectifs de la surface du 3e ordre déterminée par un quadrilatère gauche et sept points[2]), ou par trois points doubles et sept points simples, ou par trois de ses droites et sept de ses points[2]), ou par cinq points et quatre droites dont l'une coupe les trois autres, ou bien par une de ses droites, sept points situés sur une même courbe gauche du 4e ordre et de la Ie espèce de la surface et enfin cinq autres points indépendants entre eux[3]); enfin, elles menèrent à la génération par faisceaux projectifs de la surface du 4e ordre déterminée par sept points doubles et six points simples.[4])

Je remarque encore que, dans une note qu'on lit au début d'un des travaux que nous venons d'analyser[1]), DE JONQUIÈRES a observé que la considération du cône circonscrit à une surface algébrique que G. SALMON utilisa pour prouver qu'une surface du 3e ordre a tout au plus quatre points doubles isolés[5]) peut servir à déterminer une valeur maximum du nombre D des points doubles d'une surface simple de l'ordre n dénuée de lignes singulières. En effet ce cône est de l'ordre $n(n-1)$; il a $n(n-1)(n-2)$ génératrices de rebroussement et $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+D$ génératrices doubles; donc, afin qu'il ne dégénère pas en cônes d'ordres inférieurs, on doit avoir

$$n(n-1)(n-2)+\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+D\leq\tfrac{1}{2}(n^2-n-1)(n^2-n-2);$$

on en tire

$$D\leq\tfrac{1}{2}n(n-1)(2n-5)+1,$$

comme dit notre auteur. C'est une formule qui semble mériter d'être introduite dans la théorie des surfaces algébriques; on pourra probable-

---

génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs (Comptes rendus Paris **106**, 1888, p. 526—529; voir particulièrement p. 528).

1) *Construction géometrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré déterminée par diverses conditions* (id. **106**, 1888, p. 907—912).

2) Voir l'article cité dans l'avant-dernière note.

3) *Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs, de la surface générale du troisième ordre* (id. **107**, 1888, p. 209—215).

4) *Construction géométrique d'une surface, à points doubles, du quatrième ordre* (id. ib. p. 430—432).

5) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes.* II. Teil (3. Aufl., Leipzig 1880), p. 370.

ment en trouver d'analogues en supposant que le sommet du cône considéré soit un point multiple de la surface donnée.

10. L'enchaînement des sujets nous a fait abandonner presque à contre-cœur la théorie des courbes planes algébriques, à laquelle nous nous empressons de revenir, après cette digression dans la géométrie de l'espace, pour remarquer que si l'*Essai sur la génération des courbes géométriques* est la plus ancienne des contributions importantes données par notre auteur à la théorie des lignes algébriques considérées isolément, il ne représente pas la seule. En effet, dans la collection de ses travaux, nous trouvons une exposition de la théorie des pôles et des polaires par rapport aux courbes algébriques[1]), plus élémentaire que les expositions plus anciennes; c'est un travail qui contient des applications et des détails ayant une certaine importance et de la nouveauté, mais dont le mérite principal se trouve dans la méthode; pour prouver la vérité de cette assertion, il suffit de signaler les nombreux points de contact qu'il offre avec le chapitre correspondant de l'*Introduzione* de M. CREMONA[2]), parue plus tard.

Dans ce livre classique a encore été reproduit le fond d'un autre travail de DE JONQUIÈRES, celui[3]) où il généralisa l'ancienne théorie de l'involution quadratique. Quoique la priorité de PONCELET à ce sujet ne puisse être mise en doute[4]), il est bien sûr que les idées à ce sujet de l'auteur du *Traite des propriétés projectives des figures* avaient grand besoin d'être développées pour pouvoir donner tous les fruits dont elles renfermaient les germes.[5]) Il est vrai que la découverte de la liaison entre les involutions et les faisceaux de courbes lui appartient, mais c'est à DE JONQUIÈRES que revient l'honneur d'avoir introduit les concepts de

1) *Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses applications de cette théorie* (Jonrn. de mathém. 2_2, 1857, p. 249—266). *Note relative au § XX du Mémoire qui précède. Deuxième mode de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points* (id. ib. p. 267—272).

2) A ces recherches de DE JONQUIÈRES est liée la démonstration qu'il donna [*Solution de la Question 388 (FAURE) (voir p. 183)*; Nonv. ann. de mathém. 16, 1857, p. 347—354] d'une proposition relative à la courbe polaire d'nn point par rapport à un système de droites.

3) *Généralisation de la théorie de l'involution. Applications géométriques* (Annali di matem. 2, 1859, p. 86—94).

4) C'est ce qne DE JONQUIÈRES reconnnt lui même plns tard; voir ses *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. CHASLES* (Paris 1866), p. 22, note (***).

5) On sait qu'il n'en fit qu'une rapide mention, le 8 mai 1843, à la fin de sa *Note relative à la réclamation de M. AMYOT* (Comptes rendns Paris 16, 1843, p. 953).

«rapport anharmonique de quatre groupes d'une involution» et d'«involutions projectives», d'avoir déterminé le nombre des points doubles d'une involution d'ordre quelconque et d'avoir signalé l'application qu'on peut faire des involutions à la résolution des équations algébriques. Il s'est encore occupé des constructions graphiques concernant les involutions; quoique les méthodes qu'il imagina aient le défaut d'exiger l'emploi des courbes d'ordre supérieur, quoique, par conséquent, les problèmes en question ne soient pas en général réductibles à d'autres plus faciles, DE JONQUIÈRES, en les faisant connaître, réussit à prouver le lien étroit qui existe entre la théorie nouvelle et des questions anciennes, et par suite rendit plus aisé l'accueil de la première.

C'est donc une valeur temporelle, transitoire, que posséda la partie constructive du mémoire de DE JONQUIÈRES que nous analysons; c'est une valeur comme œuvre de propagande qu'il ne faut pas méconnaître en considérant qu'elle appartient à une époque où la géométrie luttait encore avec acharnement pour conquérir sa place au soleil.

11. Il nous reste dans ce chapitre à analyser un dernier travail de DE JONQUIÈRES relatif aux courbes planes algébriques.[1]) C'est une étude inspirée par le désir de répondre à des questions proposées par STEINER dans son grand mémoire *Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben*[2]), très-répandu en France à la suite de la traduction faite par WOEPCKE et publiée par LIOUVILLE dans son Journal. Son but principal est de résoudre le problème général suivant: «Déterminer la classe de la courbe enveloppe d'une transversale qui coupe une courbe algébrique C du degré m de telle sorte qu'une fonction déterminée (F) des distances mutuelles des m points d'intersection de la transversale et de la courbe ait une valeur donnée λ; (F) étant une fonction algébrique entière et rationnelle». Ce problème peut être traité aujourd'hui en général par le «principe de transport» (*Übertragungsprinzip*) de CLEBSCH et, au moins dans certains cas, en substituant à la courbe donnée un système de m droites. DE JONQUIÈRES, sans employer ces artifices, expose au début de son mémoire des considérations délicates par lesquelles on peut le résoudre pour chaque fonction (F); il explique ensuite sa méthode, en l'appliquant à plusieurs exemples, pour un bon nombre puisés dans le travail cité de STEINER. Malgré le talent et la finesse que notre géomètre

---

1) *Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes* (Journ. für Mathem. 59, 1861, p. 313—334. Date: 10 juillet 1861).

2) Voyez en particulier l'Abschnitt intitulé *Einiges über geradlinige Transversalen bei algebraischen Curven*, où est annoncée ou promise une théorie complète du sujet.

y a déployés, le mémoire dont il s'agit est aujourd'hui un des moins lus et étudiés parmi ses travaux; probablement parce que la question qui y est traitée semble avoir un intérêt borné. C'est peut-être qu'on n'a pas assez remarqué que les enveloppes étudiées par DE JONQUIÈRES ont presque toutes des relations très-intimes avec les points singuliers et les tangentes singulières de la courbe fondamentale; que, par suite, leur considération projette quelque lumière sur les configurations auxquelles ces points et ces tangentes donnent naissance: cette remarque ne prouve-t-elle pas que la mine exploitée par notre savant n'est probablement pas encore épuisée?

IV.

Les séries de courbes.

12. Nous allons maintenant entreprendre l'analyse d'un groupe d'écrits DE JONQUIÈRES qui ont une grande importance, quoiqu'ils soient entachés d'erreurs, que l'historien de la géométrie ne peut, ni ne doit laisser passer inaperçues, même en ayant égard au nom illustre d'un savant récemment décédé; ce sont des travaux qui causèrent à leur auteur un grand nombre de tracas et bien des chagrins, car il furent le sujet de critiques très-vives et la cause d'une malheureuse polémique, qui trancha définitivement l'ancienne liaison entre CHASLES et son élève le plus distingué.

Le premier des travaux dont il s'agit[1]) a pour origine la définition suivante: «des courbes géométriques du degré n forment une *série* quand elles satisfont toutes en commun $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ conditions quelconques; et si N désigne le nombre des courbes de cette série qui passent en outre par un même point quelconque donné, la série se dira de l'indice N». En considérant comme sous-entendu que les conditions dont il s'agit soient toutes algébriques, cette définition ne laisse rien à désirer. Malheureusement DE JONQUIÈRES crut la préciser en ajoutant le Lemme suivant: «Toutes les courbes C_n d'une série d'indice N peuvent être représentées analytiquement par une équation $F(y, x) = 0$ du degré n dont tous les coefficients sont des fonctions algébriques, entières et rationnelles d'une indéterminée λ, qui s'élève, dans l'un d'entre eux au moins, au degré N, mais jamais à un degré supérieur». Or ce lemme est évidemment faux ou, si l'on veut être plus indulgent, il restreint énormément la portée des raisonnements de l'auteur, en les rendant applicables seulement aux séries rationnelles. C'est ce que G. ASCOLI remarqua le

1) *Théorème généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journ. de mathém. 6_2, 1861, p. 113—134).



premier[1]), en citant l'exemple de la série formée par les droites taugentes à une courbe générale dans son ordre, qui ne peut pas se représeuter analytiquement de la manière indiquée par ce lemme; c'est ce que A. Cayley confirma peu après[2]) en appliquant des méthodes à lui personnelles; mais c'est ce dout de Jonquières ne semble avoir été jamais convaincu.[3]) Pour l'excuser, au moins en partie, d'avoir eu cette opinion erronée, on peut remarquer qu'elle était très-répandue, non seulemeut en 1861, mais encore plusieurs anuées après.[4])

Cela n'empêche toutefois que les *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques* exposés par de Jonquières ue puissent se considérer comme démontrés que pour les séries rationnelles; une recherche particulière est nécessaire pour reconnaître s'ils sout valables en géuéral; si on la fait, on arrive à établir que dans cette condition il y en a effectivement plusieurs, p. ex.[5]) tous ceux qu'on peut prouver en se servaut de la méthode qu'on appelle «principe de correspondance de Chasles», quoique de Jonquières l'employât couramment bien avant 1864. Les *Théorèmes* cités se rapportent à l'enveloppe des axes harmoniques d'un point par rapport aux courbes d'une série, aux courbes d'une série qui sont taugentes à une droite ou à une courbe donnée, aux polaires d'un même ordre d'uu point par rapport aux courbes d'une série, au lieu des points de coutact des courbes d'une série avec leurs tangentes passant par un même point, à la courbe engendrée par deux séries projectives, etc. En appliquant quelques-uns de ces résultats, de Jonquières réussit à établir de nouvelles propositions ayant trait à d'autres systèmes de courbes; citons comme exemple la proposition suivante, qui a été le poiut de départ d'iuvestigations

1) *Sopra un teorema di Jonquières* (Giorn. di matem. 5, 1867, p. 377).

2) Voir l'*Annex N. 1* du mémoire *On the curves which satisfy given conditions* (Philos. trans. 158, 1868; *Mathematical Papers* T. VI, p. 242—243).

3) Voyez les efforts qu'il fit de Saïgon le 15 décembre 1865 (*Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque*, Giorn. di matem. 6, 1866, p. 45—53) pour le prouver, et cette étrange déclaration qu'il fit (*Note pour le Giornale di Matematiche*, id. ib. p. 212—213): «Quand je dis qu'une série d'ordre m et d'indice μ peut toujours être représentée par une seule équation algébrique du degré m en x et y et du degré μ en λ (λ étant une indéterminée), je n'entends parler que d'une possibilité idéale; car il arrivera souvent que l'analyse sera impuissante à effectuer les éliminations nécessaires pour obtenir cette équation».

4) C'est ce qui est prouvé par la phrase suivante, que j'emprunte à une comunication faite par M. Chasles le 19 novembre 1866: «M. de Jonquières a exprimé et défini les systèmes de courbes d'ordre m, comme tout le monde, par l'équation $F(x, y, \lambda) = 0$, qui ne renferme qu'un paramètre variable» (Comptes rendus Paris 63, p. 874).

5) E. de Jonquières, *Réponse à une observation présentée dans le Giornale di Matematiche* (Nouv. ann. de mathém. 7_2, 1868, p. 111—116 et 192).

dont nous aurons à nous occuper bientôt (n. 14): « Si des courbes du degré n doivent passer par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points et toucher μ courbes des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$, le nombre des C_n qui satisfont à la question est $m_1 m_2 \ldots m_\mu (m_1+2n-3)(m_2+2n-3)\ldots(m_\mu+2n-3)$», c'est une proposition que BISCHOFF avait établie auparavant[1]) et d'où DE JONQUIÈRES tira ailleurs[2]) la conséquence qu'il y a $2(2n-1)^\mu$ courbes du degré n qui passent par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points donnés et sont tangentes à μ coniques.

En se servant des mêmes considérations, DE JONQUIÈRES arriva encore à des propositions relatives au système formé par un point et une courbe[3]); elles sont toutes des cas particulies d'un théorème, qu'il énonça aussi sous forme de *Question (n° 583)* dans les Nouvelles annales de mathématiques[4]), et qui est assez élégant pour mériter une place dans notre compte rendu: « Étant données deux courbes fixes planes, l'une du degré m et l'autre de la classe m'; si une tangente roule sur celle-ci, et que, par les points où elle rencontre C_m, on mène à cette courbe ses normales en ces points d'intersection, les tangentes se couperont, deux à deux, sur une courbe du degré

$$\tfrac{1}{2}mm'(m-1)(2m-3)$$

et les normales se couperont, deux à deux, sur une courbe du degré

$$\tfrac{1}{2}mm'(m-1)(2m-1).»$$

13. Des remarques ayant été faites sur l'excessive généralité qu'ont les énoncés des *Théorèmes généraux*, DE JONQUIÈRES, le 8 février 1863, pendant une station au Golfe de Mexique, s'empressa[5]) de déclarer que les nombres qu'il avait donnés n'étaient vrais qu'en général et au plus. La raison pour laquelle ces théorèmes (particulièrement ceux où il y a des conditions de contact) conduisent en plusieurs cas à des conclusions évidemment fausses, se trouve moins dans la rationnalité des séries, impli-

1) *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven* (Journ. für Mathem. **56**, 1859, p. 166—177).

2) *Théorèmes concernant les courbes géométriques planes* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, p. 83—85).

3) Voir les XII et XIV des *Théorèmes généraux* et la fin du mémoire cité dans la note précédente.

4) T. **20**, 1861, p. 140.

5) *Note au sujet d'un article publié dans le Journal de Mathématiques T. VI, 2e Série* (Journ. de mathém. 7_2, 1863, p. 71—72). Voir aussi: *Corrispondenza* (Giorn. di matem. **1**, 1863, p. 128; date: Vera-Cruz, 6 février 1863) et *Correspondance* (Nouv. ann. de mathém. 2_2, 1863, p. 203—205).

citement supposée, que dans la présence de courbes singulières, qu'il est indispensable de séparer des courbes générales, lorsqu'on veut arriver à des résultats qui ne soient pas purement algébriques. C'est une des plus grandes gloires de Chasles d'avoir appris à obtenir seulement les solutions justes par l'introduction d'un second nombre, analogue à l'indice d'une série; cette introduction paraît assez naturelle lorsqu'on considère chaque courbe plane simultanément comme lieu de ses points et comme enveloppe de ses tangentes; mais son immense utilité dans les questions de géométrie énumérative ne pouvait être prévue que par un mathématicien de premier ordre. Dans la théorie des séries ou systèmes de ∞^1 courbes il est donc nécessaire de considérer deux périodes; l'une, qui doit porter le nom de de Jonquières, l'autre qui doit porter celui de Chasles; la première prépare la seconde, mais celle-ci a un caractère de perfection, dont celle-là était dépourvue. C'est ce qu'aujourd'hui tout le monde accorde sans peine, mais que ni Chasles ni Jonquières ne voulurent jamais[1]) reconnaître. Le maître méconnaissait à tort que l'introduction de l'indice d'une série a marqué dans la science un progrès important; mais l'élève, irrité d'attaques trop vives, arriva à nier la fécondité de l'idée de définir par deux caractéristiques tout système de coniques, fécondité dont il ne doutait pas lorsque, avant la polémique, il l'appliquait[2]) et l'étendait aux courbes d'ordre supérieur à deux[3]), fécondité dont on ne peut plus douter, non seulement après les applications sans nombre qu'on en fit, mais aussi dès qu'on vit que la notion de carac-

1) Cette assertion de M. Loria peut sans doute être justifiée, si l'on a égard qu'aux écrits publiés par Chasles et de Jonquières. D'autre part, celui-ci semble avoir reconnu plus tard l'importance de la seconde caractéristique de Chasles, et pour le prouver, je me permets de reproduire ici quelques lignes d'une lettre assez longue que de Jonquières m'adressait sur ce sujet le 4 mai 1890: „J'ai toujours fait „grand cas du perfectionnement apporté par l'introduction de la deuxième caracté- „ristique (qui est la corrélative de la première), qui a fait éviter, dans un grand „nombre de cas (sinon dans tous) les solutions impropres, provenant des couples „dégénérées, dont Chasles avait révélé l'existence dans les coniques, et je m'en étais „servi moi-même, après lui, avec éloges." G. Eneström.

2) *Solution de la Question 518 (voir t. XIX, p. 405 et t. XX, p. 56)* (Nouv. ann. de mathém. **20**, 1861, p. 85—87). Il s'agit de déterminer le lieu des foyers des coniques d'un système définis par ses caractéristiques.

3) *Formules exprimant le nombre des courbes d'un même système d'ordre quelconque, qui coupent des courbes données d'ordre également quelconque, sous des angles donnés ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions données* (Comptes rendus Paris **58**, 1864, p. 535—537). Il est juste de remarquer qu'à cette généralisation des méthodes caractéristiques, Chasles lui-même avait fait allusion dans sa célèbre communication de 15 février 1864 (comp. Comptes rendus Paris **58**, 1864, p. 300—301, note (*)).

téristiqnes ponvait s'étendre à une classe très-étendue de courbes transcendantes (les courbes panalgébriqnes).

Je ne suivrai pas les détails de cette douloureuse querelle littéraire[1]), dans laqnelle, il fant le reconnaître, le rôle le plns beau a été joné par DE JONQUIÈRES; je dois seulement remarquer qu'elle n'a pas été stérile pour la science, car elle a poussé le géomètre dont nous nous occnpons à approfondir et éclaircir les méthodes dont il avait fait usage antérieurement.[2]) Comme fruits de ces nouvelles recherches citons avant tout les considérations par lesquelles il a déterminé des limites de validité de certaines de ses formules concernant les systèmes de courbes (et de surfaces); ensuite un théorème fondamental qn'on trouve exposé tout au long dans ses *Recherches sur les séries de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque*, mais qu'on rencontre déjà, sous une forme moins explicite et précise, parmi ses *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque*; de ce théorème nons allons rapporter l'énoncé afin qne le lecteur y reconnaisse une des formes les plus intéressantes dn principe de la conservation du nombre de M. SCHUBERT: « dans toute question, relative aux propriétés projectives d'une série de conrbes (ou de surfaces), le nombre des solutions est, en général et au plns égal à μ fois ce qn'il est, dans la même qnestion pour un simple faisceau, μ étant l'indice de la série. » De ce principe, que DE JONQUIÈRES appela loi de multiplication, M. ZEUTHEN a donné nne démonstration analytique que DE JONQUIÈRES pnblia dans sa *Note pour le « Giornale di Matematiche »*.

14. La proposition de BISCHOFF que nous avons citée plus haut (n. 12) comme ayant été tronvée et appliquée par DE JONQUIÈRES, a été pour ce géomètre le point de départ de recherches particulières[3]) —

1) Je renvoie le lecteur désireux d'informations plus étendues à la note de M. SEGRE, citée plns hant; je veux seulement signaler qnelques pièces qui s'y rapportent, les seules qne je n'aurai pas occasion de citer ailleurs: *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 870—874, 909, 954); *Lettre à M. CHASLES sur une question en litige* (Paris 1867); *Documents relatifs à une revendication de priorité* (lithogr., Paris 4 février 1867); *Lettre de M. l'Amiral DE JONQUIÈRES à M. SALTEL sur une question en litige* (La Rochelle; une page datée dn 23 avril 1877).

2) Voir, ontre les travaux que nous avons eu ou que nons aurons occasion de signaler en d'autres occasions, la *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent* (Journ. de mathém. **10**$_2$, 1865, p. 412—416) et l'article *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques duns les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces* (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 793—797).

3) *Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre*



qui attirèrent tout de suite l'attention de A. CAYLEY[1]) — et des efforts par lesquels il arriva[2]) à déterminer le nombre des courbes algébriques d'un ordre déterminé qui, sous de certaines limitations, passent par des points donnés, ont avec une courbe donnée U_m des contacts assignés et satisfont à d'autres conditions étrangères à cette courbe. La formule qui résout cette belle question est trop compliquée pour être rapportée ici; c'est une complication à laquelle on devait s'attendre, vu la grande généralité de la question qu'elle résout; mais sa symétrie et son élégance parfaites font croire qu'il soit impossible de la remplacer par une autre meilleure. DE JONQUIÈRES l'établit de deux manières différentes; dans la première il supposa que U_m fût une courbe unicursale, dans la deuxième qu'elle fût un système de m droites; dans l'un et dans l'autre de ces cas il détermina avec soin quelles sont les modifications que ces hypothèses particulières introduisent dans la formule générale cherchée. Ce procédé de démonstration[3]), avait été imaginé sous la première forme par DE JONQUIÈRES depuis longtemps; CHASLES, auquel il l'avait fait connaître par une lettre du 17 février 1859, n'hésita pas à déclarer qu'il n'avait rien de mathématique[4]), quoique il l'eût reconnue sous sa seconde forme

---

$n (< mr)$ *avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont, en outre, à* $\frac{r(r+3)}{2} - n$ *conditions quelconque* (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 423—425); *Détermination des nombres de courbes du degré r qui ont deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n' $(n + n' < mr - 1)$, avec une courbe donnée du degré m, et qui satisfont, en outre, à* $\frac{r(r+3)}{2} - n - n'$ *autres conditions* (id. ib. p. 485—488); *Détermination du nombre des courbes de degré r qui ont, avec une courbe fixe U_m du degré m, autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra, et qui satisfont, en outre, à d'autres conditions données* (id. ib. p. 522—526).

1) *Note sur quelques formules de M. E.* DE JONQUIÈRES, *relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données* (id. ib. p. 666—670; ou bien *Mathem. Papers* T. VII, p. 41—43).

2) Voir le *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques* (Journ. für Mathem. **66**, 1866, p. 289—321). Une généralisation du résultat principal obtenu par DE JONQUIÈRES a été indiquée par CAYLEY dans les Art. 74—93 de son grand mémoire *On the curves which satisfy given conditions* (Phil. Trans. **158**, 1868; ou *Mathem. Papers* **6**, p. 226 et suiv.). Des démonstrations algébriques rigoureuses dn même résultat ont été données par M. BRILL; voir les travaux *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Mathem. Ann. **4**, 1871, p. 527—549), *Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve* (id. **6**, 1873, p. 32—65) et *Ueber die Correspondenzformel* (id. **7**, 1874, p. 607—622).

3) Pour l'historique de ses origines je renvoie à ma note *Desargues e la geometria numerativa* (Biblioth. mathem. 9_2, 1895, p. 51—53).

4) *Lettre à M.* CHASLES *sur une question en litige* (Paris 1867), p. 8.

comme une méthode «naturelle et très-usitée»[1]); toutefois, dans une communication faite à l'Académie des sciences le 12 mars 1866, il eut recours aux courbes rationnelles, dans un but analogue à celui de DE JONQUIÈRES, en légitimant de la sorte toute une catégorie de raisonnements géométriques.

Le tour de démonstration dont il s'agit s'est imposé par sa puissance, car, même dans le monde des idées, bien souvent, la force prime le droit; il constitue aujourd'hui une des ressources les plus précieuses dont dispose la géométrie énumérative, car c'est un des aspects sous lequel se présente le principe de la conservation du nombre. A ce propos nous remarquerons que notre auteur, non content d'avoir exposé clairement ce principe dans le mémoire que nous avons cité dernièrement[2]), l'étudia à fond au point de vue philosophique, dans un travail plus récent[3]), provoqué par des doutes soulevés par M. DEWULF; les nombreuses et élégantes applications qu'il a développées du même principe à des questions de la géométrie plane et de celle de l'espace[4]) servirent à persuader tout le monde de son immense utilité et à vaincre cette opposition qui attend toute idée vraiment originale et qui semble rompre avec des habitudes intellectuelles surannées.

Par ces remarques nous sommes sortis du sujet de ce chapitre; nous y reviendrons bientôt (n. 16) pour signaler une belle proposition, relative aux réseaux de courbes, que notre auteur établit par les recherches dont nous allons maintenant nous occuper.

---

1) *Aperçu historique*, p. 76 de la 2e éd.

2) Il n'est pas inutile d'en extraire le passage suivant (p. 315—316 du *Mémoire sur les contacts multiples* etc.): «Au fond ce principe découle directement de la *loi de continuité*, à laquelle sont soumises les fonctions algébriques, et il revient à dire que, dans toutes questions concernant ces fonctions, le *nombre* des solutions reste invariable, quelles que soient les conditions particulières qu'on y introduise, pourvu qu'on ait égard aux solutions nulles, infinies, imaginaires, et à l'ordre de multiplicité de chacune d'elles; car ceci n'est, en dernière analyse, qu'une autre manière d'exprimer le théorème fondamental de la théorie des équations, savoir qu'une équation algébrique entière et rationnelle du degré n, possède toujours n racines réelles, ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$».

3) *Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver* (Annali di matem. 8_2, 1877, p. 312—328).

4) En suivant l'exemple d'un juge très-compétent, M. H. SCHUBERT (voir Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 9 [1877], p. 440; *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 334), je cite, comme particulièrement ingénieuse la détermination, faite par notre auteur, du nombre des constantes desquelles dépend une surface algébrique générale dans son ordre.

V.

Surfaces et courbes gauches algébriques.

15. L'intérêt de de Jonquières pour la géométrie des surfaces et des courbes gauches algébriques remonte au moins à l'année 1859; cela ressort d'une petite note[1]) destinée à faire connaître en France les raisonnements par lesquels Cayley et Salmon arrivèrent à établir l'existence de vingt-sept droites dans toute surface générale du 3e ordre; mais c'est seulement trois ans plus tard qu'il commença à s'occuper méthodiquement de ces intéressantes figures.

Le *Treatise on the geometry of three dimensions* de Salmon venait alors de paraître; l'*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* de Cremona ne comptait que peu de mois; à un mathématicien tel que de Jonquières devait en conséquence paraître séduisante l'idée de combler les lacunes que (d'après l'exposé de M. Salmon) présentait la géométrie de l'espace, en lui faisant atteindre le haut niveau de perfection que M. Cremona avait su donner à la théorie des courbes planes. Les nombreux points de contact entre le premier des travaux de de Jonquières sur les singularités des surfaces[2]) et les *Preliminari a una teoria geometrica delle superficie* sont suffisants à prouver que ses nobles efforts ont été couronnés d'un éclatant succès.

Le point de départ, je dois même dire la base, de tout ce travail est la théorie des pôles et des polaires par rapport à une surface d'ordre déterminé. Les propositions établies par de Jonquières se rapportent au nombre ou à la situation des points doubles des surfaces d'un faisceau, d'un réseau ou d'un système linéaire ∞^3, et aux contacts qui peuvent avoir lieu entre les surfaces de systèmes différents. Ces théorèmes sont aujourd'hui si connus que nous n'apprendrions rien de nouveau à nos lecteurs en reproduisant ici leurs énoncés. Faisons seulement une exception en faveur du suivant: «Le lieu des points dont chacun a le même plan polaire par rapport à une surface fixe S_m et à l'une des surfaces d'un faisceau (S_n) est une courbe gauche du degré

$$(m + 2n - 3)^2 - (n - 1)(n + 2m - 3)\text{»;}$$

nous le citons car il mène immédiatement au suivant: «Parmi les surfaces de degré n qui forment un faisceau donné, il y en a, en général

1) *Solution de la Question 376 (voir t. XVI, p. 179)* (Nouv. ann. de mathém. 18, 1859, p. 129—138).

2) *Étude sur les singularités des surfaces algébriques. Noeuds ou points coniques* (Journ. de mathém. 7_2, 1862, p. 409—413; datée: Golfe du Mexique, 29 septembre 1862).

$$m\{(m+2n-3)^2-(n-1)(n+2m-3)\}$$

qui touchent une surface donnée du degré m»; c'est un résultat que DE JONQUIÈRES proposa dans les Nouvelles annales de mathématiques comme *Question* sous le nº *643.*[1])

16. D'un titre très-analogue, mais d'une physionomie très différente est un autre mémoire[2]) de notre savant, dont le but principal est de prouver qu'une surface algébrique de l'ordre n tout à fait générale a

$$\tfrac{1}{6}n(n-2)(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-111n^2+58n-960)$$

plans tangents triples.[3]) La détermination de ce nombre est une question que G. SALMON avait traitée nn peu confusément dans son mémoire *On the degre of the surface reciprocal to a given one* (Trans. of the r. Irish academy **23**, 1857), puis dans sa *Geometry of three dimensions*; la méthode employée par DE JONQUIÈRES a été jugée digne de prendre place dans la traduction allemande de cet ouvrage.[4]) Elle se fonde sur l'idée assez naturelle, mais sur laquelle notre auteur a d'indiscutables droits de priorité, de considérer un plan bitangent d'une surface S_n comme la position limite d'un plan tangent commun à S_n et à une autre surface analogue S_n', qui tend à coïncider avec S_n, et un plan tritangent comme position limite d'un plan bitangent à S_n et tangent à S_n'.

Ce tour de raisonnement mérite d'autant plus notre attention qu'il est applicable, *mutatis mutandis*, à un grand nombre de questions; DE JONQUIÈRES lui même s'en est servi plus tard[5]) pour déterminer, par des considérations de géométrie à trois dimensions, le nombre des courbes d'ordre n d'un réseau[6]) douées chacune de deux points doubles.[7]) Comme

1) Nouv. ann. de mathém. 2_2, 1863, p. 94.

2) *Études sur les singularités des surfaces algébriques. Plans tangents doubles et triples.* (Nouv. ann. de mathém. 3_2, 1864, p. 5—21).

3) Pour $n=3$ ce nombre devient égal à 45, comme on devait s'y attendre, et non à 135, comme dit par inadvertance notre géomètre.

4) SALMON-FIEDLER, l. c. p. 654.

5) *Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques* (Mathem. Ann. **1**, 1869, p. 424—431).

6) Il est bon de remarquer que DE JONQUIÈRES part d'une définition de «réseau de courbes d'ordre» évidemment trop étroite, car elle ne comprend que les réseaux ayant chacun $\frac{n(n+3)}{2}-2$ points de base; mais il raisonne effectivement sur les réseaux généraux dont $C+\lambda C'+\mu C''=0$ est l'équation.

7) Cette question avait été résolue auparavant par M. CREMONA *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Annali di matem. **6**, 1864) et inductivement par CAYLEY (voir l'art. 35 du mémoire *On the theory of involution*, Transact. of the Cambridge philos society **11**: 1, 1866; *Mathem. Papers*, T. V, p. 306); DE JONQUIÈRES ne connaissait que ce dernier travail.

tout réseau de courbes de l'ordre n peut se considérer comme la section par son plan des surfaces d'un réseau du même ordre, la question énoncée revient à la détermination du nombre des surfaces d'un réseau qui sont bitangentes à un plan donné; et pour le trouver le savant marin considère avant tout les surfaces du réseau qui touchent en même temps deux plans donnés, en se réservant de faire coïncider le second avec le premier. Par cet artifice logique et en se servant: 1° du nombre — trouvé par Cayley[1]) — des courbes d'un réseau douées chacune d'un point de rebroussement, 2° de l'expression — suivant Steiner[2]) — du nombre cherché dans le cas où le réseau est formé par les courbes polaires des points du plan par rapport à une courbe algébrique, il conclut que ce nombre est exprimé par la fonction suivante de n:

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).\text{[3])}$$

Cette manière d'arriver à ce résultat est remarquable au moins pour deux raisons; car avant tout elle offre peut-être le premier exemple de l'utilité d'employer des considérations de géométrie de l'espace pour résoudre des problèmes de géométrie énumérative relatifs aux systèmes de courbes planes, utilité qui, une fois établie, transforma ce procédé en un des plus puissants de la géométrie moderne; en deuxième lieu elle prouve quels sont les fruits que l'on peut tirer, dans la recherche de nombres relatifs à des systèmes de ∞^k courbes, de la connaissance des nombres correspondants pour des systèmes ∞^k spéciaux.

17. Tandis que le second des travaux de de Jonquières sur les singularités des surfaces a avec le premier une liaison assez superficielle, il y en a un autre[4]) qui — quoique, d'après une déclaration de l'auteur, destiné a développer un programme de recherches sur les courbes gauches, que Chasles avait esquissé[5]) — représente une véritable conti-

1) Voir le mémoire cité tout-à-l'heure.

2) Voir la célèbre communication faite en 1848 à l'Académie de Berlin: *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* et publiée dans le t. **47** du Journ. für Mathem.

3) Dans une note préliminaire (*Propriétés des réseaux de courbes et de surfaces algébriques*; Comptes rendus Paris **67**, 1868, p. 1338—1340) pour ce nombre est donnée l'expression

$$\tfrac{3}{2}(n-1)\{3(n-1)^2-14(n-1)+11\};$$

en écrivant

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-3)$$

on voit qu'elle est inexacte.

4) *Études sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque* (Annali di matem. **5**, 1863, p. 24—38; date: Golfe du Mexique, 21 octobre 1862).

5) *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (Comptes rendus Paris **53**, 1861, p. 985—996).

nuation du mémoire que nous avons analysé au début du n. 15. DE JONQUIÈRES y étudie exclusivement les courbes qui sont des intersections complètes de surfaces algébriques, les systèmes linéaires qu'elles forment et les questions de contact auxquelles elles donnent lieu; pour les résoudre il faut avoir recours à la théorie des surfaces, même un grand nombre des propositions auxquelles on parvient ne sont au fond qu'une façon particulière d'énoncer des théorèmes sur ces figures. Les vérités établies par notre auteur appartiennent en général à la géométrie énumérative et se rapportent, pour la plus graude partie, mais non exclusivement, à la géométrie projective[1]); il ne nous est pas possible d'en transcrire ici les énoncés, même en nous bornant aux principaux; mais il nous semble nécessaire de faire une exception en faveur de deux d'entre eux.

Le premier affirme que par une droite quelconque r de l'espace on peut mener $mn\,(m+n-2)$ plans tangents à la courbe d'intersection de deux surfaces des ordres m, n; leurs points de contact sont les points où la courbe donnée est coupée par une certaine surface de l'ordre $m+n-2$; ils se trouvent donc sur deux courbes gauches, l'une de l'ordre $m\,(m+n-2)$ et l'autre de l'ordre $n\,(m+n-2)$. Notre géomètre propose d'appeler la première *courbe gauche polaire de r*; on aurait tout aussi bien pu donner ce nom à la seconde; c'est certainement à cause de l'ambiguité de cette dénomination qu'elle n'a pas été adoptée et elle est aujourd'hui oubliée.[2])

Le second théorème se rapporte aux faisceaux de courbes déterminés sur une surface de l'ordre n par deux faisceaux de surfaces des ordres m et p; il affirme qu'entre les courbes de ces faisceaux il y en a

$$n\,\{n^2+3\,(m^2+p^2)+6n\,(m+p)+12mp-12n-24\,(m+p)+26\}$$

couples ayant entre elles un contact du 2ᵉ ordre. C'est un résultat d'une généralité considérable et d'une grande importance dont, malheureusement, DE JONQUIÈRES n'a pas fait connaître la démonstration. Pour le cas

1) A la géométrie métrique appartient p. ex. le théorème suivant: «Par un point donné on peut mener en général $mn\,(m+n-1)$ plans normaux à la courbe d'intersection de deux surfaces des ordres m et n».

2) Il semble bien plns avantageux d'introduire la considération de la surface d'ordre $m+n-2$ que l'on pourrait appeler *surface polaire* de la droite par rapport à la courbe. Si $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$ et $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$ sont les équations homogènes de la courbe considérée et p_{ik} les coordonnées de la droite r, l'équation de la surface polaire est

$$\sum_{ik} p_{ik} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_i} & \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0.$$

$n = 1$ il coïncide avec un théorème que Steiner a énoncé[1]) et que M. Berzolari a récemment démontré[2]); en général on peut le considérer comme corollaire d'une formule que M. Segre a donnée[3]) pour exprimer le nombre τ des courbes de deux faisceaux situés sur une même surface qui sont osculatrices entre elles[4]): toujours est-il étrange que notre auteur, qui n'avait pas l'habitude de se faire croire sur parole, ait prétendu cela dans un cas où la chose peut paraître assez difficile.

18. Par ces longues et profondes études sur les surfaces algébriques et sur quelques systèmes qu'elles forment, études qui avaient suivi ses travaux sur les séries de courbes planes algébriques, de Jonquières était admirablement préparé pour aborder la théorie générale des systèmes de ∞^1 surfaces. On ne doit donc pas s'étonner si, dès le 28 mars 1864, il put présenter à l'Académie des sciences un mémoire[5]) dans lequel se trouvent généralisées pour les surfaces algébriques d'ordre quelconque les célèbres considérations par lesquelles Chasles, le 15 février de la même année, avait jeté les bases de la théorie des caractéristiques des systèmes de sections coniques. C'est dans l'écrit dont il s'agit que notre mathématicien introduisit les notions de «système de surfaces» et de «caractéristiques» μ, ν, ϱ d'un tel système. Si nous ne croyons pas nécessaire de donner une notice détaillée des théorèmes qu'il y a exposés, c'est que plusieurs sont fidèlement modelés sur ceux que le créateur de la théorie des caractéristiques pour les coniques avait fait connaître dans la communication que nous avons rappelée plus haut. Citons seulement la formule

$$N = \mu r + \nu n + \varrho m,$$

donnant le nombre des surfaces d'un système (μ, ν, ϱ) qui sont tangentes à une surface dont m est le degré, r la classe et n la classe d'une de ses sections planes. De Jonquières la démontra avant tout pour une sur-

1) Voyez la communication citée plus haut.

2) *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano* (Atti della r. accad. di Torino **31**, 1896, p. 426—484).

3) Voir la note *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (id. ib. p. 485—501).

4) La formule dont il s'agit est la suivante

$$\tau - 2\pi = 4m - (\sigma + \sigma') - P;$$

en supposant que $\pi, m, \sigma, \sigma', P$ aient les valeurs suivantes

$$n(n + m + p - 4)(n + 2m + 2p - 4),\ mnp,\ nm^2,\ np^2, (n - 2)(n^2 - 2n + 2)$$

elle donne pour τ l'expression donnée par M. de Jonquières. Cette remarque est due à M. Segre lui-même.

5) *Propriétés diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque* (Comptes rendus Paris **58**, 1864, p. 567—571).

face générale, il établit plus tard[1]) qu'elle est vraie également si la surface est formée par un groupe de plans, ou si elle a seulement une ligne double; « on est conduit (dit-il aussi) à admettre qu'elle convient à tous les cas »; des recherches postérieures[2]) ont prouvé que DE JONQUIÈRES avait parfaitement raison de nourrir cette conviction. Analogue à la précédente est la formule

$$N = \mu r + \nu p,$$

qui donne le nombre de surfaces d'un système (μ, ν, ϱ) tangentes à une courbe d'ordre p, ayant une développable osculatrice de degré r. Il est facile de l'établir, si la courbe considérée est l'intersection complète de deux surfaces; DE JONQUIÈRES prouva, dans le mémoire dernièrement cité, qu'elle est encore vraie lorsqu'elle forme, avec $k-1$ intersections complètes, une nouvelle intersection complète de deux surfaces; il fut en conséquence conduit à admettre qu'elle est toujours vraie; c'est ce que des géomètres sont arrivés, depuis, à établir rigoureusement.[3])

19. En développant cet ordre de considérations, notre auteur a été amené à étudier[4]) les « séries de courbes à double courbure ». Un tel système est engendré par les intersections mutuelles de deux séries projectives de surfaces, l'une de degré m et d'indice μ, l'autre de degré m' et d'indice μ'. Sur ces systèmes DE JONQUIÈRES énonça trois théorèmes, que nous allons examiner, pour en déterminer les fondements et les limites d'applicabilité, et pour essayer de découvrir la voie par laquelle il y est arrivé.

I. « Une droite quelconque de l'espace est rencontrée par $m\mu' + m'\mu$ courbes du système »; on le prouve par une application du principe de correspondance, donc il est vrai pour toute série de courbes gauches.

II. « Un plan quelconque est en général touché par

$$\mu' \cdot m\,(m + 2m' - 3) + \mu \cdot m'(m' + 2m - 3)$$

courbes du système » Pour le prouver remarquons que les deux systèmes de surfaces sont coupés par un plan quelconque π de l'espace en deux analogues systèmes projectifs de courbes; chaque courbe gauche de la série tangente au plan π est liée à deux courbes correspon-

1) *Propriétés des systèmes de surfaces d'ordre quelconque* (Comptes rendus Paris 61, 1865, p. 440—443).

2) BRILL, *Ueber Systeme von Curven und Flächen* (Mathem. Ann. 8, 1875, p. 534—538); SCHUBERT, *Ueber geometrische Erweiterungen des Bézout'schen Fundamentalsatzes* (Göttinger Nachrichten 1879, p. 401—426) et *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879), p. 54.

3) SCHUBERT, *Kalkül* etc., p. 296.

4) *Note sur les séries de courbes à double courbure* (Giorn. di matem. 4, 1866, p. 210—211).

dantes des deux systèmes, tangentes entre elles. Or le **Tactinvariant** de deux courbes planes des ordres m et m' est du degré $m'(m' + 2m - 3)$ dans les coefficients de la première et du degré $m(m + 2m' - 3)$ dans ceux de la seconde; si, donc, les deux systèmes de surfaces sont représentés par les équations $\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$, $\psi(x, y, z, \lambda) = 0$, des degrés μ et μ' en λ, en écrivant que deux de leurs surfaces correspondantes sont coupées par π en deux conrbes tangentes entre elles, on arrive à une équation en λ du degré $\mu m'(m' + 2m - 3) + \mu' m(m + 2m' - 3)$. D'où suit le théorème énoncé; par ce raisonnement (qui est probablement celui qu'employa DE JONQUIÈRES) il est en même temps prouvé que ce théorème est vrai certainement pour les séries rationnelles; par des exemples on verra qu'il subsiste seulement pour elles. — Les deux nombres dont parlent les théorèmes I et II s'appellent les «caractéristiques de la série de courbes gauches».

III. «Le nombre des points doubles de la série est exprimé comme il suit:

$$\mu' m[(m + 2m' - 3)^2 - (m' - 1)(m' + 2m - 3)]$$
$$+ \mu m'[(m' + 2m - 3)^2 - (m - 1)(m + 2m' - 3)].»$$

Le nombre dont il s'agit est, en effet, égal à celui des surfaces correspondantes des deux systèmes donnés, qui sont tangentes entre elles. Or, du théorème que nous avons cité à la fin du n. 15, on tire tout de suite que le **Tactinvariant** de deux surfaces des ordres m, m' est, dans les coefficients de la première de l'ordre

$$m'\{(m' + 2m - 3)^2 - (m - 1)(m + 2m' - 3)\}$$

et dans les coefficients de la seconde de l'ordre

$$m\{(m + 2m' - 3)^2 - (m' - 1)(m' + 2m - 3)\}.$$

Si donc on suppose que les deux systèmes de surfaces soient encore représentés par les équations $\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$, $\psi(x, y, z, \lambda) = 0$ et que l'on cherche de déterminer λ de manière qu'un contact ait lieu entre deux surfaces correspondantes, on arrive à une équation d'un degré égal à la somme de ces deux nombres. Cela prouve que pour la validité du théorème III de DE JONQUIÈRES il est **suffisant** (et par des exemples on prouve qu'il est **nécessaire**) qu'il s'agisse de séries rationnelles. — De ces théorèmes notre géomètre fit des applications remarquables aux systèmes de ∞^1 coniques de l'espace.[1])

Je finirai ce Chapitre en citant de nouveau les belles investigations

---

1) Il trouva ainsi, d'accord avec M. SCHUBERT (*Kalkül* etc., p. 95) $\mu\nu^7 = 34$, $\varrho\nu^7 = 92$, $\nu^8 = 116$, $\delta\nu^7 = 140$.

(comp. n. 13) sur les limites de validité de théorèmes relatifs aux systèmes de (courbes et de) surfaces qu'il fit dans un travail que nous avons déjà cité[1]) plus d'une fois.

VI.

Transformations géométriques. Polyèdres.

20. Notre analyse des travaux géométriques du savant marin, dont nous nous occupons, approche de sa fin; nous allons la terminer par une courte analyse des fruits qu'il recueillit dans un champ dont M. CREMONA est le maître incontesté.

Presque dès le début de sa carrière mathématique, DE JONQUIÈRES a été attiré par la théorie des transformations géométriques, en s'occupant[2]) de déduire de nouvelles conséquences de cette loi de transmutation des figures que MAGNUS avait fait connaître en 1832.[3])

Mais il a été amené à apporter à cette théorie une contribution vraiment importante par le désir de perfectionner la théorie des courbes gauches algébriques, pour étudier lesquels des bons moyens faisaient défaut, dès qu'on supposait qu'il ne s'agissait pas d'intersections complètes de surfaces. DE JONQUIÈRES, avec raison, crut reconnaître qu'on pouvait arriver à un procédé de recherche assez étendu en généralisant la méthode par laquelle SEYDEWITZ avait engendré et étudié les cubiques gauches.[4])

Mais pour atteindre cette généralisation il est indispensable qu'on ait à sa disposition au moins une correspondance biunivoque entre les points de deux plans différente de l'homographie. Une telle correspondance se trouve établie dans un mémoire que DE JONQUIÈRES présenta à l'Institut

1) *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et des surfaces algébriques d'ordre quelconque* (Paris 1866). La partie doctrinale (non polémique) de ce mémoire est la reproduction de celui (daté de Saïgon, 24 décembre 1865) qui a été soumis au jugement de l'Académie des sciences le 5 fév. de l'année suivante (Comptes rendus Paris **62**, 1866, p. 293—294 et 349) sous le titre: *Essai d'une théorie des séries et des réseaux de courbes (sur le plan et dans l'espace) et des surfaces.* Une nouvelle rédaction du même mémoire a été présentée plus tard à la même corporation (Comptes rendus Paris **63**, 1866, p. 214 et 387); on peut lui joindre les *Nouvelles observations sur les séries ou systèmes de courbes* annoncées dans la suite (id. p. 909).

2) *Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples des degrés supérieurs, et théorèmes relatifs à ces courbes* (Annali di matem. **1**, 1858, p. 110—112; daté: *Arcole*, 3 août 1857).

3) *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie* (Journ. für Mathem. **8**, 1832, p. 51—63).

4) *Linear-Construction einer Curve doppelter Krümmung* (Archiv der Mathem. und Physik **10**, 1847, p. 211).

de France dans les séances dn 10 octobre 1859 et du 23 janvier 1860; les Comptes rendus[1]) en contiennent un court résumé, mais un rapport n'en a jamais été fait; la première partie de ce mémoire parut en 1864[2]), et le travail complet seulement vingt-un ans après, par les soins de M. GUCCIA[3]): toutefois, depuis longtemps, le nom de *transformation* DE *JONQUIÈRES* a été donné à la correspondance qui y est étudiée.

Ce mémoire de DE JONQUIÈRES débute par la remarque que toutes les courbes de l'ordre n, situées dans un plan, et qui ont un point $(n-1)$-tiple et $2(n-1)$ points simples communs forment un de ces systèmes qu'on appelle à présent réseaux omaloïdiques; car ces courbes sont telles qu'il en passe une par deux points quelconques du plan et que deux quelconques d'entre elles se coupent en un seul point variable. En établissant une correspondance biunivoque entre ces courbes et les droites d'un autre plan π_1, et en ajoutant la condition que le point où se coupent deux droites quelconques de π_1 corresponde au point variable commun aux deux courbes correspondantes de π, on arrive à une correspondauce birationelle entre π et π_1. Deux figures correspondantes de π et π_1 s'appellent *isographiques*; et DE JONQUIÈRES fait la remarque très-importante que la relation entre ces plans est symétrique, de manière que en π_1 on a un autre système de ∞^2 courbes du degré n ayant un point $(n-1)$-tiple et $2(n-1)$ points simples communs. Il ajoute que, si π_1 coïncide avec π, il y a $n+2$ points doubles; et pour le prouver il considère le lieu (*courbe isologique*) des points P dont les correspondants P_1 se trouvent sur une droite passant par un point fixe.

En projetant deux plans isographiques de deux points quelconques de l'espace on arrive à deux *faisceaux isographiques*; par les intersections de leurs droites correspondantes ils engendrent une courbe de l'ordre $n+2$, dont DE JONQUIÈRES établit quelques propriétés et indique la construction de la tangente.

Pour prononcer un jugement équitable sur ces recherches de notre auteur, il faut bien se souvenir qu'elles sont antérieures à la théorie générale des transformations birationnelles; car c'est seulement de la sorte

1) T. **49**, 1859, p. 542.

2) *De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres* (Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_2$, 1864, p. 97—111).

3) *Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites* (Giorn. di matem. **23**, 1885, p. 48—75; date: A bord la frégate le *d'Assas*, 25 novembre 1859). Voir ce que dit DE JONQUIÈRES en présentant à l'Académie des sciences un tirage à part de cette publication (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 499—500).

qu'on peut apprécier la valeur d'un grand nombre de raisonnements qu'il emploie et qui sont applicables *ad litteram* à ces transformations. Ajoutons que la méthode de génération des courbes gauches ntilisée par lui peut se généraliser pour des transformations CREMONA quelconques; toutefois on ne peut nier que son importance ne pourra être établie au juste qu'après avoir résolu la question suivante: « quelles sont les courbes gauches algébriques qu'on peut engendrer de cette manière? »

DE JONQUIÈRES fit plus tard une application de sa transformation en cherchant[1]) combien de courbes d'un « réseau DE JONQUIÈRES » de l'ordre n sont tangentes à deux courbes données, ou sont bitangentes ou osculatrices à une courbe donnée; il est évident que ces nombres sont égaux à ceux qui expriment combien de droites sont tangentes en même temps à deux courbes données, ou combien de tangentes doubles ou d'inflexion possède une courbe algébrique déterminée. Dans le cas $n = 2$, on obtient comme cas particuliers les nombres de coniqnes passant par trois points et tangentes à deux courbes données, ou bitangentes ou osculatrices à une; DE JONQUIÈRES énonce, sans démonstration, les nombres analogues de coniques qui passent par $k\ (= 2, 1, 0)$ points et sont $(4-k)$-tangentes à une courbe donnée; mais ces nombres, que CAYLEY avait cru un moment exacts[2]), furent bientôt reconnus pour faux[3]), à l'aide des résultats auxquels était arrivé M. ZEUTHEN.

21. DE JONQUIÈRES, dans la dernière période de sa vie, lorsque le marin eut cédé définitivement la place au géomètre, s'occnpa aussi de transformations birationnelles en général.

Avant tout il en signala une classe remarquable correspondant à l'hypothèse que l'ordre n soit un nombre composé kl[4]); si α_r est le nombre des points fondamentaux r-tiples du premier plan et α_r' le nombre analogue pour le second plan, il a trouvé qu'on peut prendre:

$$\alpha_1 = 2(l-1),\quad \alpha_{l-1} = 1,\quad \alpha_l = 2(k-1),\quad \alpha_{(k-1)} = 1$$
$$\alpha_1' = 2(k-1),\quad \alpha_{k-1}' = 1,\quad \alpha_k' = 2(l-1),\quad \alpha_{k(l-1)}' = 1.$$

Ensuite il remarqua que la théorie dont il s'agit a un côté arithmétique, qui consiste dans la résolution, en nombres entiers non négatifs,

---

1) *Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque* (Nouv. ann. de mathém. 3_2, 1864, p. 218—222).

2) *Mathem. papers* T. VII, p. 550.

3) Id. p. 553.

4) *Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n* (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 720—724); comp. GUCCIA, *Sur les transformations géométriques planes birationnelles* (id. ib. p. 808—809).



des deux équations

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} i\alpha_i = 3(n-1), \qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} i^2\alpha_i = n^2 - 1;$$

et il signala une méthode pour déduire, des solutions de l'ordre $n+1$[1]), ou, plus généralement, de l'ordre $n+k$[2]) des solutions relatives à l'ordre n. Les règles qu'il a imaginées sont certainement ingénieuses et pratiques; mais comme elles mènent, dans le même temps à des solutions *géométriques* (c'est-à-dire à de vrais réseaux omaloïdiques) et à des solutions purement arithmétiques, leur valeur a été généralement jugée comme assez bornée. D'ailleurs, pour être juste, il faut remarquer que la possibilité de lier la théorie des transformations CREMONA à la théorie des nombres, avait été remarquée bien avant par M. F. P. RUFFINI[3]), sans toutefois arriver à des conclusions dont l'importance fût capable de prouver qu'on avait trouvé la vraie voie pour approfondir ultérieurement le sujet.

22. DE JONQUIÈRES s'est encore occupé dans sa vieillesse d'une autre théorie géométrique, d'une théorie qui n'a aucun point de contact avec celles que nous avons rencontrées jusqu'ici; mais il l'a traitée plutôt comme historien que comme mathématicien: je veux parler de la théorie des polyèdres.

Nous ignorons par quel chemin il a été amené à examiner, au point de vue historique et critique, la célèbre relation d'EULER $F+S=A+2$, entre les nombres des faces, des sommets et des arrêtes d'un polyèdre: nous ne pouvons que citer les plus anciens travaux sur ce sujet; dans l'un d'eux[4]) il passe en revue les démonstrations que donnèrent de cette relation LEGENDRE, CAUCHY et POINSOT, dans l'autre[5]) il fait un examen critique des considérations sur sa validité dues à LHUILIER et GERGONNE. Mais, en poursuivant ses recherches sur la même formule, il remarqua qu'elle se trouve aussi dans un mémoire posthume de DESCAR-

---

1) *Solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations* CREMONA (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 857—861).

2) *Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations* CREMONA (id. ib. p. 921—922). Voir aussi l'*Étude sur une question d'analyse indéterminée* (Giorn. di matem. **24**, 1886, p. 1—11).

3) *Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane* (Mem. dell' acc. di Bologna 8_3, 1877); *Di un problema di analisi indeterminata che s' incontra nella teoria geometrica delle trasformazioni delle figure piane* (id. 9_3, 1878); *Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche* (id. 1_4, 1880).

4) *Sur un point fondamental de la théorie des polyèdres* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 110—115).

5) *Note sur le théorème d'*EULER *dans la théorie des polyèdres* (id. ib. p. 169—173).

TES, que M. FOUCHER DE CAREIL découvrit parmi les papiers de LEIBNIZ et qu'il publia en 1860; se proposant de prouver la priorité, de *fait* sinon de *droit*, de DESCARTES, il écrivit deux notes remarquables[1]), en plusieurs passages desquelles l'historien cède la place au géomètre, et où le mathématicien perce sous le manteau de l'érudit. La thèse historique avancée et démontrée par DE JONQUIÈRES, avait été proposée longtemps avant par R. BALTZER[2]); c'est ce que je me permis de faire remarquer au savant amiral (qu'on me pardonne ce souvenir personnel relatif à une circonstance qui fut le point de départ de mes rapports cordiaux avec l'illustre défunt!) et que DE JONQUIÈRES s'empressa de reconnaitre.[3]) — Non encore satisfait de cette revendication en faveur de son compatriote, il crut bon de consacrer un travail *ad hoc* à rééditer, corriger, traduire et commenter le texte de DESCARTES, qui n'existait plus que dans un volume qui était désormais une vraie rareté bibliographique; de ce travail que l'Institut de France a accueilli parmi ses publications[4]), un résumé a été publié dans l'organe officiel de l'histoire des mathématiques[5]); de telle sorte qu'il n'y ait plus aucun danger que ce nouveau laurier de DESCARTES soit à l'avenir oublié.

VII.

Algèbre et théorie des nombres.

23. Ces efforts de DE JONQUIÈRES pour attirer l'attention des mathématiciens sur une découverte, dont on avait méconnu le plus ancien auteur, nous font souvenir de ceux qu'il avait faits six ans plus tôt[6])

---

1) *Note sur un mémoire de* DESCARTES *longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 261—266); *Écrit posthume de* DESCARTES *sur les polyèdres* (id. ib. p. 315—317).

2) Monatsberichte der Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1861, p. 1043—1046.

3) Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 687 note; voir aussi la note à la p. 36 du mémoire cité dans la note qui suit.

4) *Écrit posthume de* DESCARTES. *De solidorum elementis, texte latin (original et revu) suivi d'une traduction française avec notes.* Mém. Paris **45**, 1899, p. 325—379; les tirages à part portent sur le feuillet de titre l'année d'impression 1890. — Comparez *Note sur un mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de* DESCARTES: *De solidorum elementis, la traduction et le commentaire de cet ouvrage* (Comptes rendus Paris **110**, 1890, p. 677—680).

5) *Écrit posthume de* DESCARTES *intitulé « de solidorum elementis ». Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives* (Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, p. 43—55).

6) *Sur la règle de* NEWTON *pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations algébriques numériques* (Comptes rendus Paris **99**, 1884, p. 62—67); *Sur deux théorèmes de M.* SYLVESTER *et sur la règle de* NEWTON (id. ib. p. 111—115).

pour faire admirer cette célèbre règle concernant les équations nnmériques que NEWTON avait énoncée dans son *Arithmétique universelle*[1]) et qui, après avoir opposé une résistance opiniâtre à de nombrenx efforts, avait fini (1865) par être solidement établie par SYLVESTER. Mais sur cette règle notre auteur fit encore des remarques qui ne sont pas indignes d'un homme de sa renommée[2]); en particulier il établit une comparaison entre les conclusions anxquelles elle mèue et les résultats qu'on obtient en appliquant la règle des signes de DESCARTES, il parvint de la sorte à prouver (ce que d'ailleurs il était facile de prévoir) que les indications données par celle-ci ne sont jamais supérieures en exactitude à celles fournies par le théorème newtonien.

Amené par ces recherches historiqnes et critiques à réfléchir sur la théorie des équations numériques, le géomètre dont nous nous occupons ne tarda pas à y recueillir une riche moisson de vérités nouvelles[3]), qui suivant notre sentiment, n'attirèrent encore pas assez l'attention des mathématiciens, quoique elles soient capables de donner une confirmation éclatante de l'utilité d'introdnire méthodiquement dans cette théorie des considérations géométriques.

Il débuta par la remarque que NEWTON, dans le VIIe § de son *Enumeratio linearum tertii ordinis,* fit connaître un procédé pour résoudre une équation algébrique

$$x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0$$

à l'aide de deux courbes de degré $< m$; or on peut évidemment atteindre le même but en cherchant les intersections de la droite $y + A_0 = 0$ avec la courbe

$$y = x^m + A_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + A_1 x.$$

C'est an fond une remarque que G. CRAMER avait fait presque un siècle et demi plus tôt.[4]) Mais tandis que le géomètre genévois l'appliqua

1) « D'après SAMUEL HORSLEY (dit M. MARIE, T. V, 1884, p. 199, de son *Histoire des sciences mathématiques et physiques*), l'éditeur des œnvres de NEWTON, cette règle serait du très-illustre CAMPBELL, qni l'anrait présentée à la Société Royale de Londre »; cette opinion provient probablement d'une malentendue; aucun historien ne l'a adoptée.

2) *Règle de NEWTON-SYLVESTER. Suite à deux précédentes communications* (Comptes rendus Paris 99, 1884, p. 165—170). *Examen de deux points de doctrine relatifs à la Règle de NEWTON. Conclusions* (id. ib. p. 269—272).

3) Voir la trilogie *Sur les équations algébriques.* I. *Considérations générales. Equations binômes. Equations trinômes.* II. *Equations polynômes.* III. *Des équations irrationnelles* (id. ib. p. 345—351, 469—473, 483—488).

4) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750), p. 93 et suiv.

à la résolution effective de l'équation donnée, DE JONQUIÈRES s'en servit pour arriver à une vue d'ensemble sur ses propriétés générales et sur les affections auxquelles elle est sujette; et, en effet, par une discussion de la courbe représentée par l'équation $y = x^m + A_r x^r$ il arriva à ce beau théorème: « Une équation trinôme $x^m + A_r x^r + A_0 = 0$, quels que soient les degrés m et r des deux termes en x, a, au plus, quatre racines réelles si m est pair, et trois si m est impair; elle peut d'ailleurs avoir toutes ses racines imaginaires (ou toutes moins deux) dans le premier cas, et toutes moins une dans le second cas. »[1])

Pour généraliser cette proposition, le même auteur donna la définition suivante: « des équations algébriques, complètes ou incomplètes, ordonnées suivant les puissances entières de la variable, appartiennent à la même espèce lorsque 1° elles ont le même nombre de termes, 2° les exposants des termes occupant respectivement le même rang sont de même parité, 3° les coefficients qui ont les mêmes rangs respectifs y sont affectés des mêmes signes. » Cela posé, « le nombre maximum de racines réelles que comporte une équation algébrique donnée d'espèce, est invariable »; théorème d'autant plus remarquable qu'il ne cesse de subsister si on supprime l'hypothèse que les exposants de la variable soient tous entiers. L'élégance et la généralité de cette proposition, conjointement à la simplicité des raisonnements qu'on peut employer pour l'établir, en conseillent l'introduction dans tout traité élémentaire d'algèbre supérieure.

La considération de l'*espèce* d'une équation a amené notre géomètre à un autre théorème sur les polynômes algébriques complets, qu'il a énoncé[2]) et démontré[3]) et d'où il sut faire découler une conséquence assez importante. C'est que, pour quelque espèce d'équation que ce soit, pourvu qu'elle soit complète, on peut toujours déterminer une infinité de systèmes de valeurs numériques des coefficients, tels que, pour chacun de ces systèmes, l'*équation possède* effectivement et précisément autant de racines réelles positives que de variations et *autant* de racines réelles négatives que de permanences. C'est un complément utile à la règle des signes de DESCARTES.

---

1) Une autre démonstration géométrique de la même proposition a été donnée par M. LALANNE dans sa note *Sur les équations algébriques* (Comptes rendus Paris 99, 1884, p. 463—469).

2) *Théorèmes concernant les polynomes algébriques complets; application à la règle des signes de* DESCARTES (id. ib. p. 1143—1144).

3) *Étude sur les équations algébriques numériques dans leurs relations avec la règle des signes de* DESCARTES (Atti dell' accademia pontificia dei Nuovi Lincei 38, 1886, p. 55—74; ce mémoire qui porte la date Paris, 7 avril 1885, a été présenté à l'Académie pontificale dans sa séance du 18 janvier de la même année!).

24. Tandis que la théorie des équations n'occupa qu'une courte période de la vie de DE JONQUIÈRES, l'arithmétique supérieure fut un sujet d'études auquel il se consacra pendant presque un quart de siècle, le dernier de sa noble vie; des occupations de telle nature ne doivent pas surprendre dans un mathématicien qui, dans les questions géométriques, considéra toujours de préférence le côté numérique. C'est de l'année 1878 que datent ses premières publications sur la théorie des nombres.

Deux d'entre elles[1]) servent à établir que les équations indéterminées

$$x^3 \pm a = y^2,$$

ne peuvent être résolues en nombres entiers lorsque a est un nombre de l'une des formes suivantes

$$(8b+1)^2-4, \quad (8b+5)^2-4, \quad (4b+2)^2-1;$$

si au contraire la constante $\pm a$ a la valeur b^2, l'équation citée peut se résoudre par une méthode que notre auteur fit connaître dans un de ses derniers travaux[2]), en en faisant application au cas $a = 3$, sur lequel son attention avait été fixée par une question proposée dans L'intermédiaire des mathématiciens.

Il est bon de citer ici en passant deux autres travaux[3]) de DE JONQUIÈRES qui appartiennent à l'analyse indéterminée quadrato-cubique; ils ont pour but la détermination des cas de résolubilité en nombres entiers non négatifs de l'équation

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$$

de laquelle dépend[4]) la détermination des surfaces osculatrices à une surface algébrique donnée.

Dans le cours de la même année 1878 notre mathématicien fit paraître trois autres mémoires sur la représentation d'un nombre par une forme quadratique[5]); mais les applications qu'il en fit sont entachées d'une erreur

1) *Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solution en nombres entiers* (Nouv. ann. de mathém. 17_2, 1878, p. 374—381); *Au sujet des cas d'impossibilité d'une solution en nombres entiers de l'équation $x^3 \pm a = y^2$* (id. ib. p. 514—516).

2) *Question 1371* (L'interméd. des mathém. 6, 1899, p. 91—95).

3) *Note sur le degré des surfaces osculatrices* (Comptes rendus Paris 98, 1883, p. 1025—1026); *Etude arithmétique d'une équation indéterminée du troisième degré* (Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei 37, 1886, p. 183—188).

4) HERMITE, *Cours d'analyse* T. I (Paris 1873), p. 149.

5) *Études sur les décompositions en somme de deux carrés, du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme $4n+1$, et de ce nombre lui-même. Formules et applications à la résolution complète, en nombres entiers, des équations $y = x^2 + (x-1)^2$ et $y^2 = z^2 + (z-1)^2$.* (Nouv. ann. de mathém. 17_2, 1878,

que M. Netto a remarquée[1]) et dont la gravité ne saurait être niée. Il a été un peu plus heureux en découvrant une formule pour exprimer le nombre des nombres premiers n'excédant pas une limite assignée[2]); je dis *un peu* seulement, car cette formule n'était pas nouvelle, Legendre l'ayant découverte au commencement du XIXe siècle.[3]) C'est ce que de Jonquières s'empressa de déclarer lui-même.[4]) Mais ce rappel à l'activité de service d'un ancien résultat n'a pas été stérile pour la science, car il provoqua de savants développements de la part de M. Lipschitz[5]); et ceux-ci poussèrent notre géomètre à publier[6]) un raisonnement pour démontrer la formule en question, qui est remarquable, pour son caractère tout à fait élémentaire, parce qu'il se fonde exclusivement sur la règle dite crible d'Eratosthène et sur une propriété, que tout le monde connaît, des coefficients binomiaux.

25. Cette circonstance n'a pas été la seule dans laquelle l'auteur des *Mélanges* dut reconnaître d'avoir été prévenu; en effet dans son plus ancien essai[7]) pour démontrer l'impossibilité en nombres entiers, affirmée par Fermat, de l'équation $a^n + b^n = c^n$, il choisit la même voie qu'Abel avait tracée dans une lettre adressée à Holmboe le 4 août 1823.[8])

Au dernier théorème de Fermat se rattache aussi le problème[9]) s'il est possible, dans la formule $p^n q^n = c^n - b^n$, d'exprimer c et b par des fonctions algébriques de p et q telles que l'identité littérale s'établisse finalement entre les deux membres; de Jonquières arriva à la conclusion

p. 241—247, 289—310); *Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme $x^2 + ty^2$, t étant un nombre rationnel positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équation déterminées $y^2 = x^2 + t(x+\alpha)^2$, $y^2 = z^2 + t(z+\beta)^2$* (id. ib. p. 419—425, 433—446); *Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en sommes quadratiques binaires* (Comptes rendus Paris **87**, 1878, p. 399—402).

1) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **10** (1878), p. 137—138.

2) *Formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné* (id. **95**, 1882, p. 1144—1146).

3) *Théorie des nombres*, IVe Partie (2e éd. 1808), p. 414.

4) *Sur la formule récemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. Lettre à M. Bertrand* (Comptes rendus Paris **95**, 1882, p. 1343—1344).

5) *Sur une communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers* (id. **95**, 1882, p. 1344—1346 et **96**, 1882, p. 58—61).

6) *Addition à une note sur les nombres premiers* (id. ib. p. 231—232).

7) Comptes rendus Paris **98**, 1884, p. 863—864; cette note contient l'analyse d'un mémoire présenté à l'académie pontificale des Nouveaux Lyncées le 11 août 1884.

8) Abel, *Oeuvres complètes*, éd. Sylow et Lie, t. II, p. 254.

9) *Sur une question d'algèbre qui a des liens avec le dernier théorème de Fermat* (Comptes rendus Paris **120**, 1895, p. 1139—1143, 1236).

que, si $n > 2$, en dehors des solutions triviales, il n'en existe pas d'autres, sans toutefois déterminer en quoi le déchiffrement de la célèbre énigme était avancé.

Ce travail, dans lequel DE JONQUIÈRES introduisit des considérations algébriques dans une question d'arithmétique pure, fait pendant à un couple de travaux où il considéra du point de vue arithmétique la théorie des fonctions elliptiques[1]) et celle des déterminants.[2]) L'espace nous fait défaut pour les analyser; nous voulons seulement extraire du second cette élégante proposition: «le produit de n nombres entiers différents, multiplié par le produit de leurs différences deux à deux, a pour valeur un multiple de $1!\,2!\cdots n!$»; c'est une belle généralisation de la propriété qu'a le produit de n nombres consécutifs quelconque d'être divisible par $n!$ DE JONQUIÈRES se borna à en donner l'énoncé; mais un de ses collègue de la marine — M. EMILE GUYOU — l'établit par un raisonnement simple et élémentaire que notre géomètre présenta à l'Académie des sciences.[3])

26. Nous abordons maintenant un sujet de recherches numériques plein d'intérêt, auquel le savant dont nous nous occupons a consacré un groupe de travaux[4]) nombreux et brillants, qui lui ont valu la gloire d'avoir perfectionné en un point important une théorie qui, depuis LAGRANGE, était demeurée stationnaire; je veux parler des fractions continues périodiques. Comme on sait, l'illustre mathématicien italien en fit application au développement de la racine carrée $(\sqrt{E})$ d'un nombre entier, sans toutefois approfondir la liaison existant entre la période du

1) *Sur une relation de recurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques* (Comptes rendus Paris **101**, 1885, p. 415—417).

2) *Sur les dépendances mutuelles des déterminants potentiels* (id. **126**, 1895, p. 408—410, 580). L'auteur donne le nom de *potentiel* à un déterminant dont chaque ligne ne contient que des puissances entières de l'élément qui la caractérise et dont chaque colonne contient une même puissance des divers éléments.

3) Voir la note *Démonstration d'un théorème sur les nombres premiers* (id. ib. p. 534—537).

4) *Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques* (id. **96**, 1883, p. 568—571); *Sur la composition des périodes* (id. ib. p. 694—696); *Additions aux communications précédentes sur les fractions continues périodiques* (id. ib. p. 832—833); *Loi des périodes* (id. ib. p. 1020—1023, 1129—1131, 1210—1213); *Sur les fractions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité* (id. ib. p. 1297—1300); *Études des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques* (id ib. p. 1351—1354); *Lois de coïncidences entre les réduites des fractions continues des deux modes* (id ib. p. 1420—1423); *Lois des identités entre les reduites des fractions périodiques des deux modes* (id. ib. p. 1490—1493); *Lois des identités entre les réduites des deux modes* (id. ib. p. 1571—1574); *Études sur les fractions continues périodiques* (id. ib. p. 1721—1724).

développement et la nature arithmétique du nombre E. Or notre auteur découvrit que, en considérant la multitude des nombres entiers, il y a une infinité, et même une infinité de groupes, où les périodes sont soumises à des lois absolues. Quant aux autres, si leurs périodes sont moins disciplinées, l'indépendance individuelle est néanmoins loin d'y être complète; car on retrouve encore des éléments plus ou moins nombreux de subordination parmi les périodes de ces nombres, classés par groupes. De Jonquières parvint à ces conclusions en se servant tour à tour de fractions continues à numérateurs égaux à l'unité et de fractions à numérateurs quelconques. Cette application de fractions, dans lesquelles Lagrange ne voyait guère qu'un sujet de curiosité, le persuada des précieuses qualités qu'elles ont; dès lors il se fit l'apôtre de leur introduction méthodique dans l'arithmétique. Or cette introduction s'est accomplie bien avant la proposition de notre géomètre; cette proposition ne manquait donc pas d'opportunité, mais elle n'était pas nouvelle; toutefois il lui reste le mérite d'avoir su tirer des conclusions nouvelles, avec une facilité étonnante, de la comparaison des développements d'un même radical quadratique en fractions continues d'espèces différentes.

27. Tandis que, par ces beaux travaux, de Jonquières apparait en arithmétique comme un élève de l'école française, il y en a d'autres montrant que, non seulement il était un admirateur sincère du génie de Gauss[1]), mais qu'il s'était rendu maître des concepts des méthodes par lesquels ce grand mathématicien a donné un essor magnifique et une physionomie nouvelle à la chimie des nombres.[2]) Les travaux auxquels je fais allusion se rapportent aux racines primitives des nombres premiers[3]) et à celles que notre géomètre appellait « secondaires »[4]); ils ont pour but l'investigation des propriétés dont sont doués les produits de ces racines. Aux théorèmes, simples mais non sans élégance, exprimant ces propriétés,

---

1) Cette admiration est visible dans deux courtes notes (*Sur une lettre de Gauss, du mois de juin 1805*, Comptes rendus Paris **122**, 1896, p. 829—830; *Au sujet d'une lettre inédite de Gauss*, id. ib. 857—859), dont la première contient une lettre adressée par le grand mathématicien au traducteur des *Disquisitiones arithmeticae* (Delisle), tandis que l'autre donne des extraits de l'article que, sur la traduction française de cet ouvrage, écrivit Poinsot dans le Moniteur universel du 21 mars 1807.

2) Un témoignage plus modeste de ses études sur Gauss est donné par sa *Berichtigung von zwei Druckfehlern im Band II von Gauss Werken* (Göttinger Nachrichten 1896, p. 365).

3) *Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers* (Comptes rendus Paris **122**, 1896, p. 1451—1455).

4) *Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers* (ib. id. p. 1513—1517).

notre auteur ajouta l'énoncé de plusieurs propositions empiriques, dont la vérité ne tarda pas à être établie par le P. PEPIN.[1])

Comme dérivations des idées de GAUSS il faut encore citer un remarquable complément que DE JONQUIÈRES donna à une proposition sur la fonction $\frac{x^p - y^p}{x - y}$ qu'on lit dans les *Disquisitiones arithmeticae*[2]), des remarques nouvelles sur les résidus de puissances[3]) et des contributions de détail[4]) à la difficile question « pour quelles valeurs de D est résoluble l'équation $t^2 - Du^2 = -1$? ».

Nous finirons en citant les applications de solutions algébriques que notre auteur fit à la résolution des équations indéterminées suivantes:

$$(a+1)\,x^2 - ay^2 = 1$$
$$(ma^2 \pm 1)\,x^2 - my^2 = \pm 1$$
$$(ma^2 \pm 4)\,x^2 - my^2 = \pm 1,$$

où a est un nombre entier, impair dans les deux dernières[5]); ce sont des questions d'analyse indéterminée du 2e degré, en traitant lesquelles DE JONQUIÈRES fut amené[6]) à faire une comparaison des méthodes qu'employèrent pour les résoudre les deux grands mathématiciens — LAGRANGE et GAUSS — qui furent ses maîtres en Arithmétique, comme CHASLES l'avait été en Géométrie.

---

1) *Au sujet d'une précédente communication, relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers* (Comptes rendus Paris **123**, 1896, p. 374); *Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine primitive* (ib. id. p. 405—406).

2) *Commentaire arithmétique sur une formule de* GAUSS (ib. **98**, 1884, p. 1358—1362, 1515).

3) *Sur certains points de la théorie des résidus des puissances. Caractères distinctifs des nombres, ou racines, d'où proviennent les résidus générateurs* (ib. **124**, 1897, p. 334—340, 428).

4) *Formules générales donnant des valeurs de D pour lesquelles l'équation $t^2 - Du^2 = -1$ est résoluble en nombres entiers* (ib. **126**, 1898, p. 1837—1843); *Extension du nº 162 des « Disquisitiones arithmeticae » de* GAUSS (ib. **127**, 1898, p. 596—601).

5) *Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes* (ib. **126**, 1898, p. 863—871, 990); *Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques* (ib. id. p. 991—997); *Addition à une précédente communication, concernant la théorie des formes quadratiques* (ib. id. p. 1077—1081, 1177); *Au sujet d'une précédente communication. Rectification d'une erreur dans la communication Comptes rendus T. CXXVI, p. 863* (ib. **132**, 1901, p. 750).

6) *Rapprochements entre les méthodes de* LAGRANGE *et de* GAUSS *pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré* (ib. **127**, 1898, p. 694—700)



Nous voici à la fin de notre revue de la production mathématique de DE JONQUIÈRES![1]) Si nous avions réussi à inspirer à nos lecteurs le plaisir que nous a procuré l'étude d'une collection si riche, si brillante, si variée, nous aurions atteint le but de chaque biographie, celui de faire admirer son protagoniste. Mais, même si nous n'y sommes pas arrivés, même si nous en sommes restés bien loin, on peut croire et espérer que ceux, qui ont eu la patience de nous suivre jusqu'ici, reconnaîtront que ce n'est pas une illusion de panégyriste qui nous fait mettre DE JONQUIÈRES en première ligne parmi les mathématiciens français du second ordre, vécus dans la seconde moitié du 19e siècle. S'il n'a pu obtenir une place encore plus élevée c'est que probablement ses devoirs de marin ne le lui ont pas permis; on peut le croire, car sa profession rejaillit d'une manière visible sur l'ensemble de ses travaux mathématiques. En effet, la discontinuité dans ses recherches de science pure et ses fréquents éloignements des centres scientifiques produisirent ces lacunes dans sa culture, cette insuffisante connaissance de la littérature, qui percent dans un grand nombre de ses travaux. Mais, d'autre part, la lutte quotidienne avec les vagues de l'océan, à laquelle il s'était habitué dès sa jeunesse, paraît lui avoir fait acquérir un courage indomptable et une initiative hors ligne, même dans les questions scientifiques; nous le voyons en conséquent aborder en souriant des questions capables d'effrayer un mathématicien consommé et employer paisiblement des méthodes dangereuses, dont la rigueur est encore aujourd'hui en discussion. On dirait que si comme soldat DE JONQUIÈRES appartint à l'armée régulière, comme géomètre il eut tous les caractères d'un volontaire, toujours jeune et enthousiaste, méprisant la routine surannée et courant à l'assaut avec des procédés inouïs.

Les géomètres craintifs, préférant les routes connues et sûres, feront un étalage des nombreuses blessures dont il fut atteint et que nous, historiens impartiaux, n'avons pas cachées; mais on peut leur répondre que ces blessures sont là pour atteindre tous les explorateurs de pays nouveaux et que d'ailleurs, il n'y a que les poltrons, qui n'ont jamais vu un champ de bataille, qui ne connaissent pas le chemin de l'hôpital.

On doit ajouter que cette attitude courageuse jusqu'à la témérité qu'eut DE JONQUIÈRES, correspond parfaitement au caractère d'une époque — celle de sa jeunesse — où la géométrie, réveillée après un long repos, se montrait impatiente de regagner le temps perdu, pour monter rapidement au même niveau que celui que l'analyse avait atteint.

1) « Virescit Vulnere Veritas » frontispice de la plus ancienne édition anglaise d'EUCLIDE!

Le domaine des mathématiques s'enrichit chaque jour d'une rapidité si vertiginieuse, l'aspect de notre science se transforme d'une manière si étonnante que je ne sais pas si dans les traités futurs d'algèbre supérieure et de haute arithmétique les propositions et les remarques de DE JONQUIÈRES, quelque importantes qu'elles soient, auront une place assurée. Je ne sais même pas si les méthodes hardies et fécondes, à l'aide desquelles il a déterminé tant de nombre relatifs à des courbes et à des surfaces, seront encore, comme elles sont aujourd'hui, considérées comme légitimes.[1]) Mais une chose est certaine: quel que soit le sort que l'avenir prépare à la géométrie énumérative, DE JONQUIÈRES sera toujours considéré comme un des fondateurs les plus admirables et un des précurseurs les plus courageux de cette importante discipline.

---

1) Je rappelle que la *détermination rigoureuse des nombres de la Géométrie énumérative* est, suivant M. HILBERT, un des problèmes futurs des mathématiques (voir Comptes rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens à Paris 1900 (1902), p. 95).

31 mai 1902.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265.

---

1 : 15. Der Ursprung der Orientierung der Wohnhäuser dürfte in praktischen Rücksichten auf Besonnung, Wind und Wetter zu suchen sein.

A. Sturm.

---

1 : 22, 29, 34, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103, 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135, 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190, 197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 395. Anm. 1 ist „kommentiert“ statt „übersetzt“ zu lesen. Bekanntlich war der griechische Text des „Analemma“ verloren gegangen, und Commandino hatte für seine Ausgabe vom Jahre 1562 zur Verfügung nur die von Wilhelm von Moerbek verfertigte lateinische Übersetzung (vgl. Heiberg, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1890, S. 4; **7**, 1895, S. 3—4). Erst vor einigen Jahren hat Heiberg Überreste des griechischen Originals entdeckt und herausgegeben (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **7**, 1895, S. 1—30).

Auch der griechische Text des „Planisphaeriums“ ist bekanntlich verloren, und nur eine aus dem Arabischen verfertigte lateinische Bearbeitung ist uns aufbewahrt worden. Der arabische Bearbeiter war Maslama al-Madjriti und als lateinischer Übersetzer wird gewöhnlich Rudolph von Brügge (1144) angegeben (vgl. z. B. Steinschneider, Biblioth. Mathem. 2_3, 1902, S. 76); nach Houzeau und Lancaster, *Bibliographie générale de l'astronomie*, I: 1 (Bruxelles 1887, S. 630) existiert handschriftlich eine dem Hermannus secundus (= Dalmata) zugeschriebene Übersetzung, und man hat auch behauptet (vgl. Steinschneider, Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, S. 382, 392), daſs in Wirklichkeit nur dieser aber nicht Rudolph von Brügge das „Planisphaerium“ übersetzt hat. Die erste lateinische Ausgabe (Chasles und andere geben bestimmt an, daſs sie die Übersetzung des Rudolph von Brügge enthält) rührt von Marco Beneventano her und erschien in Rom 1507 als Anhang der *Geographia* Ptolemaei. Eine neue Ausgabe besorgte J. Ziegler (Basel 1536), und 1558 gab Commandino einen verbesserten lateinischen Text mit Kommentar heraus. G. Eneström.

1:400, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

1: 429. M. Cantor distingue un Anatolius chrétien, évêque de Laodicea et un Anatolius païen, maître de Jamblichos, mais dès 1887, M. P. Tannery (*La géométrie grecque*, p. 42—43), a fait observer que rien n'empêche de regarder le premier comme ayant été le maître de Jamblichos, et à présent il est établi que cet Anatolius païen est un personnage inventé (voir P. Tannery, Annales internationales d'histoire; Congrès de Paris 1900, 5ᵉ section, p. 56).

1:432, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238.

1: 463. La remarque (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 139) que Suidas aurait appelé Diophantes, non Diophantos, l'auteur d'une table astronomique, est erronée, quoique d'accord avec le texte de la vulgate, que donne Cantor (p. 462, note 2). Car, d'une part, les meilleurs manuscrits donnent *Διόφαντον* (voir mon édition de Diophante II, 1895, 36, 24): de l'autre Diophantes n'est pas grec, comme le prouve la comparaison des mots de même finale (hiérophante, sycophante), où la terminaison *phantes* a un sens actif (celui qui montre). Cette remarque décisive de Bachet a été à tort contredite par Nesselmann (*Die Algebra der Griechen*, p. 246). P. Tannery.

1:463, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:671**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 449—500. — **1:749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

1: 854. Statt „Molsem", welche unrichtige Form wahrscheinlich auf einem Schreibfehler von Chasles beruht, lies „Maslem" (= Maslama al-Madjriti; vgl. z. B. Steinschneider, Biblioth. Mathem. 2_3, 1902, S. 76).

G. Eneström.

1:855, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:70**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2:98**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

---

2 : 101. Die Vermutung, es handle sich bei der Quadratur des Campanus um ein Zusammenbiegen der Kreisperipherie zu einem umfanggleichen Quadrate, entspricht der Wahrheit (vgl. Suter, Zeitschr. für Mathem. 29, 1884; Hist. Abt. S. 95). A. Sturm.

2 : 105, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 122, 128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 157, 158,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352 — **2 : 163, 166,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 210, 219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 229, 242, 243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505.

2 : 274. In der Seitenstettner Bibliothek ist eine Handschrift des 15. Jahrhunderts: Ioannis Regiomontani *Ludus Pannoniensis seu Tabulae directionum profectionumque cum sinuum Canone ad radium 60.000.* Das Werk ist dem Erzbischof Johannes von Gran gewidmet. A. Sturm.

2 : 282, 283, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353 - 354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 334, 353, 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81. — **2 : 386, 395, 401, 405, 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145.

2 : 442. Dem ausführlichen Berichte über den Inhalt der *Arithmetica integra* des Stifels könnte vielleicht hinzugefügt werden, dafs dort (fol. 306—307) der Satz

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

angegeben worden ist (vgl. E. Hoppe, Mittheilungen der mathem. Gesellsch. in Hamburg 3, 1900, S. 422). G. Eneström.

2 : 449, 474, 480, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481, 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490, 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554, 569, 572, 573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594, 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597, 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 614, 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 721, 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 742,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746, 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$,

1901, S. 148, 357—358. — **2 : 772, 775,** siehe BM 2_3, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148. — **2 : 783,** siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **2 : 784, 820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148—149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM 1_3, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM 1_3, 1900, S. 273. — **2 : 901,** siehe BM 1_3, 1900, S. 511. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM 3_3, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM 1_3, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM 1_3, 1900, S. 518. — **3 : 12, 17, 22,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512. — **3 : 26,** siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512—513. — **3 : 70,** siehe BM 2_3, 1901, S. 360. — **3 : 100,** siehe BM 2_3, 1901, S. 149. — **3 : 116,** siehe BM 1_3, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM 1_3, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM 1_3, 1900, S. 513.

---

3 : 151. Da Leibniz selbst die Z. 1—8 erwähnte Gleichung nicht unter der Form $y = \varphi(x)$, sondern unter der Form $\varphi(x, y) = 0$ angiebt, wäre es vielleicht angemessener die Leibnizsche Vorschrift in die Sprache der heutigen Mathematik auf folgende Weise zu kleiden: Wenn die Kurve $f(x, z) = 0$ zur Quadratur der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ füren soll, mufs man

$$y = \frac{z}{t} = \frac{dz}{dx}$$

setzen, weil alsdann

$$0 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} y$$

wird, und man aus der letzten Gleichung und der Gleichung $f(x, z) = 0$ durch Wegschaffen von z eine Gleichung in x und y erhält, deren Koefficienten mit denen der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ zu identifizieren sind. Die Bemerkung des Herrn Cantor, dafs die Leibnizsche Vorschrift im Jahre 1678 nicht so leicht zu verstehen war, wird dadurch noch mehr begründet. G. Eneström.

---

3 : 174, siehe BM 2_3, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM 1_3, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM 3_3, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM 1_3, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM 1_3, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM 2_3, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM 1_3, 1900, S. 513.

---

3 : 220. Material zur Ergänzung der Bemerkung: „Unter denen, welche die Kurve (d. h. die Kettenlinie) ermittelten, haben wir Huygens zu nennen gehabt, ein Beweis, dafs hier auch mit anderen Hilfsmitteln als denen der Differentialrechnung auszukommen ist“, giebt es nunmehr in dem Artikel des Herrn D. J. Korteweg: *La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette* (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 97—108).

---

3 : 224, siehe BM 1_3, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM 2_3, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM 1_3, 1900, S. 514. — **3 : 246,** siehe BM 1_3, 1900, S. 514; 2_3, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM 1_3, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM 2_3, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM 3_3, 1902, S. 241—242. — **3 : 447, 455,** siehe BM 2_3, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM 2_3, 1901, S. 154—155. — **3 : 477, 479,** siehe BM 2_3, 1901, S. 151—152. — **3 : 521,** siehe BM 2_3, 1901, S. 441.

3 : 565. Von der ersten Auflage (Paris 1708) der *Analyse démontrée* des Ch. Reyneau, die Herrn Cantor nicht zugänglich gewesen ist, besitze ich

selbst ein Exemplar. Die Arbeit besteht aus zwei Quartbänden von zusammen mehr als 900 Seiten und ist in acht Bücher eingeteilt. Die sieben ersten Bücher behandeln die Algebra, das achte Buch (das allein den zweiten Band bildet) dagegen die analytische Geometrie und die Infinitesimalrechnung mit deren Anwendungen. In der eigentlichen Algebra stützt sich Reyneau vorzugsweise auf die Arbeiten von Descartes, Hudde, Prestet und Rolle.

Herr Cantor macht darauf aufmerksam, dafs die *Arithmetica universalis* von 1707 der *Analyse démontrée* von 1708 vorausging, aber aus dieser Thatsache darf man nicht unmittelbar schliefsen, dafs Reyneau die erste Schrift benutzen konnte, denn nach der „Approbation" am Ende des zweiten Bandes war die ganze Arbeit schon Oktober 1704 fertig. In der That erwähnt Reyneau zwar Newtons Arbeiten über Infinitesimalrechnung und unendliche Reihen, aber nie die *Arithmetica infinitorum*, und ich habe bei Reyneau keine Stelle entdecken können, die offenbar aus dieser Quelle geschöpft ist.

G. Eneström.

3: 571. Herr Cantor stellt als möglich hin, dafs in der ihm nicht zugänglichen *Analyse démontrée* (1708) des Reyneau ein Beispiel eines Maximum oder eines Minimum einer Funktion von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen sich finden kann, aber eine von mir angestellte Nachsuchung hat ein negatives Ergebnis gehabt.

G. Eneström.

3: 578. Der Satz: „Sind F, G, H die Coeffizienten lückenlos aufeinanderfolgender Glieder eines Gleichungspolynoms, so ist immer $G^2 > FH^2$", den Herr Cantor als von de Gua ausgesprochen erwähnt, setzt natürlich voraus, dafs die Gleichung $\Phi(x) = 0$ nur reelle Wurzeln hat, und aus dem Anfange der Seite 578 könnte man wohl folgern, dafs de Gua sich nur mit diesem Fall beschäftigt hat; indessen wäre es vielleicht der Deutlichkeit halber angebracht hinzuzufügen, dafs de Gua an der von Herrn Cantor zitierten Stelle ausdrücklich von einer „équation quelconque n'ayant que des racines réelles" gesprochen hat.

G. Eneström.

3: 636—637, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3: 652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3: 660, 667, 689, 695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3: 750, 758, 760, 766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3: 774, 798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3: 845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 447.

3: 845. Wie Herr Cantor richtig bemerkt, schreibt Euler ohne weitere Begründung $b = x - dx + d^2x$, $c = y - dy + d^2y$ hin. Da den meisten Lesern die Richtigkeit dieser Gleichungen gewifs nicht unmittelbar einleuchtend ist — ein Problemlöser unserer Zeit würde wohl zuerst daran denken $b = x - dx + \frac{1}{2}d^2x$ zu setzen, was freilich $f = x + dx + \frac{1}{2}d^2x$ statt $x + dx$ mit sich führt — und da die ganze Eulersche Herleitung der geodätischen Linie auf diesen Gleichungen beruht, könnte es angebracht sein anzugeben, wie Euler wahrscheinlich auf dieselben geführt worden ist. Bekanntlich war es den Mathematikern der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts geläufig, dafs wenn b, x, f drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder einer Reihe sind, so ist die zweite Differenz von b gleich $b - 2x + f$, oder in moderner Bezeichnung

$$\Delta^2 b = b - 2x + f.$$

Nun hat Euler schon $f = x + dx$ gesetzt, also ist

$$\Delta^2 b = b - x + dx \quad \text{oder} \quad b = x - dx + \Delta^2 b.$$

Aber b ist der Wert, den x annimmt, wenn man $t - dt$ statt t setzt, und da in den folgenden Rechnungen unendlich kleine Gröfsen dritter und höherer Ordnung vernachlässigt werden können, so ist

$$\Delta^2 b = \Delta^2 x = d^2 x.$$

Auf ganz dieselbe Weise findet man natürlich, dafs $c = y - dy + d^2 y$.

G. Eneström.

---

3 : 848, 881, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 892,** siehe BM $\mathfrak{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 443

Anfragen.

100. Über eine astronomische Schrift des A. Ricius. Am Anfange des 16. Jahrhunderts veröffentlichte Augustinus Ricius (Ritius) eine Schrift mit dem Titel: *De motu octavae sphaerae, opus mathematica atque philosophia plenum ... Ejusdem de astronomiae autoribus epistola*, die nach Riccardi (*Biblioteca matematica italiana* I, 369) „in oppido Tridini, in aedibus Ioannis de Ferraris alias de Jolitis, 1513" gedruckt wurde; auf der anderen Seite haben zwei Exemplare, von denen das eine der Staatsbibliothek in München angehört, und das andere im Besitz des Fürsten Boncompagni gewesen ist, auf dem Titelblatt die Worte: „Nuper in ciuitate Casalis sancti Euasij ... editum" aber keine Jahreszahl, und ein drittes Exemplar, das vor einigen Jahren in einem antiquarischen Bücherkataloge ausgeboten wurde, ist nach dem Titelblatte gedruckt in Paris (Lutetia) 1521 bei Simon Colinaeus. Giebt es wirklich drei verschiedene Auflagen oder wenigstens drei Titelausgaben der Schrift des Ricius?

G. Eneström.

---

101. Giannantonio Rocca (1607—1656). In der fünften Abhandlung seiner *Exercitationes geometricae sex* (Bologna 1647) erwähnt Cavalieri (S. 230) ein dem Guldinschen Satze ähnliches Theorem, das sein Schüler Giannantonio Rocca ihm mitgeteilt hatte. Dieser Umstand wird auch von Montucla (*Histoire des mathématiques* II, Paris 1758, S. 22—23) und Cantor (*Vorles. über Gesch. der Mathematik* II², S. 843) bemerkt, aber keiner von diesen Verfassern giebt weitere Auskunft über Rocca. Nach Riccardi (*Biblioteca matematica italiana* I, Sp. 384) war Rocca 1607 in Reggio (in Emilien) geboren und starb 1656; Riccardi nennt keine von ihm verfafste mathematische Schrift, sondern nur einen lange Zeit nach seinem Tode herausgegebenen Briefwechsel (*Lettere d' uomini illustri del secolo XVII a Giannantonio Rocca ... con alcune del Rocca a' medesimi*, Modena 1785) zwischen ihm und anderen Gelehrten (u. a. Cavalieri und Torricelli).

Giebt es in dem zitierten Briefwechsel wertvolle Beiträge zur Geschichte der Mathematik des 17. Jahrhunderts, und verdient Rocca einer ausführlicheren Erwähnung, als es in den Cantorschen *Vorlesungen* der Fall ist?

G. Eneström.

Recensionen.

F. Amodeo. Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. (Atti dell' accademia Pontaniana **31.**) Napoli 1902. 60 S. 8°.

Seit dem Anfange des 16. und bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts gab es in Neapel keine mathematische Professur; erst 1650 wurde eine solche neu errichtet, und der erste Inhaber derselben war Tommaso Cornelio (1612?—1684), der das Studium der Descartesschen Geometrie in Neapel einführte. Unter den folgenden Professoren der Mathematik bis zum Jahre 1732 hebt Herr Amodeo besonders Agostino Ariani (1672—1748) hervor, von dem u. a. eine bisher fast unbekannte lateinische Euklides-Ausgabe (Neapel 1718) herrührt. Aufser der Universität gab es seit dem Ende des 17. Jahrhunderts in Neapel eine andere Institution zur Beförderung wissenschaftlicher Forschung, nämlich die 1698 gestiftete „Accademia reale", und auch über mathematische Gegenstände wurden darin Vorträge gehalten, deren Inhalt dennoch ziemlich elementar war. Auf der anderen Seite gab es in der letzten Hälfte des 16. und am Anfange des 17. Jahrhunderts in Neapel einige Männer, die sich *privatim* mit der Mathematik beschäftigten. Unter diesen nennt Herr Amodeo zuerst den bekannten Neapolitaner Giovanni Alfonso Borelli (1608—1679), der sich freilich nicht in Neapel aufhielt, ferner Antonio de Monforte (1644—1717) und Giacinto de Cristofaro (1650—?; Riccardi nennt ihn Christoforo), die beide über die Auflösung von Gleichungen schrieben, sowie einige andere. Monforte erwarb sich einen gewissen Ruf als Verteidiger einer angeblich neuen geometrischen Methode, die der Genueser Paolo Mattia Doria (c. 1661—1746) entdeckt zu haben glaubte, und wodurch das delische Problem elementar gelöst werden könnte. Natürlich stellte es sich zuletzt heraus, dafs die Methode fehlerhaft war, aber bevor diese Thatsache konstatiert wurde, hatte man für nützlich erachtet, sogar ein Gutachten von Leibniz zu erbitten, und ein solches wirklich hekommen.

Obgleich die Abhandlung des Herrn Amodeo kaum irgend einen Beitrag zur Geschichte der Mathematik im engeren Sinne liefert, kann sie als eine dankenswerte Arbeit bezeichnet werden, da sie über sonst wenig bekannte Mathematiker und ihre Schriften viele Aufschlüsse giebt.

S. 4 nennt Herr Amodeo unter den früheren Professoren der Mathematik in Neapel einen gewissen Beneventano, der 1512—1513 an der Universität vorgelesen haben soll. Über diesen Beneventano hat Herr L. Birkenmajer kürzlich eine ausführliche Monographie veröffentlicht (siehe Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 154), woraus u. a. hervorgeht, dafs derselbe wirklich, wie Herr Amodeo vermutet, Marco und nicht Mario hiefs. — S. 42 wird als Druckjahr der *Algebra* des Bombelli 1579 angegeben; richtiger wäre es vielleicht

1572 statt 1579 zu setzen, da bekanntlich 1579 nur das Titelblatt neu gedruckt wurde. — S. 60 wird unter den Professoren in Neapel ein spanischer Mathematiker DIEGO PEREZ DE MEZA (oder Meta) erwähnt; die Form MEZA ist hier ohne Zweifel die richtige, da A. F. VALLÍN in seiner Arbeit *Cultura cientifica de España en el siglo XVI.* (Madrid 1893, S. 207) eben einen Mathematiker DIEGO PÉREZ DE MEZA aufnimmt. Freilich scheint es etwas zweifelhaft, ob dieser mit dem von Herrn AMODEO erwähnten identisch sein kann, da VALLÍN eigentlich nur mit den Mathematikern des 16. Jahrhunderts zu thun hat, und es aus dem von Herrn AMODEO citierten Aktenstück hervorzugehen scheint, dafs der betreffende DIEGO PEREZ DE MEZA 1630—1653 Professor der Mathematik in Neapel war.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
3_3 (1902) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1902 : 2.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8°. [3
1_2 : 9. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [4
31 (1900) : 1. — Die Seiten 1—63 enthalten Referate der im Jahre 1900 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sons les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [5
10 : 2 (octobre 1901 — avril 1902).

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sons la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Recension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 54—56 (G. L.) [6

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq. Paris, Gauthier-Villars 1902 [7
8°, (3) + 455 S. — [16 fr.]

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 238—239. (G. Eneström, P. Tannery.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 239—240. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Recension oder kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 241—242 (G. Eneström.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 226—227. (J. Boyer.) [8

Ball, W. W. R., A short account of the history of mathematics. Third edition (1901). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 244—248. (G. Eneström.) — Liter. Centralbl. 1902, 194—195. (E—L.) [9

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, traduite par J. Mascart (1902). [Recension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_3, 1902, 265—275. (H. Bosmans) — Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1465. — Mathesis 2_3, 1902, 140—141. (P. M.) — Nature 66, 1902, 199. (M.) [10

Gambioli, D., Breve sommario della storia delle matematiche colle due appendici sui matematici italiani e sui tre celebri problemi geometrici dell' antichità. Ad uso delle scuole secondarie compilato. Bologna, Zanichelli 1902. [11
8°, (2) + 239 + (1) S. — [3 lire]

***Dannemann, F.,** Grundrifs einer Geschichte der Naturwissenschaften, zugleich eine Einführung in das Studium der grundlegenden naturwissenschaftlichen Litteratur. Erster Band. Erläuterte Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Völker und Zeiten. Zweite Auflage. Leipzig, Engelmann 1902. [12
8°, XIV + 422 S. — [8 M.] — [Recension:] Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 322. (P. R.)

Fujisawa, R., Note on the mathematics of the old Japanese school. [13
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 379—393.

***Isely, L.,** Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse française. Neuchatel 1901. [14
8°, 215 S. — [3 fr.]

Konen, H., Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ (1901) [Recension:] Bibl. Mathem. 3_3, 1902, 248—251. (G. Wertheim.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem 5, 1902, 47—48. (G. L.) — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit.-Ber. 32—33 — Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 280—281. (E. Lampe.) [15

Reye, Th., Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Rede gehalten am 1. Mai 1886 beim Antritt des Rektorats der Universität Strafsburg. [Zweite Auflage.] [16
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 11, 1902, 343—353. — Die erste Auflage der Rede erschien 1886 als besondere Schrift

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. Leipzig, Teubner 1902. [17
8°, XXI + 774 S. + 17 Taf. — [26 M.] — Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 369—370.

***Urbański, W.,** O postępach w astronomii i fizyce od najdawniejszych czasów aż do końca XIX stulecia. Szkic historyczno-naukowy. Lwow 1901. [18
8°, 58 S. — Über die Fortschritte der Astronomie und Physik von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. — [Recension:] Wiadomości matem. 6, 1902, 119—120. (S. D.)

b) **Geschichte des Altertums.**

Bürk, A., Das Apastamba-Śulba-Sūtra, herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen. II. Übersetzung. [19
Leipzig, Deutsche morgenl. Gesellsch., Zeitschr. 56, 1902, 327—391.

Löschhorn, K., Über das Alter des Pythagoräischen Lehrsatzes. [20
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 183 — Verweis auf das Vorkommen des Satzes bei den Indern im vorchristlichen Zeitraum.

Kugler, F. X., Astronomische und meteorologische Finsternisse. Eine assyriologisch-kosmologische Untersuchung. [21
Leipzig, Deutsche morgenl. Gesellsch., Zeitschr. 56, 1902, 60—70

***Weyh, A.,** Die wichtigsten Mathematiker und Physiker des Altertums. Kreuzburg 1902. [22
4°, 28 S.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia Libro V (1902). [Recension:] Wiadomości matem 6, 1902, 291—292. (S D.) [23

Tannery, P., Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. [24
Bibl. Mathem. 3_3, 1902, 161—175.

Schmidt, W., Zur Textgeschichte der „Ochúmena" des Archimedes. [25
Bibl. Mathem. 3_3, 1902, 176—179. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2100,

Björnbo, A. A., Über Menelaos' Sphärik. Leipzig, Teubner 1902. [26
8°, 55 + (1) S — Inauguraldissertation (München), eigentlich der Anfang einer gröfseren Abhandlung, die in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften publiziert wird.

Molhuysen, P. C., Zur Geschichte des Codex Arcerianus der Agrimensoren. [27
Centralbl. für Bibliotheksw 19, 1902, 26?—271.

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Steinschneider, M., Arabische Mathematiker mit Einschlufs der Astronomen. I—VII. [28
Orientalistische Litteraturzeitung (Berlin) 4, 1901, 89—91, 183—190, 269—278, 345—354, 411—444; 5, 1902, 1—5, 177—184.

Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis edidit M. Curtze (1899). [Recension:] *Bruxelles*, Soc scient., Revue des quest scient. 2_3, 1902, 275—280. (H. Bosmans.) [29

Eneström, G., Über Summierung der Reihe von Kubikzahlen im christlichen Mittelalter. [30
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 243. — Anfrage

Schmidt, W., Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria. [31
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 180—187. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1976

d) **Geschichte der neueren Zeit.**

Birkenmajer, L. A., Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski a najstarsza karta geograficzna polski (1901). [Recension:] Wiadomości matem. 6, 1902, 278—280 (R Merecki.) [32

Eneström, G., Über eine wiedergefundene Handschrift der Trigonometrie des Johannes Werner. [33
Bibiioth. Mathem. 3_3, 1902, 242—243.

Maas, M., Nikolaus Krazer, ein Münchener Humanist. Ein biographiseher Versnch. München 1902. [34
8°, 22 S. — Sonderabdruck aus der Beilage zur „Allgemeinen Zeitung". — NIKOLAUS KRATZER (1487—c. 1550) war auch als Astronom thätig.

Frizzo, G., De numerie libri duo anthore J. Noviomago (1901). [Recension:] Boliett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 49—51. (G. L.) [35

Favaro, A., Una lettera inedita di Ticone Brahe. [36
Bibiioth. Mathem. 3_3, 1902, 188—190.

Vacca, G., Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferiei. [37
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 191—197.

Sehor, D., Simon Stevin nnd das hydrostatische Paradoxon. [38
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 198—203.

Vacca, G., Sni manoscritti inediti di Thomas Harriot (1902). [Résumé:] Wiadomości matem. 6, 1902, 259—260. (S. D.) [39

Goldbeek, E., Das Problem des Weltstoffs bei Galilei. [40
Viertaljahrsschr. für wissensch. Philosophie 26, 1902, 143—204.

Favaro, A., Amiei e eorrispondenti di Galileo Galilei. IV. Alessandra Bocchineri. V. Francesco Rasi. VI. Giovanfrancesco Buonamici. [41
Venezia, Istitnto Veneto, Atti 61 : 2, 1902, 665—701.

Loewy, A., Über Onghtreds abgekürzte Multiplikation. [42
Arch. der Mathem. 3_3, 1902, 321—323.

Monchamp, G., Une lettre „perdne" de Descartes. A propos do la nonvelle édition de ses oeuvres. [43
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin (Classe des lettres) 1899, 632—644. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1975—1976. (C. GÜTTLER.)

***Ricci, G.,** Origine e svilnppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria. Diseorso inaugurale letto nell' Aula Magna della r. università di Padova il 5 novembre 1901. Padova 1902. [44
8,

Burkhardt, H., Entwieklungen nach oseillirenden Functionen. 2. Lieferung. [45
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10 : 2, 1902, 177—400.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Recension:] Mathasis 2_3, 1902, 142—143. (P. M.) [46

Stäckel, P., Beiträge zur Flächentheorie. VII. Darstellungen der Minimalflächen. [47
Leipzig, Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Berichte (Mathem. Cl.) 1902, 101—108. — Wesentlich historischen Inhalts.

Staude, O., Die Hauptepoehen der Entwiekelung der neueren Mathematik. [48
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 280—292.

Eneström, G., Über den Ursprung der Beuennnng „Pellsche Gleichung". [49
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 204—207.

Dingeldey, F., Zur Enler-Goeringschen Rektifikation des Kreises. [50
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 238—240.

Pepin, T., Etude historiqne sur la théorie des résidus quadratiques. [51
Roma, Accad. d. N. Lincei, Memorie 16, 1900, 229—276.

Günther, S., Der Innsbrucker Mathematiker und Geophysiker Franz Zallinger (1743—1828). [52
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 208—225. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1915.

***Fiser, R.,** Die Methoden der analytisehen Geometrie in ihrer Entwiekelung im 19. Jahrhundert. Braunau 1900 [53
4°, 51 S. — Programm. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1723.

M[ehmke R.,] Der Rechenschieber in Deutschland. [54
Zeitschr. für Mathem. 47, 1902, 489—491.

Föppl, A., Die Mechanik im 19 Jahrhundert (1902). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 1466 — Monatsh. für Mathem. 13, 1902; Lit-Ber. 43 [55

Klein, F., Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814 (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 113—114. [56

Stäckel, P., Die Entwiekelung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. [57
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 17 (1899), 1901, 1—19.

Kürschák, J. und Stäckel, P., Johann Bolyais „Bemerkungen über Nicolaus Lobatsehewskys geometrische Untersuehungen zur Theorie der Parallellinien". [58
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 18 (1900), 1902, 250—279

Stäckel, P., Untersuehungen aus der absolnten Geometrie. Aus Johann Bolyais Nachlafs herausgegeben. [59
Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 18 (1900), 1902, 280—307.

Noether, M., Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt (1901). [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2043. [60

Dyck, W., Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumanns vorgefundene Rede von C. G. J. Jacobi. [61
Mathem. Ann. 56, 1902, 252—256.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisehes Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensumstände und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen, u. s. w. aller Völker und Zeiten. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend). Herausgegeben von A. J. VON OETTINGEN. Lieferung 1. Leipzig, Barth 1902. [62
8°, 80 S. — [3 *M*.]

Mittag-Leffler, G., Une page de la vie de Weierstrass. [63
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 131—153. — Enthält zum grofsen Teil Auszüge aus Briefen von WEIERSTRASS an SOPHIE KOWALEVSKI nebst französischer Übersetzung derselben.

Volterra, V., Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse. [64
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 43—57.

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятели исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Антоніо Фаваро. [65
Fiziko-matem. nauki 1_2, 1901, 267—285. — BOBYNIN, V. V., Die Litteratur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Antonio Favaro.

e) Nekrologe.

Xavier François **Antomari** (1855—1902). [66
L'enseignement mathém. 4, 1902, 294. — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, 239—240. (C. A. LAISANT.)

Joseph **Bertrand** (1822—1900). [67
Mathesis 2_2, 1902, 167—170. (Auszug aus dem Nekrologe von G. DARBOUX.)

Nicolas **Breithof** (1840?—1901). [68
L'enseignement mathém. 4, 1902, 215.

Alfred **Cornu** (1841—1902). [69
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_1, 1902, 127—146. (J. THIRION.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 212—215 [mit Porträt]. (C. A. LAISANT.) — Nature **66**, 1902, 12—13. (S. P. THOMPSON.) — Naturwiss. Rundschau **17**, 1902, 347—348

Antonio **Cua** (1819—1899). [70
Napoli. Accad. Pontaniana, Atti 31, 1901. 5 S. (F. AMODEO.)

Guelfo **del Prete** (1873—1901). [71
Il bollett. di matem. e di sc. fis (Bologna) 2, 1901, 297—300. (A. CONTI.)

François **Deruyts** (1863?—1902). [72
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin (Cl. des sciences) 1902, 168—171. (C. LE PAIGE.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 215

Léopold François Joseph **van Emelen** (1879—1902). [73
L'enseignement mathém. 4, 1902, 294.

Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833—1902). [74
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **134**, 1902, 1081—1083. (C. JORDAN.) — Arch. der Mathem. 3_3, 1902, 177—186. (M. HAMBURGER.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 293—294. — Nature **66**, 1902, 156—157. (G. B. M.) — Naturwiss. Rundschau **17**, 1902, 293—296. (G. WALLENBERG.) — Wiadomości matem. 6, 1902, 245—251 [mit Schriftverzeichnis]. (A. DANIBOT.) M. HAMBURGER, *Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs.* Leipzig 1902 8° [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. — Zum Teil Sonderabdruck aus dem Arch. der Mathem. — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, 2173.

Lucien Henri François Xavier **Moulins** (1813—1898). [75
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires 1_{10}, 1901, 318—329 [mit Schriftverzeichnis]. (V. ROUQUET.)

Robert **Pendlebury** (?—1902). [76
Nature **65**, 1902, 471.

E. **Ronkar** (1857—1902). [77
L'enseignement mathém. 4, 1902, 215.

John D. **Runkle** (1823—1902). [78
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin. 8_2, 1902, 484.

Charles Antony **Schott** (1826—1901). [79
México, Soc. Alzate, Revista 1901, 36—40 [mit Porträt].

Wilhelm **Schur** (1846—1901). [80
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 292—301. (E. BECKER.)

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [81
Edinburgh, Royal soc., Proceedings **23**, 1901, 498—504. (W. KELVIN.) — Physical review 15, 1902, 51—64 + Porträt. (A. MACFARLANE.)

f) Aktuelle Fragen.

Darboux, G., Le catalogue international de littérature scientifique. [82
Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 54—67. — Auszug aus dem Journal des savants

Maillet, E., Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en mathématiques. [83
Compte rendu du congrès des mathématiciens à Paris 1900 (1902), 425—427.

Müller, Felix, Zur Frage über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften. [84
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 235—237.

Eneström, G., Wie soll ein Mathematiker-Kalender zweckmäfsig bearbeitet werden? [85
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 226—234.

Alasia, C., Saggio di nomenclatura della recente geometria del triangulo. [86
Il Pitagora (Palermo) 8, 1902, 43—49, 73—75, 100—104, 125—131.

Tafelmacher, A. et **Berdellé, Ch.,** Sur une question de terminologie. [87
L'enseignement mathém. 4, 1902, 298—302

Schotten, H., Über eine geplante Encyklopädie der Elementar-Mathematik. [88
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 217—229.

Galdeano, Z. G. de, L'enseignement scientifique en Espagne. [89
L'enseignement mathém. 4, 1902, 237—246.

[Die russische Mathematiker-Versammlung in St. Petersburg 1901 (a. St.)] [90
Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 297.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdocent L. Ambronn in Göttingen zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdocent G. P. Bacon zum Professor der Physik an der „Wooster university".

— Professor L. Boltzmann in Leipzig zum Professor der Physik an der Universität in Wien.

— T. J. I'a Bromwich zum Professor der Mathematik am „Queens college" in Galway.

— A. B. Coble in Baltimore zum Professor der Mathematik an der „University of Missouri".

— Professor H. Du Bois in Berlin zum Professor der Physik und Mechanik an der Universität in Utrecht.

— Professor A. Krazer in Strafsburg zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Privatdocent A. Loewy in Freiburg i. Br. zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor H. Minkowski in Zürich zum Professor der Mathematik an der Universität in Göttingen.

— H. L. Rietz in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Butler college" in Irvington (Indiana).

— Professor F. Schottky in Marburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Berlin.

— G. H. Scott zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Yankton college" in Yankton (S. Dakota).

— Professor W. Trabert in Wien zum Professor der kosmischen Physik an der Universität in Innsbruck.

— Privatdocent J. Wellstein in Strafsburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Giefsen.

— Dr. J. Westlund in Lafayette (Indiana) zum Professor der Mathematik an der „Purdue university" daselbst.

— Dr. E. J. Wilczynski in Berkeley zum Professor der Mathematik an der „University of California" daselbst.

Todesfälle.

— Anton Abt, Professor der Physik an der Universität in Klausenburg, geboren in Rézbánya den 6. November 1828, gestorben 1902.

— Xavier Antomari, Professor der Mathematik am „Lycée Carnot" in Paris, Herausgeber der „Nouvelles annales de mathématiques", geboren zu Valle d'Orezza (Corsika) 1855, gestorben in Paris den 9. Juni 1902.

— Nicolas Breithof, Professor der Geometrie an der Universität in Löwen, geboren in Luxemburg den 30. August 1840 (?), gestorben in Löwen den 11. Oktober 1901.

— François Deruyts, Professor der Geometrie an der Universität in Lüttich, gestorben in Lüttich den 23. Februar 1902, 38 Jahre alt.

— Hervé Faye, Mitglied des „Bureau des longitudes" in Paris, geboren in St. Benoît du Sault den 5. Oktober 1814, gestorben in Paris den 5. Juli 1902.

— Victor August Julius, Professor der Physik an der Universität in Utrecht, geboren in Utrecht den 11. Mai 1851, gestorben daselbst den 1. Mai 1902.

— E. Ronkar, Professor der Mechanik an der Universität in Lüttich, geboren in Lüttich den 26. August 1857, gestorben daselbst den 13. Januar 1902.

— John Daniel Runkle, Professor der Mathematik an dem „Institute of technology" in Boston, geboren in Root, N. Y. den 11. Oktober 1823, gestorben in Southwest Harbor den 8. Juli 1902.

— Ernst Schröder, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Karlsruhe, geboren in Pfortzheim den 25. November 1841, gestorben in Karlsruhe den 17. Juni 1902.

Demnächst erscheinende mathematisch-historische Arbeiten.

— Eine deutsche Übersetzung der Arbeit des Herrn H. G. Zeuthen über die Geschichte der Mathematik des 16. und 17. Jahrhunderts ist jetzt unter der Presse und wird als besonderes Heft der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Prof. F. Rudio hat im Sommersemester 1902 am Polytechnikum in Zürich eine zweistündige Vorlesung über die Geschichte der Quadratur des Kreises gehalten.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1902.

— *Mathematics at the American association meeting 1902.* The American association for the advancement of science met at Pittsburg from 28 June to 3 July 1902. The retiring vice-president, Mr. J. Mac Mahon delivered an address on „Some recent applications of the function theory to physical problems". Mr. E. O. Lovett read a paper on the periodic solutions of the problem of three bodies in which he determines the imaginary centres of libration and establishes that about certain of these imaginary centres there exist real periodic orbits. Mr. J. A. Eistand read papers on a certain class of real functions to which Taylors theorem does not apply and on a class of transcendental functions having line-singularities. Mr. G. B. Halsted presented a new treatment of volume and a new founding of spherical geometry. Mr. E. Frisby read a paper on transformation of the hypergeometric series. Three reports were presented: Recent progress in the quaternion analysis by Mr. A. Macfarlane; Report on the theory of collineations by Mr. H. B. Newson; and Second report on recent progress in the theory of groups of finite order by Mr. G. A. Miller. The next meeting of the Association will be held in Washington during Christmas week.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1903. On demande une contribution importante à l'étude des formes mixtes renfermant un nombre quelconque de séries de variables; en appliquer les résultats à la géométrie des espaces quelconques.

Vermischtes.

— Eine Gesamtausgabe von Ernst Scherings wissenschaftlichen Abhandlungen in zwei Bänden ist jetzt im Erscheinen. Der erste Band, der die mathematischen Arbeiten umfaſst, wird von Herrn R. Haussner herausgegeben, und die Herausgabe der übrigen Arbeiten, die den zweiten Band bilden, wird von Herrn K. Schering besorgt werden.

— Unter dem Titel *Il bollettino di matematica* erscheint seit dem Anfange des Jahres 1902 in Bologna eine von A. Conti redigierte Zeitschrift, die sechsmal jährlich herausgegeben wird; jedes Heft wird wenigstens 40 Seiten umfassen.

Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume.

Von Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Neuerdings beschäftigt sich die Geschichte der 'Wärmekraftmaschinen' [1]) auch mit einem Heronischen Apparate in Form eines römischen Meilensteins (milliarium), der nach Heron, *Pneum.* II 34 und Athenaeus III 98c von den Alten als Badeofen benutzt wurde und sich als Dampf- und

1) Vgl. Th. Beck, *Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues*, Berlin 1899, S. 22 f. und A. Musil, *Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen*, Leipzig 1902, S. 5. Da das von Musil benutzte englische Werk von J. A. Ewing bereits 1899 erschien, so halten wir uns im Folgenden bloſs an Musil. Dieser, der sich S. 3—6 mit Herons Wärmekraftmaschinen überhaupt befaſst, würde nun eine Reihe von Irrtümern vermieden haben, wenn er die bereits 1899 und 1900 erschienenen Bände der neuen Heron-Ausgabe hätte benutzen wollen. Statt dessen geht er im Anschluſs an Beck S. 22 auf Carios elendes Machwerk vom Jahre 1688 zurück, eine Arbeit, die von Übersetzungsfehlern wimmelt, wie ich bereits im Supplemente zu Heron, *Op.* I S. 134 gezeigt habe. Daher kann es uns denn nicht wundern, wenn solch mangelhafter Text vorgelegt wird, wie Musil S. 5: 'Es soll sich aber das kalte Wasser erst dann mit dem warmen vereinigen, wenn es auf den Boden des Topfes gelangt *und dort durch eine Röhre ausgeflossen ist*' ('ehe es auf des Geschirrs Boden komme und *durch selbe Röhre das kalte Wasser ausflieſse*', Cario S. 144). Das Richtige lehrt Heron, *Op.* I 305, 12. Auch sind Musils Notizen ein anschauliches Beispiel dafür, wie gewisse Irrtümer unausrottbar sind und sich „wie eine ewige Krankheit" von Buch zu Buch vererben. In der Vorrede von Carios Übersetzung wird dem Abt Bernhard Baldi von Urbino eine griechische Ausgabe der *Pneumatik*, die in Augsburg gedruckt sei, zugeschrieben. In Wirklichkeit hat er sie weder im Urtext noch in Übersetzung herausgegeben, sondern Cario hat die Ausgabe der *Pneumatik*, wie ich schon in dem erwähnten Supplemente S. 134 Anm. 3 dargethan habe, mit der im Jahre 1616 in Augsburg erschienenen griechischen Ausgabe der *Belopoiika* verwechselt. Dieser Irrtum ist dann übergegangen auf Greenwood (?) — ich habe ihn eben leider nicht zur Hand —, auf Susemihl, *Gesch. d. griech. Litt.* Bd. I (1890), S. 743, auf Beck a. a. O. S. 6 und jetzt wieder in das Buch von Musil. Daſs Herons *Mechanik* überhaupt nicht vorhanden sein soll, berührt jedenfalls den seltsam, der weiſs, daſs sie 1900 in arabischem und griechischem Texte neu ediert ist, und schon vorher (1894) arabisch und französisch erschien. Daſs Heron seine Dampfturbine selber Äolipile genannt habe (Musil S. 545), ist gleichfalls unrichtig. Desgleichen ist Barülkon (so!) durch Barulkos zu ersetzen. Schlieſslich sind auch

Wasserkessel darstellt. Er erregt dadurch besonderes Interesse, dafs er eines der ältesten Beispiele ist, in denen wir einer inneren Feuerung nach Art der Cornwall-Kessel, ferner quer durch die Feuerung laufenden Röhren nach Art der Gallowayschen Quersieder und schliefslich einem dritten Rohre nach Art der Fieldröhre[1]) begegnen. Es ist Th. Becks Verdienst, in seinen *Historischen Notizen* im Civilingenieur 1886, S. 425, die in den oben erwähnten *Beiträgen* fast unverändert wieder abgedruckt sind, zuerst auf diese Analogien zwischen antiken und modernen Vorrichtungen hingewiesen zu haben.

Was nun die Rekonstruktion des vertikalen Heronischen Kessels betrifft, so weicht die von Beck gegebene und von Musil S. 5 übernommene von der meinigen (Fig. 1) wesentlich ab, und ich sehe mich darum veranlafst, die von mir gegebene Rekonstruktion etwas ausführlicher zu begründen.

Zu dem Zwecke ist es zunächst notwendig, die Einrichtung des Heronischen Dampfkessels zu kennen, wie ihn die griechische Überlieferung des Textes und der zugehörigen Illustration uns an die Hand giebt.[2]) Ein äufserer Hohlcylinder αβγδ (Fig. 1 und 2, s. nebenstehend) umschliefst konzentrisch einen inneren. Der zwischen beiden liegende, ringförmige, oben und unten geschlossene Hohlraum ist bestimmt, durch ein Rohr ρσ das kalte Wasser aufzunehmen, welches im Kessel erwärmt werden soll. Innerhalb dieses hohlen Ringkörpers wird ein Raum εζηθ

die Wärmekraftapparate nicht erschöpft. Es ist ja lobenswert, dafs die Techniker auch der historischen Seite der exakten Wissenschaft ihre Aufmerksamkeit zuwenden, und man mufs zugeben, dafs die historischen Notizen für das Buch von Musil nur eine sekundäre Bedeutung beanspruchen. Gleichwohl wird man gerade bei einem zusammenfassenden, für weitere Kreise bestimmten Buche wünschen müssen, dafs der Verfasser, wenn überhaupt historische Notizen beigegeben werden, auch hier sich bemühe, „dem heutigen Stande des Themas gerecht zu werden“ (Musil, Vorwort), eine Aufgabe, der Musil für Heron leider nicht gerecht geworden ist. Zur Kritik von Becks 2. Aufl. (1900) vgl. Deutsche Litteraturz. 1902, S. 2738 ff.

1) Der Vergleich mit der Fieldröhre ist natürlich nicht genau. Man kann aber vielleicht das Eindringen des kühleren Wassers durch die Kernrohre beim Fieldkessel mit dem Zugiefsen des kalten Wassers durch das Rohr ρσ (Fig. 1) vergleichen. In beiden Fällen wird lebhaft Dampf aufsteigen. Musils Vergleichung des Blasrohrs mit der Fieldröhre ist mir bei seiner Figur nicht klar geworden. Die Möglichkeit, dafs beide Rohre als Innenrohre leicht herausgenommen werden können (vgl. Musil S. 479), bietet doch nur eine äufsere Parallele. Beck S. 24 vergleicht die Röhre λξ mit der heutigen Fieldröhre, wohl weil sie wie letztere an einem Ende geschlossen ist und in den Feuerraum geht, aber sie enthält kein Wasser.

2) Es sei einer Bemerkung Becks *Beitr.* S. 6 gegenüber hier nachdrücklich darauf hingewiesen, dafs in den griechischen Hss. zu *allen* Apparaten von Herons *Pneumatik* Figuren vorhanden und Proben davon (z. B. Fig. 2) in meiner Ausgabe abgebildet sind.

abgesondert. Unten führt in denselben die am Ende ξ offene Röhre λξ, oben steckt eine röhrenförmige, abnehmbare, pustende Figur, deren unteres Ende in eine Röhre ψω eingeschliffen und nach aufsen drehbar ist. Ist die Figur aus ψω herausgezogen, so giefst man ein wenig Wasser in den abgesonderten Raum. Die aus λξ zuströmende heifse Luft verwandelt das Wasser in Dampf, der dann durch die kleine Figur nach dem innern Hohlcylinder geleitet wird. Durch diesen gehen auch zwei Wasserröhren οκ und μν, welche auf beiden Seiten offen sind. Der seitliche Hahn steht offen, er läfst heifses Wasser auslaufen, wenn kaltes zugegeben wird. Das kleine in ρσ mündende Ventil wird teils den Dampf ablassen, teils auch überkochendes Wasser in den Kessel zurückleiten sollen, falls etwa der Hahn einmal geschlossen ist. Nun ist die Frage, wo die Kohlen liegen. Heron verbreitet sich darüber leider nicht; da er aber sonst die

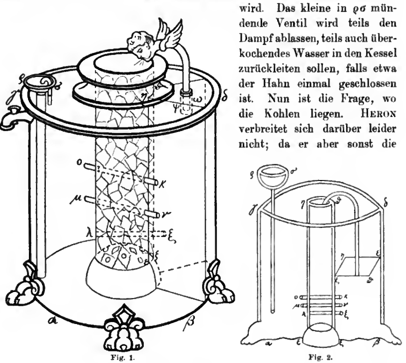


Fig. 1. Fig. 2.

Einzelheiten ziemlich genau beschreibt, so ist wahrscheinlich der entsprechende Abschnitt ausgefallen, wie ich bereits *Pneum.* 304, 20 Anm. angedeutet habe. Dennoch fehlt es nicht ganz an Hinweisen, die einen Schlufs auf die Lagerung der Kohlen gestatten. Die Röhre λξ wird 306, 3 (= 307, 5) als eine der unter den Kohlen liegenden (*εἷς ὢν τῶν ὑποκειμένων τοῖς ἄνθραξιν*) bezeichnet; es liegen also auch μν und οκ unter den Kohlen. Sämtliche Röhren aber gehen durch den innern Hohlcylin-

der. Darans folgt, dafs dieser mit glühenden Kohlen gefüllt war, die durch den aus dem Figürchen ausströmenden Dampf immer von neuem angefacht wurden. Der innere Hohlcylinder dient also nicht wie Beck und Musil wollen, welche in ihren Figuren den Kohlen ihren Platz *unter* demselben anweisen, lediglich als Flamm- oder Rauchrohr mit Unterfeuerung, sondern als Herd (Feuerbüchse) für die innere Feuerung.[1]) Bei dem Heronischen Kessel würde auch bei einer Unterfeuerung die Wärme keineswegs in dem Mafse ausgenutzt wie bei einer wirklichen Innenfeuerung. Die Frage, ob nicht etwa derjenige Teil des innern Cylinders, welcher mit zur abgesonderten Kammer gehörte, der Gefahr des Erglühens, Durchbiegens u. ä. ausgesetzt war, sei Fachleuten zur Erwägung empfohlen. Da aber die Cylinder aus dünnem *Kupferblech* (vgl. Seneca, *Nat. quaest.* III 24: „aere tenui") gefertigt waren und die glühenden Holzkohlen kaum einen allzuhohen Hitzegrad ergaben, so scheint die Einrichtung technisch nicht unmöglich zu sein. Die Gefahr des Erglühens u. s. w. würde für den genannten Teil bei einem blofsen Flammrohre schwerlich geringer sein. Übrigens erscheint diese Gefahr in der von Heron gegebenen Variation, die den abgesonderten Raum auf die Hälfte seiner Höhe reduziert (*Pneum.* 317, 8), wesentlich vermindert. Für denjenigen aber, der gegen die Innenfeuerung Bedenken hegt, sei darauf hingewiesen, dafs wir in Pompeji zwar keine grofsen Kessel, aber doch kleinere Gefäfse nachweisen können, bei welchen ein inneres, mit Holzkohlen gefülltes Rohr von Flüssigkeit umgeben zu denken ist (Overbeck-Mau, *Pompeji*, S. 442, 443[4]). Schliefslich wird von Seneca, *Natur. quaest.* III 24 ausdrücklich erwähnt, dafs beim Milliarium das Wasser rings *um* das Feuer geleitet werde (ut saepe eundem ignem ambiens aqua per tantum fluat spatii quantum efficiendo calori sat est). Auch hier wird man an ein wirkliches Innenfeuer, nicht blofs an heifse Luft oder Rauch mit Unterfeuerung zu denken haben.

Wenn nun wirklich der innere Hohlcylinder die Feuerbüchse bildete, so folgt weiter, dafs die kleine Figur beim Pusten nicht wie bei Beck und Musil nach aufsen gerichtet und mit einem nach unten führenden, von Heron gar nicht erwähnten Rohre verbunden gewesen sein kann, zumal sie bei dieser Gestaltung sich ohne weiteres weder nach der entgegengesetzten Richtung drehen[2]) noch abheben läfst. Vielmehr ist sie

1) Die zum Vergleich angezogenen Cornwall-Kessel haben teils wirkliche Innenfeuerung, teils im Anschlufs daran ein Rauchrohr.

2) Sie wird also nicht etwa erst gehoben und dadurch mit der äufseren Röhre aufser Verbindung gesetzt. Das Abheben der Figur hat lediglich den Zweck, das Eingiefsen des μικρὸν ὑδάτιον 306, 14 (der geringen Quantität Wasser) zu ermöglichen, vgl. *Pneum.* 306, 20.



nach Heron nach *außen* drehbar, sobald sie *nicht* pusten soll, andernfalls ist sie aber nach dem inneren 'Feuerraume' gerichtet.

Zum Schlusse dürfte es vielleicht von Interesse sein, zu erfahren, daſs nach Seneca a. a. O. Röhren aus dünnem Kupferbleche den innern Feuerherd des Badeofens (miliarium) *spiralförmig* umgaben. So wenigstens glaube ich seine Worte verstehen zu sollen: „Facere solemus miliaria in quibus aere tenui fistulas struimus *per declive* circumdatas, ut saepe eundem ignem ambiens aqua per tantum fluat spatii, quantum efficiendo calori sat est. Frigida itaque intrat, effluit calida.“ Senecas Ofen mit seinen Spiralwindungen erinnert sehr an Lilienthals Dampfmotor mit Innenfeuerung, nur daſs bei letzterem die spiralförmigen Windungen des Rohrs *zwei* konzentrische Cylinder in auf- und absteigender Ordnung um den Feuerherd bilden und sein Zweck nicht wie bei Seneca bloſs die Erwärmung des Wassers, sondern die gefahrlose Erzeugung des Dampfes ist.

Simplicius et la quadrature du cercle.

Par PAUL TANNERY à Pantin.

1. Dans la Bibliotheca Mathematica (3_3, 1902, p. 1—62), F. RUDIO a rouvert récemment la discussion sur un sujet où elle semblait épuisée depuis dix-huit ans, je veux dire depuis l'article de HEIBERG dans le Philologus de 1884 (p. 336—344). Au moins en ce qui me concerne, alors que, dès 1878[1]), j'avais pris position sur la question, je n'avais plus trouvé matière à revenir sur mon travail de 1883[2]); après un laps de temps aussi long, il me semble que je puis le juger impersonnellement, et je serais certainement très disposé à accepter les nouvelles observations introduites par F. RUDIO, si je n'étais pas arrêté par divers scrupules que son étude, en tous cas très-utile et très-méritoire, n'est pas parvenue à écarter de mon esprit.

Je n'ai nullement au reste l'intention de soumettre ici son article à une critique minutieuse, mais seulement de toucher les divers points qui me paraissent avoir une importance réelle. Je le prie donc de m'excuser si je ne relève pas ici les passages sur lesquels il me paraît bien avoir réalisé des progrès définitifs, mais d'ordre secondaire; je m'abstiendrai de même de signaler les objections de pur détail que je pourrais avoir à présenter sur quelques autres.

2. Tout d'abord, F. RUDIO a eu grandement raison de porter son attention sur tout l'ensemble du commentaire de SIMPLICIUS concernant la quadrature du cercle, et d'en donner une traduction annotée. Mais je trouve là matière à une petite digression, à propos de la pseudo-quadrature d'ANTIPHON. Je n'ai jamais exactement compris l'importance historique qu'on est généralement d'accord pour lui attribuer. ANTIPHON, en effet, était postérieur d'une génération à HIPPOCRATE, et celui-ci avait démontré que deux cercles étaient dans le rapport des carrés de leurs diamètres.

1) *Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules*; Mémoires de la société des sciences de Bordeaux 2_2, 1878, 179—184.

2) *Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules*; Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux 5_2, 1883, 211—236.

Sans doute cette démonstration n'avait pas la rigueur qui ne fut atteinte que par Eudoxe, mais je ne puis concevoir comment elle a pu être dirigée, si elle n'était pas une première ébauche de la méthode d'exhaustion. Ce serait donc à Hippocrate, non pas à Antiphon, qu'il faudrait faire remonter l'origine de cette méthode; dans le raisonnement du second, je ne puis voir qu'une *variation* sophistique sur un *motif* appartenant au premier. Et si l'on veut s'attacher en particulier aux calculs d'Archimède, je ne vois point que ce dernier ait eu en rien besoin de l'idée d'Antiphon; la démonstration d'Euclide (ou d'Eudoxe) était pour lui un point de départ tout indiqué et parfaitement suffisant.

Je serais heureux si ces remarques incidentes provoquaient une étude approfondie sur la question, dût-elle montrer que mon opinion est erronée.

3. Un autre point sur lequel F. Rudio me paraît avoir, à juste titre, attiré l'attention, c'est que tous les critiques (moi le premier, bien entendu) qui depuis Bretschneider se sont occupés du texte historique de Simplicius, ont défavorablement apprécié ce commentateur, en tant que géomètre, et cela plutôt par une sorte de préjugé contre lui que par des raisons absolument décisives. Il convenait donc d'essayer de le réhabiliter; mais malgré l'impartialité évidente du défenseur qu'il vient de trouver, cet essai a-t-il été couronné de succès? L'appréciation courante sur Simplicius doit-elle être désormais sensiblement modifiée?

Demander que Simplicius soit jugé par les mathématiciens aussi favorablement qu'il l'est par les philosophes, est la note juste; mais c'est peut-être moins demander que ne le croit F. Rudio. Pour ma part, à l'occasion de leçons que j'ai professées au Collège de France, j'ai pratiqué Simplicius encore plus comme philosophe que comme géomètre; sa valeur n'est certainement pas négligeable, mais ses défauts ne peuvent davantage être niés, et je ne pense pas qu'il y ait un philosophe qui ne le considère comme inférieur à Proclus. De même comme géomètre, ce dernier me semble au dessus de lui. Nous avons aujourd'hui un moyen de les comparer, grâce aux fragments conservés par Anaritius de l'écrit de Simplicius sur les définitions et axiomes d'Euclide. Mais je crois inutile d'entreprendre ici cette comparaison, puisque je reconnais que F. Rudio, en principe, a eu raison de nous mettre en garde contre des jugements trop sévères et insuffisamment motivés.

Cependant, en égard aux cas particuliers, comme je le montrerai plus loin, je ne sais point si l'idée qu'il se fait de son client n'est pas, tout compte fait, inférieure à celle que je m'en fais moi-même; je me vois donc obligé de préciser celle-ci.

4. Dans son exposition mathématique des quadratures. la maladresse technique de Simplicius se traduit surtout par des impropriétés d'expres-



sion qui lui font dire le contraire de ce qu'il devrait. Plaider que néanmoins ce qu'il voulait dire était juste, comme, par exemple, sur le passage de l'édition DIELS, 55, 16 (où il faudrait supprimer *ἀρχὴν εἶναι τὸ* pour avoir un bon sens) ou encore 69, 31—32 (où *ἀορίστων* est insoutenable), c'est peut-être là une thèse juste, mais elle est, ce me semble, en dehors de la question, qui pratiquement revient à ceci: lorsque nous nous trouvons en présence d'un passage sur l'attribution duquel il y a doute, entre EUDÈME et SIMPLICIUS, et que ce passage renferme une maladresse, serons-nous tentés de l'attribuer au second, qui en est capable, ou au premier, pour lequel nous n'avons aucun motif semblable de suspicion?

Je m'arrête au second des deux passages précités, parce qu'il me paraît topique. La partie du fragment d'EUDÈME, où sont exposées les trois lunules carrables d'HIPPOCRATE, se termine apparemment par une phrase (éd. DIELS, 67, 3—6) qui se traduit littéralement comme suit: «Ainsi HIPPOCRATE a carré toute sorte de lunule, en tant du moins qu'il «a carré celle où l'arc extérieur est d'une demi-circonférence, celle où il «est plus grand, et celle où il est plus petit.» J'ai admis qu'une pareille phrase ne pouvait pas avoir été écrite en ces termes par EUDÈME, et HEIBERG est du même sentiment. Peut-être l'un et l'autre avons-nous préjugé trop favorablement du premier historien des mathématiques; en tout cas, quand même l'opinion du rédacteur définitif de cette phrase n'aurait pas été erronée (c'est ce qu'admet F. RUDIO), elle présente une ambiguïté inexcusable, puisque les trois lunules sont tout-à-fait particulières.

SIMPLICIUS (éd. DIELS, 69, 12—34) revient pour son propre compte sur cette question, et examine s'il faut entendre que la quadrature des lunules est générale. Il rejette tout d'abord cette interprétation, parce qu'on en devrait conclure, en vertu de la dernière proposition rapportée par EUDÈME, qu'HIPPOCRATE aurait obtenu la quadrature du cercle, tandis qu'ARISTOTE déclare que cette quadrature est inconnue. Passons sur ce singulier appel à l'autorité du Maître.

Il ne faut donc pas dire, continue SIMPLICIUS, que la quadrature d'HIPPOCRATE soit générale.[1]) En effet, pour un arc extérieur donné, il peut y avoir une infinité d'arcs intérieurs, tandis qu'HIPPOCRATE suppose toujours l'arc intérieur déterminé par l'arc extérieur. Cette fois le raisonnement est irréfragable; on pourrait tout au plus désirer la remarque que l'arc extérieur des lunules carrées est également déterminé d'espèce. Mais, sur ce point, SIMPLICIUS ajoute maladroitement que les segments

1) Je concède que *μήποτε* (éd. DIELS 69, 23) peut ne pas avoir ici le sens quelque peu dubitatif que lui donne d'ordinaire SIMPLICIUS (par exemple ibid. 60, 17).

semblables, construits, pour la première quadrature, sur le côté du carré inscrit, le sont, pour les deux autres, sur des cordes *indéterminées* (*ἀορίστων*: nicht näher bezeichneten, Rudio). Après quoi, se corrigeant, il dit que ces segments sont déterminés en quelque sorte (*ὡρισμένοις πως*: irgendwie bestimmt, Rudio).

En réalité, les cordes dont il s'agit sont tout aussi déterminées, par rapport au rayon du cercle, que le côté du carré inscrit, et Hippocrate avait donné le moyen de les construire. Simplicius aurait donc dû écrire, non pas *ἀορίστων*, mais *ἄλλως*, ou, au plus, *ἄλλως πως ὡρισμένων* (déterminées d'une certaine autre façon); Proclus, par exemple, n'aurait pas sans doute employé une expression aussi impropre, ni tenu un langage d'apparence aussi contradictoire.

L'erreur d'expression est donc manifeste; sans doute il ne faut pas en exagérer l'importance, ni même conclure ici que cette erreur existait dans la pensée de Simplicius, puisque nous voyons qu'il a cherché à se corriger. Cependant, étant donné que nous nous trouvons pour le fragment d'Eudème, en présence d'un texte certainement remanié par le commentateur, et que nous venons de prendre ce dernier en flagrant délit d'incorrection dans le languge technique, nous avons au moins un motif de soupçonner que ce peut être lui qui est responsable, par exemple de l'ambiguïté du passage précédemment rapporté. Peut-être, d'ailleurs, s'il l'a ainsi rédigé, n'était-ce que dans l'intention de faire ressortir une conclusion sophistique qui lui semblait pouvoir être tirée de l'exposé d'Eudème, mais qu'il se proposait de réfuter ensuite. C'est un procédé qui est, en effet, assez dans ses habitudes de discussion philosophique.

5. En résumé, la réhabilitation tentée par F. Rudio ne me paraît pas devoir pratiquement, pour la critique du texte, changer sensiblement l'état de la question.[1]) Elle se trouverait au contraire sérieusement modifiée, si nous devions, comme il le fait, renoncer complètement au critérium fondé sur l'emploi des locutions comme *τὸ ἐφ' ᾧ A* ou *τὸ A*, servant à désigner le point *A*. Diels avait déjà remarqué très justement que ce critérium n'est pas suffisant, puisque la seconde locution se trouve dans des passages qui ne peuvent raisonnablement être déniés à Eudème. F. Rudio soutient que de plus il est de nature à induire en erreur, parce que Simplicius a pu se laisser aller, par imitation involontaire, à employer l'ancienne locution. Passe peut-être pour une fois; mais attribuer

1) Comme cependant cette réhabilitation, au point de vue historique, garde son intérêt, j'aurais désiré que F. Rudio discutât plus à fond la réplique (éd. Diels, 59—60) à Ammonius qui, comme mathématicien, avait de son temps une grande réputation. Simplicius ne me paraît point avoir bien saisi la question.



à SIMPLICIUS tout un passage (éd. DIELS, 66, 15—19) où cette ancienne locution revient six fois, cela me paraît dépasser les bornes.

Je reconnais parfaitement que la certitude de l'emploi du critérium n'est jamais absolue, pas plus que pour aucun indice analogue en matière de critique de textes (puisqu'une corruption peut toujours être supposée). Mais, sous les réserves nécessaires, les distinctions à tirer du dit critérium, entre ce qui appartient à SIMPLICIUS et ce qui appartient à EUDÈME, n'en doivent pas moins, je crois, être considérées comme fondées sur un motif très grave, et il ne faut pas oublier que, sans ces distinctions, on ne serait pas parvenu à débrouiller le texte d'EUDÈME autant qu'on a pu le faire.

F. RUDIO estime d'autre part que, du temps d'EUDÈME, la vieille locution était déjà tombée en désuétude et que celui-ci ne l'a guère employée que là où, par suite d'une plus grande complication du sujet, il a été conduit à suivre de plus près le texte d'HIPPOCRATE. Je dirais plutôt qu'à mon avis EUDÈME a cherché autant que possible à éviter l'emploi des lettres de figure; que là où il a été obligé d'y recourir, il a mélangé les deux locutions comme on les trouve déjà mélangées dans ARISTOTE, quoique dans les textes de ce dernier l'emploi de la nouvelle locution provienne souvent d'additions postérieures. Que l'usage de l'ancienne locution ait persisté longtemps encore après EUDÈME, nous pouvons d'ailleurs le voir d'après PHILON de Byzance: dans le livre IV de sa *Mechanica syntaxis* (éd. R. SCHÖNE, Berlin, Reimer 1893), je relève 19 fois cette locution contre 23 exemples de la nouvelle. Si nous considérons que les textes d'EUCLIDE, d'AUTOLYCUS et d'ARISTARQUE, tels que nous les lisons, sont bien loin de remonter à leur époque, au point de vue de la tradition manuscrite, il est difficile d'affirmer que le triomphe de la nouvelle locution a été déterminé par l'emploi exclusif qu'ils en auraient fait.

6. Après ces préambules, j'arrive enfin aux trois passages pour lesquels l'attribution à EUDÈME ou à SIMPLICIUS reste le plus controversable. Le premier se rapporte au début de l'exposé d'EUDÈME, les deux autres à la quadrature de la troisième lunule.

Sur le premier (éd. DIELS, 61, 11—18), F. RUDIO propose une conjecture nouvelle et très intéressante relative à la marche qu'aurait suivie HIPPOCRATE. Celui-ci aurait défini les *secteurs* de cercle semblables ceux qui sont dans le même rapport à leurs cercles, définition qui aurait entraîné, pour les secteurs semblables, l'égalité des angles au centre (comme ayant un même rapport à quatre droits). Des secteurs semblables sont donc dans le même rapport que les carrés des diamètres des cercles, et comme les triangles, formés dans chaque secteur par les rayons extrêmes

et par la corde de l'arc, base du segment, sont semblables, ces triangles sont aussi dans le même rapport, qui est également celui des carrés des cordes. Il s'ensuit que les segments seront, eux aussi, dans ce même rapport et peuvent être, par suite, qualifiés de semblables. HIPPOCRATE démontrait supplémentairement que les angles inscrits dans les segments semblables sont égaux, etc.

Cette conjecture soulève malheureusement des difficultés aussi graves que celles qu'il s'agit d'écarter. Tout d'abord il faut admettre qu'EUDÈME aurait employé à quelques lignes de distance, le mot τμῆμα d'abord dans le sens de *secteur*, de l'autre dans celui de *segment*; malgré les assimilations faites par F. RUDIO avec certains emplois de mots techniques, cette concession est bien difficile à faire. D'un autre côté, on ne comprend guère comment, dans l'hypothèse de telles démonstrations, EUDÈME (éd. DIELS, 61, 19) aurait écrit un peu plus loin au singulier, ***δειχθέντος δὲ αὐτῷ τούτου*** et non au pluriel ***δειχθέντων ... τούτων***. A cet égard, je ne puis regarder comme susceptible de preuve l'opinion que l'ensemble de ces démonstrations était nécessaire dans l'écrit d'HIPPOCRATE sur les lunules, parce que cet écrit aurait été antérieur aux *Eléments* du même auteur. L'argument de F. RUDIO, à savoir que, dans le cas contraire, EUDÈME aurait nécessairement mentionné les références d'HIPPOCRATE à ses *Eléments*, ne me semble point en effet concluant; nous en savons trop peu sur les habitudes de rédaction d'EUDÈME pour nous prononcer à cet égard, et sa concision, dont nous pouvons juger, serait plutôt de nature à nous faire douter qu'il eût remarqué cette mention comme bien utile, surtout s'il avait antérieurement parlé de l'ordre des écrits d'HIPPOCRATE.

Je ne vois point d'autre part que cette conjecture atteigne son but, celui de sauver l'honneur de SIMPLICIUS: un commentateur aussi minutieux qu'il l'est partout ailleurs, n'aurait pas dû, en tout cas, laisser passer, sans la signaler, une amphibologie dans l'emploi du mot τμῆμα, amphibologie peut-être excusable à une époque où la langue technique n'était pas fixée, mais qui, pour les lecteurs de son temps, troublait l'ordre des idées aussi bien que pour nous. Admettre que SIMPLICIUS aurait copié EUDÈME sans le comprendre et sans dire qu'il ne comprenait pas, serait lui faire encore plus de tort; et à vrai dire, ce ne sont point là ses habitudes.

En somme, nous manquons des données nécessaires pour restituer sûrement, non pas les connaissances effectives d'HIPPOCRATE sur la matière, mais l'ordre dans lequel il les enchainait. La rédaction dont nous devrions déduire cet ordre est au moins incorrecte; et nous n'avons point de critérium assuré pour en mettre les incorrections à la charge d'EUDÈME ou de SIMPLICIUS. Mais en attribuant toute cette rédaction à SIM-

plicius et en lui enlevant ainsi toute valeur historique, ainsi que le fait Heiberg, on ne fait pas, ce me semble, au commentateur un tort aussi grand que paraît le croire Rudio.

7. Le premier des deux passages corrompus de la quadrature de la troisième lunule (éd. Diels, 63, 7—23), est, à mon avis, au moins en ce qui concerne la restitution du texte d'Eudème, dans un état irrémédiable.

La situation est la suivante: notre historien vient d'indiquer la construction d'un trapèze isoscèle dont les bases sont BK, HE, l'une, BK, étant égale à chacun des deux côtés non parallèles BH, KE, étant de plus dans le rapport $\sqrt{\frac{3}{2}}$ avec EZ ou ZH, qui sont, du côté de l'autre base, les segments, égaux entre eux, des diagonales BZE, KZH du trapèze.

D'après F. Rudio, Eudème indiquerait ensuite que le trapèze $BKEH$ est inscriptible dans un cercle; puis, que si l'on circonscrit également à un cercle le triangle EZH, les segments sur EZ, ZH seront semblables aux segments sur EK, KB, BH. Certes la marche est très correcte et bien dans la manière d'Eudème; mais il faut déplacer toute une phrase et y apporter une correction violente.

Contre le déplacement, on peut objecter que si Hippocrate s'était, comme il semble, donné la peine de démontrer que le trapèze était inscriptible, il était peut-être plus naturel pour lui de commencer par tracer le cercle circonscrit au triangle. Mais, au fond, cela importe peu; ce qui me frappe surtout dans le texte actuel, c'est que la similitude des segments soit aussi incorrectement énoncée, et que, d'autre part, Simplicius ne s'occupe nullement de la démontrer, alors que c'est un point capital, et qui n'est pas immédiatement évident. Si peu favorablement que je juge le commentateur comme géomètre, je ne considère pas cette démonstration comme dépassant ses forces. Je me demande donc s'il n'y a pas là une lacune considérable, ou bien si Simplicius ne s'est pas trouvé en présence d'un texte déjà corrompu, qu'il n'aura pas osé remanier autant qu'il aurait fallu.

8. Le dernier passage (éd. Diels, 66, 14—67, 2) a une importance historique plus considérable. F. Rudio l'attribue en presque totalité (c. a. d. sauf 67, 19—24) à Simplicius, malgé le critérium des locutions qui, ainsi que je l'ai dit plus haut, conduit à maintenir à Eudème les lignes 15—19 qui seules sont proprement en question. Mais dès le début (l. 14—15), le rédacteur dit: « Il démontre ainsi ». Ce rédacteur ne peut donc être Simplicius.

Le motif invoqué par Rudio est qu'Hippocrate, ayant à démontrer que $EK^2 > 2KZ^2$, l'aurait simplement conclu de $EK = KB$, par hypo-

thèse, et $\overline{KB}^2 > 2\overline{KZ}^2$, dans le triangle isoscèle KZB où l'angle en Z est obtus. Nous trouvons au contraire une démonstration passablement confuse, dans laquelle, par surcroît, le texte est plus ou moins altéré. Mais Rudio suppose implicitement qu'Hippocrate admettait sans démonstration que l'angle en Z est obtus; or cela est au moins douteux, d'autant que, dans le texte actuel, nous voyons simplement énoncer que l'angle en Z est plus grand que l'angle ZKB et annoncer qu'on le démontrera plus loin. Cette démonstration, qu'on ne retrouve pas, pouvait être déduite par Hippocrate de l'hypothèse $EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2$, d'où l'on conclut $\widehat{EKZ} > \widehat{EZK}$. D'autre part $\widehat{EKB} < 2\,\text{dr}$. Retranchant la première inégalité de la seconde, $\widehat{ZKB} < \widehat{KZB}$. C. Q. F. D.

Dans mon essai de restitution du texte d'Eudème, j'ai essayé de pratiquer la critique conservatrice, c'est à dire de n'apporter aux leçons des manuscrits que le minimum de changements possible. J'ai ainsi été conduit à admettre qu'Hippocrate avait eu réalité admis provisoirement, sauf à le démontrer plus loin, que l'angle en Z était obtus. Aujourd'hui je rejetterais plutôt cette hypothèse, et serais par suite amené à me rapprocher davantage du texte admis par F. Rudio; mais je crois toujours qu'il faut attribuer ce texte à Eudème (reproduisant d'assez près Hippocrate), non pas à Simplicius.

9. Si confuse que puisse nous paraître cette démonstration, je crois plus équitable de ne pas en mettre les défauts apparents à la charge du commentateur. Si puissant géomètre qu'ait pu être Hippocrate, ses habitudes n'avaient sans doute pas encore la perfection atteinte par Euclide. Si maladroit, d'autre part, que se montre parfois Simplicius, il faut bien reconnaître qu'il avait l'acquis d'un enseignement méthodique sur des modèles irréprochables; pour la mise en forme d'une démonstration, il pouvait donc très bien mieux faire qu'Hippocrate.

Malheureusement le passage en question est le seul, à mon avis, où nous aurions vraiment la chance de nous trouver en présence d'une démonstration d'Hippocrate qui ne soit pas refaite par Eudème au même degré que les autres. Il y aurait donc un véritable intérêt historique à en obtenir une restitution désormais hors de toute controverse. Mais, dans les matières de ce genre, il est plus facile de faire ressortir les difficultés d'une solution proposée que d'en établir une qui rallie tous les suffrages.

Über die im „Liber augmenti et diminutionis" vorkommenden Autoren.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Im IX. Bande der Bibliotheca arabico-hispana[1]) giebt Abû Bekr b. Chair el-Išbîlî (d. h. von Sevilla), gest. 575 d. H. (1179/80) in Cordova, ein Verzeichnis der von ihm unter den verschiedensten Professoren Spaniens studierten Werke. Viele von diesen mögen wohl von seinen Lehrern nur als Quellen zitiert worden sein, denn es wäre fast undenkbar, dafs er eine so grofse Zahl von Werken (es sind über 1400 genannt) studiert, ja auch nur gelesen haben könnte; freilich hat er fast sein ganzes Leben (er wurde beinahe 70 Jahre alt) auf Studien an sämtlichen Hochschulen Spaniens verwandt, um sich eine ausreichende Kenntnis beinahe aller Wissenschaften jener Zeit zu erwerben. Ich sage: beinahe aller Wissenschaften, denn Mathematik und Naturwissenschaften hat er nur in sehr bescheidenem Mafse berücksichtigt; ich hatte daher auch nie daran gedacht, in dem Buche den *Liber augmenti et diminutionis* zu finden, und ich habe mich hierin nicht getäuscht; dagegen führt er neun Werke über Erbteilung an und unter diesen befindet sich (p. 264) das Buch der Erbteilungen von Eijûb b. Soleimân, der betreffende Artikel lautet:

„Die Erbteilungen *(el-farâ'iḍ)* von Eijûb b. Soleimân. Ich studierte sie unter dem Scheich Abû'l-Ḥasan 'Alî b. 'Abdallâh b. Mauhib, dieser unter Abû 'Omar b. 'Abdelbarr el-Ḥâfiẓ en-Namirî, dieser unter Abû 'Omar Aḥmed b. 'Abdallâh b. Muḥ. el-Bâǵî, dieser unter seinem Vater, dem Überlieferer Abû Muḥ. 'Abdallâh b. Muḥ. b. 'Alî, dieser unter Abû 'Amr 'Oṯmân b. 'Abderraḥmân b. Abî Zeid, dieser unter Aḥmed b. Ibrâhîm, dieser unter Abû Ǵa'far 'Abdelǵanî b. Abî Aqîl el-Miṣrî, dieser unter Eijûb b. Soleimân."

Es steht nun wohl fest, dafs dieser Eijûb b. Soleimân, der Verfasser des Buches über die Erbteilungen, kein anderer ist als der im

1) Betitelt: *Index librorum de diversis scientiarum ordinibus quos a magistris didicit Abû Bequer ben Khair* (arab.) edid. Fr. Codera et J. Ribera Tarrago, Caesaraugustae 1894—1895.

Liber augmenti et diminutionis genannte Job (= Hiob = Eijûb) filius Salomonis, divisor (d. h. der Erbteiler).

Wann und wo aber hat dieser Eijûb gelebt? Die Lösung dieser Frage ist mir nicht mit voller Sicherheit gelungen; Abû Bekr b. Chair fügt leider nichts über das Leben der Verfasser der von ihm studierten Werke hinzu, er nennt ihn auch nirgendwo sonst als an der zitierten Stelle; in den übrigen mir zu Gebote stehenden biographischen Werken fand ich diesen Gelehrten noch mehrmals zitiert, aber niemals mit irgend einer Zeit- oder Ortsangabe. Was die Zeit anbetrifft, zu der er gelebt hat, so ist diese wohl angenähert zu bestimmen; das nächstliegende war natürlich, die Lebenszeit der in der obigen Stelle angeführten Lehrer der Erbteilung festzulegen. Nach dem II. Bd. der Bibliotheca arabico-hispana[1]) (p. 419) starb Abû'l-Hasan 'Alî b. 'Abdallâh, der Lehrer Abû Bekr b. Chairs, i. J. 532 (1137/38); Abû 'Omar b. 'Abdelbarr starb nach demselben Band (p. 618) i. J. 463 (1070/71)[2]); nach dem I. Bd. der Bibliotheca arabico-hispana (p. 11) starb Abû 'Omar Ahmed b. 'Abdallâh el-Bâĝî i. J. 396 (1005/06); nach dem VII. Bd. desselben Werkes[3]) (p. 200) starb Abû Muh. 'Abdallâh b. Muh. b. 'Alî i. J. 378 (988/89); nach demselben Band (p. 251) starb Abû 'Amr 'Otmân b. 'Abderrahmân i. J. 325 (936/37); nach demselben Band (p. 24) starb Ahmed b. Ibrâhîm el-Faradî (d. h. der Erbteiler) i. J. 290 (903); die Biographie dieses Gelehrten lautet mit Weglassung des für uns Unwesentlichen: „Ahmed b. Ibrâhîm el-Lachmî el-Faradî aus Cordova, mit der Kunje Abû 'Abderrahmân, reiste nach dem Osten und kam bis nach 'Irâq, hörte bei 'Obeîdallâh b. 'Omar b. Meisara el-Qowârîrî (?) u. and. Er trug über die Erbteilungen des Eijûb b. Soleimân vor nach 'Abdelĝanî b. Abî 'Aqîl, und dieser nach Eijûb selbst. Er starb i. J. 290 im Alter von 70 Jahren.“

Dieser Bericht stimmt also vollständig mit dem Schlusse der oben angeführten Stelle aus Abû Bekr b. Chair; es wäre allerdings möglich, dafs der letztere diese Angaben einfach aus dem Werke des Ibn el-Faradî (gest. 403 = 1012/13) abgeschrieben hätte. Von Abû Ĝa'far 'Abdelĝanî b. Abî 'Aqîl befindet sich in den Bänden der Bibliotheca arabico-hispana keine Biographie, weil er eben ein Ägypter war, doch habe ich über ihn im VIII. Bande dieses Werkes (p. 50) folgende Stelle gefunden: „Jahjâ b. 'Abdel'azîz, bekannt unter dem Namen Ibn el-

1) Enthaltend die *Sila* (das Geschenk) des Chalaf b. 'Abdelmelik b. Baškuwâl.

2) Zwischen diesem und dem vorhergehenden Gelehrten ist wohl ein vermittelndes Glied ausgefallen.

3) Enthaltend den *kitâb târich ulemâ' el-andalus* (das Buch der Chronik der Gelehrten Spaniens) von Ibn el-Faradî.

Charrâz, aus Cordova, machte Reisen und hörte in Ägypten den ʿAbdelġanî b. Abî ʿAqîl; er (Jaḥjâ) starb i. J. 295 (907/08)." Wir kennen nun also zwei Schüler des ʿAbdelġanî b. Abî ʿAqîl, den Aḥmed b. Ibrâhîm el-Faraḍî und den Jaḥjâ b. ʿAbdelʿazîz, beide sind zwischen 290 und 300 gestorben; wir dürfen nun ganz wohl annehmen, dafs der Lehrer ʿAbdelġanî nicht viel früher, ja sogar um dieselbe Zeit gestorben sei, denn diese beiden Spanier mögen erst als gereifte Männer nach dem Osten gereist sein. Diese Annahme sind wir nämlich gezwungen zu machen, wenn wir den Eijûb b. Soleimân, den Lehrer des Ägypters ʿAbdelġanî in der Erbteilung, mit den ältesten der in den spanischen Quellen genannten Gelehrten dieses Namen identifizieren wollen. Wir halten nämlich Eijûb b. Soleimân für einen Spanier, trotzdem ein Ägypter unter ihm die Erbrechnung studiert hat; denn viele spanische Araber reisten damals nach dem Osten, studierten dort, liefsen sich dort aber auch für kürzere oder längere Zeit nieder und hielten Vorlesungen über ihr Wissensgebiet, umgekehrt kamen auch ostarabische Gelehrte, besonders Ägypter, nach Spanien, um daselbst ihre Studien zu machen.

Ibn el-Faraḍî[1]) kennt nun in seiner Chronik der Gelehrten Spaniens sechs solche mit dem Namen Eijûb b. Soleimân, aber keiner wird als Verfasser eines Buches über die Erbteilungen genannt[2]), obgleich alle Juristen waren und als solche sich auch mit der Erbteilung befassen mufsten; bei vier derselben reicht das Todesjahr zu weit hinunter, als dafs sie noch Lehrer des ʿAbdelġanî gewesen sein könnten, die zwei ältesten sind die folgenden:

(VII. Bd. p. 77): „Eijûb b. Soleimân aus Toledo, gehörte zu den Rechtsgelehrten; es erwähnt ihn Ibn Ḥâriṯ; el-Râzî sagt, dafs er mit Jaḥjâ b. Qaṭâm und Muḥ. b. Ismâʿîl zusammen in Toledo getötet worden sei im Šauwâl d. J. 293 (906)."

(Ibid): „Eijûb b. Soleimân b. Hâšim b. Sâliḥ[3]), Abû Sâliḥ, von Cordova, aus Jaen stammend, überlieferte nach Abû Zeid ʿAbderraḥmân b. Ibrâhîm b. ʿÎsâ, ʿAbdallâh b. Châlid, Jaḥjâ b. Muzein u. and. Er war ein Imâm nach malekitischem Ritus. Bei Rechtsentscheidungen waren er und Muh. b. ʿOmar b. Lubâba zu ihrer Zeit mafsgebend. Er verfügte auch über grofse Kenntnisse in der Grammatik und Poetik, war

1) Die Verfasser der übrigen Bände der Bibliotheca arabico-hispana kennen keine Gelehrten dieses Namens, die sich nicht auch unter den von Ibn el-Faraḍî genannten befinden.

2) Ich mufs hier bemerken, dafs die Verfasser der acht Bände der Biblioth. arab.-hisp. sehr selten ein bestimmtes Werk eines Gelehrten nennen, sondern nur allgemein angeben, er habe Bücher über das und das Gebiet geschrieben.

3) Im III. Bd. der Biblioth. arab.-hisp. p. 223 steht „b. Ṣâliḥ b. Hâšim."

beredt und von umfassender Bildung. Er war auch Marktaufseher zur Regierungszeit des Emirs 'ABDALLÂH, aus Widerwillen vor den Leuten desselben (des Marktes) trat er von dieser Stelle zurück. Er starb im Muḥarrem 302 (914) oder 301.[1]) Nach ihm überlieferte AḤMED B. MUṬARRIF B. 'ABDERRAḤMÂN.“

Trotz des späten Todesjahres gebe ich dem zweiten EIJÛB B. SOLEIMÂN den Vorzug, er wird in den Quellen noch oft genannt als Lehrer von Juristen und Traditionisten unter dem Namen ABÛ ṢÂLIḤ EIJÛB B. SOLEIMÂN; er ist jedenfalls sehr alt geworden, denn seine beiden Lehrer ABÛ ZEID 'ABDERRAḤMÂN B. IBRÂHÎM und JAḤJÂ B. MUZEIN sind schon 258 (872), bezw. 259 (873) gestorben. Für ihn spricht auch noch der Umstand, dafs er zum Marktaufseher ernannt worden ist, denn hierzu wurden gewöhnlich Leute ausgewählt, die neben juristischen Kenntnissen auch noch Gewandtheit in der Rechenkunst aufzuweisen hatten. Wir müssen uns also vorläufig mit diesem Gelehrten zufrieden geben, obgleich es uns, wir müssen gestehen, verdächtig vorkommt, dafs von ihm gar keine schriftlichen Leistungen erwähnt werden.

Wir kommen nun zu ABRAHAM (arab. IBRÂHÎM), dem Verfasser des *Liber augmenti et diminutionis*. Die Frage, wer dieser ABRAHAM gewesen sei, ist bedeutend schwieriger als die vorhergehende, denn weder der Name des Vaters, noch irgend ein Beiname, noch eine Nisbe ist angegeben. Keiner unter den vielen IBRÂHÎM, welche in den arabisch-spanischen Quellen vorkommen, wird als Verfasser eines solchen Buches genannt, auch nicht einmal als Verfasser eines Buches über Erbteilungen; es ist daher geradezu unmöglich, mit Bestimmtheit zu entscheiden, welcher von den vielen unser ABRAHAM sein mag. Man wird erwarten, dafs dieser ABRAHAM ziemlich später gelebt hat als EIJÛB B. SOLEIMÂN, da eine lateinische Übersetzung eines westarabischen Werkes über Mathematik aus so früher Zeit (c. 900) nicht bekannt ist, ich wage es daher kaum, folgende zwei Gelehrte als mutmafsliche Verfasser unseres Buches aufzustellen:

1) Der in meiner Abhandlung *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (p. 44) genannte IBRÂHÎM B. JÛNIS, bekannt unter dem Namen IBN EL-ḤASSÂB (Sohn des Rechners); er hatte auch den Beinamen „ḤÂRIṮ der Rechenkunst“, und zwar weil er nach R. DOZY unter den Arithmetikern dieselbe Berühmtheit erlangt hatte, wie ḤÂRIṮ BEN 'OBÂD unter den grofsen Männern vor MUḤAMMED. Er gehörte zum Gerichtshof von Qairowân und auch zu den Richtern der Stadt Raqâda. Er starb i. J. 308 (920/21).

1) Die Todesjahrangabe 301 und der Schlufssatz sind aus dem III. Bd. der Biblioth. arab.-hisp. p. 223.

2) Ibrâhîm b. Ahmed b. Moʿâd el-Šaʿbânî aus Cordova, hörte bei Eijûb b. Soleimân, und bei seinem Oheim Saʿd b. Moʿâd und bei Tâhir b. ʿAbdelʿaziz. Er verwandte besondern Fleifs auf das Studium der Rechtsfragen. Er starb i. J. 302 (914/15) (Biblioth. arab.-hisp. VII. Bd. p. 17).

Für den erstgenannten Gelehrten spricht, dafs er einen berühmten Namen in der Rechenkunst hatte, für den zweiten, dafs er ein Schüler von Eijûb b. Soleimân[1]) war. Etwelche Wahrscheinlichkeit für das gröfsere Alter des *Liber augmenti* liegt vielleicht auch in der Thatsache, dafs gerade um den Beginn des 10. Jahrhunderts herum eine Reihe von Erbteilern unter den Juristen Spaniens erscheinen, die zugleich mit der Rechenkunst sich beschäftigt haben, nachher werden Gelehrte dieser Richtung bedeutend seltener. Einer dieser Spätern, der also Diejenigen eher befriedigen wird, welche die beiden erstgenannten Gelehrten als einer zu frühen Zeit angehörend betrachten, ist der auch in meiner Abhandlung (p. 102) genannte Ibrâhîm b. Muh. b. Asah el-Fehmî, Abû Ishâq, von Toledo, ein Schüler von Abû Muh. b. el-Qošârî und Jûsuf b. Asbag b. Chidr, sehr vielseitig gebildet, vor allem in Sprachwissenschaft, Erbteilung und Rechenkunst. Er starb im Saʿbân 448 (1056)[2]) (Biblioth. arab.-hisp. I. Bd. p. 94).

Sicheres wissen wir also über unsern Abraham bis jetzt noch nichts, es ist aber nicht unwahrscheinlich, dafs er mit einem der drei genannten Gelehrten identisch sei; immerhin glauben wir die Frage über Herkunft und Lebenszeit der im *Liber augmenti et diminutionis* genannten Gelehrten der endgiltigen Lösung etwas näher gerückt zu haben, die vielleicht erreicht werden wird, wenn noch andere westarabische Quellen, an denen der Escurial und andere Bibliotheken noch sehr reich sind, an die Öffentlichkeit gelangt sein werden.

1) Es ist dies unzweifelhaft der zweite der oben genannten Gelehrten dieses Namens, er wird noch als Lehrer von einer Reihe von Gelehrten genannt, die in den Jahren 300—350 gestorben sind; bald heifst er Abû Sâlih Eijûb b. Soleimân, bald blofs Eijûb b. Soleimân, sogar nur Abû Sâlih.

2) Der ebenfalls in meiner Abhandlung p. 105 genannte Erbteiler und Rechner Ahmed b. Moğît (gest. 1067) hielt ihm das Leichengebet.

Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts.

Von G. Eneström in Stockholm.

Die Geschichte der Algebra in Deutschland am Ende des 15. und am Anfange des 16. Jahrhunderts ist seit längerer Zeit Gegenstand der Aufmerksamkeit der Forscher gewesen. Schon 1840 veröffentlichte M. W. Drobisch seine wertvolle Monographie über Johannes Widman[1]) und etwa gleichzeitig stellte die Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig für das Jahr 1842 eine hierher gehörende Preisfrage[2]) auf. Diese Preisfrage scheint zwar erfolglos gewesen zu sein, aber etwas später erschienen neue verdienstvolle Beiträge zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fraglichen Zeitraum, z. B. von B. Berlet[3]) und C. I. Gerhardt[4]); eine zusammenfassende Darstellung der Geschichte der deutschen Coss gab dann P. Treutlein im Jahre 1879.[5]) Dafs aber der Gegenstand damit keineswegs erschöpft war, zeigten u. a. neue wichtige Untersuchungen

1) M. W. Drobisch, *De Ioannis Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum* (Leipzig 1840).

2) Da dieselbe die erste von einer wissenschaftlichen Gesellschaft gestellte mathematisch-historische Preisfrage sein dürfte, erlaube ich mir den vollständigen Wortlaut derselben hier mitzuteilen: „Testibus historiae matheseos scriptoribus, „Hutton et Chasles, ab initio saeculi XVI. in Germania status algebrae, si ab aequa- „tionibus tertii ordinis discesseris, tam promotus erat, ut haec doctrina in patria „nostra magis exculta videretur quam in ipsa Italia. Iam vero ex illo tempore quum unici „Christophori Rudolffi Javerani nomen et opera ad nos pervenerint, qui exempla „sua e bibliotheca Vindobonensi hausisse fertur, quaeritur an ante illum iam „cossistae“ „germanici fuerint, qui proprio Marte artem promoverent. Quod ut diiudicetur, „opus erit, ut in MSS. inedita bibliothecarum Norimbergensium, Vindobonensium, „Monacensium aliorumque inquiratur.“

3) B. Berlet, *Die Coss von Adam Riese* (Annaberg 1860, Programm). Berlet hatte schon 1855 eine biographische Arbeit über Riese veröffentlicht.

4) C. I. Gerhardt, *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland.* Monatsber. der Akad. d. Wiss. in Berlin 1867, 39—54; 1870, 141—153. — *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München 1877), S. 46—60.

5) P. Treutlein, *Die deutsche Coss.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 2, 1879.

von E. Wappler[1]), so dafs die neue zusammenfassende Darstellung von M. Cantor im 2. Bande der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*[2]) sehr willkommen war. Aber auch diese Darstellung ward bald in gewissen Punkten veraltet, besonders auf Grund neuer, von M. Curtze herrührender Funde.[3]) Unter solchen Umständen könnte man wohl vermuten, dafs auf diesem natürlich sehr begrenzten Gebiete jetzt fast alles geleistet wurde, was überhaupt zu leisten möglich ist. Aber dem ist gewifs nicht so, denn noch giebt es manche dunkle Punkte, worüber es gar nicht unmöglich sein dürfte, Licht zu verbreiten. Insbesondere scheint es mir, als ob man durch erneute Nachforschungen imstande sein könnte, die Verfasser gewisser anonymer Schriften über die Coss zu ermitteln, und dadurch auch genauere Auskunft zu bekommen über die litterarische Wirksamkeit gewisser Persönlichkeiten, die als hervorragende Cossisten genannt werden, ohne dafs bisher einige von ihnen verfafste Schriften bekannt waren. Einen Versuch in dieser Richtung zu machen ist der Zweck nachfolgender kleinen Untersuchung.

Unter den deutschen Cossisten aus dem Anfange des 16. Jahrhunderts nennt M. Cantor[4]) auch einen Magister Andreas Alexander, welcher ein ganzes Buch über die Coss geschrieben hat. Diese Notiz hat Cantor den von Berlet herausgegebenen Bruchstücken aus der Schrift *Die Coss* von Adam Riese entnommen, und in der That scheinen fast alle Verfasser, welche Andreas Alexander erwähnen, ausschliefslich aus dieser Quelle geschöpft zu haben.

Schon in der „Ankündignng" zu seiner Schrift nennt Riese „denn erfarenenn Mathematicum Magistrum Andream Alexandrum"[5]) als Verdeutscher eines Buches über die Coss, und auch an anderen Stellen gedenkt er derselben Persönlichkeit. In einer Bemerkung zu seinem Exempel 122) berichtet er[6]), dafs der Recheumeister Hans Conrad dem Mönche Aquinas, „von dem auch Andreas Alexander der erfarnste Mathematicus gelernett", für die Auflösung dieses Exempels einen Gulden gegeben hatte, und dem Exempel 143) fügt Riese hinzu[6]), dafs Hans

1) E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert* (Zwickau 1887, Programm).

2) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II (1892), S. 209—229, 359—394. — In der zweiten Auflage ist die Darstellung an einigen Stellen ergänzt.

3) M. Curtze, *Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 7, 1895, 31—74. — *Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum.* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, 435—609.

4) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II[2] (1900), S. 423.

5) Berlet, *Die Coss von Adam Riese*, S. 9. 6) Berlet, a. a. O. S. 30.

6) Berlet, a. a. O. S. 35.

CONRAD „hat obgemeltetem Mathematico 1 fl. in goltt geschenckt, Das er yme solch exempel durch die Coss zu machen geweist hatt.“ Nach BERLET finden sich in der zwischen 1544 und 1559 vollführten Umarbeitung des Buches von RIESE noch ein paar hierher gehörende Stellen. In der Vorrede sagt RIESE[1]), dafs unter seinen Zeitgenossen besonders „ANDREAS ALEXANDER ... wie ir dan in seinem lateinischen schreiben sehen werdet“ die Coss behandelt und verbessert hat; an einer anderen Stelle der Umarbeitung spricht er[2]) von den „exempla ANDREE ALEXANDRI“.

Aus den soeben citierten Notizen geht hervor, dafs ANDREAS ALEXANDER Magister war und bei seinen Zeitgenossen in grofsem Ansehen stand. Da er Schüler von dem Mönche AQUINUS DACUS war, der sich schon vor 1471 mit der Auflösung von Rechenaufgaben beschäftigte[3]), so mufs er wohl ein älterer Zeitgenosse des im Jahre 1492 geborenen ADAM RIESE gewesen sein. Von seinen Lebensumständen erfahren wir sonst nichts aus dem veröffentlichten Stücke der RIESEschen *Coss*, aber GERHARDT nennt ANDREAS ALEXANDER den „Leipziger Mathematiker“[4]), den „Docenten der Mathematik zu Leipzig“[5]), und „Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig“[6]); es ist mir unbekannt, woher GERHARDT diese Angaben entnommen hat.

Nach RIESE scheint ANDREAS ALEXANDER teils eine lateinische Arbeit über die Coss verfafst, teils eine deutsche Übersetzung eines Buches über denselben Gegenstand verfertigt zu haben[7]); die Worte „exempla ANDREAE ALEXANDRI“ beziehen sich wohl auf die eine oder die andere dieser Schriften. BERLET giebt an[8]), dass die erste Arbeit des ANDREAS ALEXANDER mit dem „alten verworffenen Buch“ identisch ist, das RIESE in seiner Widmung nennt[9]), aber an einer anderen Stelle sagt RIESE[10]), dafs er gewisse Lösungen auffand, ehe er „dass alte buch ader [= oder] die exempla ANDREE ALEXANDRI“ gesehen hatte, woraus man wohl ohne weiteres schliefsen kann, dafs die Schrift des ANDREAS ALEXANDER und „das alte buch“ nicht identisch sind. Übrigens hat WAPPLER später bewiesen[11]), dafs „das alte buch“ eben die von WIDMANN verfafste oder von ihm benutzte sogenannte „Dresdener Algebra“

1) BERLET, a. a. O. S. 4. 2) BERLET, a. a. O. S. 27.

3) Vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 238.

4) GERHARDT, *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland.* Monatsber. der Akad. d. Wiss. in Berlin 1867, S. 46.

5) GERHARDT, a. a. O. S. 49.

6) GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, S. 48.

7) TREUTLEIN, a. a. O. S. 12, scheint unsicher zu sein, ob von ANDREAS ALEXANDER mehr als eine Schrift über die Coss herrührt.

8) BERLET, a. a. O. S. 20, Anm. 9) BERLET, a. a. O. S. 10.

10) BERLET, a. a. O. S. 27. 11) WAPPLER, a. a. O. S. 5.

ist. Ob die Schrift des Andreas Alexander sich erhalten hat, weifs man also nicht, und so weit mir bekannt ist, hat man keinen Grund dieselbe mit irgend einer der vorhandenen anonymen Schriften über die Coss zu identifizieren.

Anders dürfte es sich mit der von Andreas Alexander verfertigten deutschen Übersetzung verhalten. Von derselben spricht nämlich Riese auf folgende Weise[1]): „Das Buch von dem ding [ist] auss arabischer In „krichisch gesatzt vonn Archimedo vnd alssdann auss der krichischen sprach „in di lateinische durch Apuleyum vnd Zum letzten Zu vnser ... eins „teyls verdeutst durch denn erfarnenn Mathematicum Magistrum Andream „Alexandrum."

Aber fast dieselbe wundersame historische Notiz findet sich in einer Handschrift aus dem Jahre 1545 in der Universitätsbibliothek zu Göttingen.[2]) Dort heifst es nämlich im „Prologus" „Das Buch von dem Dinge... „ist aus Arabischer Sprach jn kriechisch transferirt von Archimede vnnd „aus kriechisch jn das Latein von Apuleio, ... vnnd laut zu vnserm „Teutschen ... hernach volgt."

Schon durch diesen Umstand wird man versucht anzunehmen, dafs die Handschrift die von Riese citierte Übersetzung des Andreas Alexander enthält. Aber dazu kommen noch andere Umstände, die diese Annahme noch wahrscheinlicher machen, und unter welchen ich hier ein paar hervorheben will. Riese sagt, dafs Andreas Alexander einen Teil des Buches von dem Ding übersetzt hat, und in der That enthält die Göttinger Handschrift nur drei Bücher, obgleich das ganze Werk nach der Inhaltsanzeige acht Bücher umfafst. Riese hat in seiner Arbeit „Acht equaciones Algebre, gezogenn auss seynem ersten Buch" angegeben[3]), und das erste Buch der Göttinger Handschrift, wo der Verfasser des Originals „Algebras" genannt wird, handelt eben „de octo aequationibus et demonstrationibus earundem", wozu noch kommt, dafs die achte Gleichung des Riese mit der achten Gleichung der Handschrift übereinstimmt, während diese Gleichung in keiner der von Riese sonst citierten Quellen sich findet.[4])

Wenn ich also aus den jetzt angeführten Gründen für wahrscheinlich halte, dafs die von Riese citierte Übersetzung des Andreas Alexander in der fraglichen Handschrift enthalten ist, so kann ich nicht umhin einen Umstand hervorzuheben, der vielleicht die Richtigkeit meiner Ansicht verdächtig machen kann. Die Handschrift, der ich Erwähnung gethan habe, ist kürzlich unter dem Titel *Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum* von M. Curtze veröffentlicht worden[5]),

1) Berlet, a. a. O. S. 9.
2) Cod. Gotting. Philos. 30.
3) Berlet, a. a. O. S. 12.
4) Vgl. Cantor, a. a. O. II², S. 423.
5) Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 13, 1902, S. 435—609.



und in der ausführlichen Einleitung findet man nicht die leiseste Andeutung, dafs der Übersetzer mit ANDREAS ALEXANDER oder mit irgend einem anderen bisher bekannten Mathematiker identisch sein kann. Ebensowenig hat sich M. CANTOR in seiner Besprechung der Algebra des INITIUS ALGEBRAS[1]) über die Persönlichkeit des deutschen Übersetzers geäufsert, obgleich er auf gewisse andere „Rätselfragen" aufmerksam macht. Hieraus könnte man vielleicht folgern, dafs sowohl CURTZE als CANTOR, beide hervorragende Kenner auf diesem Gebiete, einen Versuch, den Namen des Übersetzers zu ermitteln, als erfolglos betrachten. Aber trotz dieses Umstandes habe ich nicht darauf verzichten wollen, hier die Gründe für meine Ansicht, dafs dieser Übersetzer eine schon früher bekannte Persönlichkeit ist, den Fachgenossen vorzulegen.

Wenn man also wenigstens vorläufig ANDREAS ALEXANDER als Übersetzer und Kommentator der Algebra des INITIUS ALGEBRAS annehmen darf, so folgt daraus, dafs die von CURTZE herausgegebene Schrift jedenfalls vor 1524 verfafst wurde, während man bisher nur wufste, dafs sie nicht später als 1545 entstanden ist. Die Schrift erlangt dadurch selbstverständlich gröfseres historisches Interesse, aber in keinem Falle dürfte der historische Wert derselben so hoch zu schätzen sein, als die CURTZEsche Einleitung mit den darauf folgenden Bemerkungen anzudeuten scheint. So z. B. legt CURTZE[2]) grofses Gewicht darauf, dafs der Kommentar inbetreff der Auflösung der Gleichungen dritten Grades auf eine Stelle in den jetzt verlorenen Büchern der Algebra des INITIUS ALGEBRAS verweist, und fragt: sollte der Verfasser wirklich diese Lösung besessen haben, und zwar aus arabischer Quelle? Meiner Ansicht nach ist es mit Rücksicht auf den Inhalt des deutschen Kommentars durchaus unwahrscheinlich, dafs es sich hier um die allgemeine algebraische Lösung der kubischen Gleichungen handelt, und mit besonderen Gleichungen 3. Grades haben sich ja schon LEONARDO PISANO[3]), ferner RUDOLFF[4]) und andere Verfasser[5]) beschäftigt. Zu grofs scheint mir auch das Gewicht, dafs CURTZE[6]) auf das Vorkommen einer Methode zur Lösung unbestimmter Gleichungen 1. Grades durch ganze Zahlen legt, da wesentlich dieselbe Methode sich schon bei LEONARDO PISANO findet. In einem Anhang zu seiner Schrift *Flos* behandelt nämlich LEONARDO[7]) eine Auf-

1) Deutsche Litteraturz. **23**, 1902, Sp. 2676—2677.

2) CURTZE, a. a. O. S. 441, 540.

3) Vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 46.

4) Vgl. CANTOR, a. a. O. II², S. 426—427.

5) Vgl. CANTOR, a. a. O. I² (1894), S. 736—738; II², S. 160—162.

6) CURTZE, a. a. O. S. 447, 573—574.

7) LEONARDO PISANO, *Scritti ed.* BONCOMPAGNI II (1862), S. 247; vgl. CANTOR, a. a. O II², S. 50—51.

gabe, die auf die Gleichungen (1) $x + y + z = 30$, (2) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30$ hinauskommt, und benutzt dabei ein methodisches Verfahren, das zu einem Resultate führt, welches wir durch die Gleichung $y + 10z = 120$ ausdrücken können. Aber diese Gleichung wird ja erhalten, wenn man Gl. (1) mit 2 und Gl. (2) mit 6 multipliciert und dann die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert; in der That kann Leonardos Verfahren als eine versteckte Ausführung dieser Operationen angesehen werden. Darauf teilt Leonardo 120 in zwei Teile derart, daſs der erste Teil durch 1 und der zweite Teil durch 10 dividiert werden kann, also in Übereinstimmung mit der Darstellung von Curtze in der Anmerkung S. 573—574. Auch Leonardo wuſste[1], daſs die Lösung möglich ist, wenn die zwei gegebenen Zahlen nicht gleich sind, denn er behandelt auch eine Aufgabe, die zu den Gleichungen $x + y + z = 15$, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 16$ führt. Wenn also Curtze S. 447 sagt, daſs mindestens 66 Jahre vor Bachet de Méziriac solche Aufgaben methodisch gelöst worden sind, so kann man wohl hier ohne weiteres 400 statt 66 setzen.

Auch in bezug auf andere im deutschen Kommentar zur Algebra des Initius Algebras enthaltene Methoden oder Sätze wäre es nützlich gewesen, wenn der Herausgeber auf ihr Vorkommen bei älteren Verfassern aufmerksam gemacht hätte. So z. B. wäre es vielleicht angebracht S. 448 zu bemerken, daſs schon Omar Alkhayami[2]) ähnliche Formeln für $\sqrt[n]{a^n + b}$ gekannt haben dürfte, S. 497 hinsichtlich der 8. Gleichung auf Alkarchi zu verweisen[3]) und S. 546 hinzuzufügen, daſs schon Leonardo Pisano wuſste[4]), man brauche nur bis zur Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl die Divisionen fortzusetzen, wenn man untersuchen will, welches die Divisoren dieser Zahl sind.

Zum Schluſs erlaube ich mir noch einmal darauf hinzuweisen, daſs ich nicht behaupte durch die vorangehende Untersuchung bewiesen zu haben, daſs Andreas Alexander mit dem deutschen Übersetzer und Kommentator der Algebra des Initius Algebras identisch ist, sondern daſs ich dies nur als sehr wahrscheinlich hingestellt habe. Es wäre darum erwünscht, daſs meine Annahme durch neue Nachforschungen über die Lebensumstände des Andreas Alexander bestätigt werden könnte.

1) Leonardo Pisano, a. a. O. II (1862), S. 248.
2) Vgl. Cantor, a. a. O. I² S. 732.
3) Vgl. Cantor, a. a. O. I² S. 727.
4) Leonardo Pisano, a. a. O. I (1857), S. 38.

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnelschen Wellenfläche.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

1. Die Fresnelsche *Wellenfläche* war bereits 1881 Gegenstand einer historischen Monographie von Böklen [5].[1]) Der vorliegende Bericht stellt sich die Aufgabe, diese Arbeit zu ergänzen und bis zur Gegenwart fortzuführen, wobei insbesondere auf die geometrischen Eigenschaften Rücksicht genommen wird; übrigens erstreckt sich das beigegebene möglichst vollständige Litteraturverzeichnis auch auf die physikalischen Anwendungen der Fläche. Die Wellenfläche, der Ort der Punkte, in welche eine von einem Punkt ausgehende, in einem doppelt brechenden Medium sich fortpflanzende Welle zu einer bestimmten Zeit gelangt ist, wurde von Fresnel [1] zuerst angegeben, der seine Arbeit am 26. XI. 1821 der Pariser Akademie vorlegte. Die Hauptfortschritte in ihrer Theorie verdankt man Hamilton, Mac Cullagh, Walton, Niven, Böklen, Darboux und vor allem Mannheim, der über 20 Arbeiten derselben gewidmet hat. Bei den ältesten Autoren heifst die Fläche oft nur die *Welle* (l'onde, the wave); Hamilton nannte sie wohl am zutreffendsten *Surface of ray velocities*, Mac Cullagh [2] *biaxal surface*. Doch findet sich der Name *surface de l'onde* schon bei Fresnel ([1] S. 69).

2. Sind $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, die Hauptbrechungskoeffizienten des Mediums, so heifst die Fläche

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

Ergänzungsellipsoid (auch Konstruktionsellipsoid oder erstes Ellipsoid (nach Plücker [1]). Ferner ist dann die Gleichung der Wellenfläche:

$$W \equiv \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} - 1 = 0 \tag{2}$$

oder

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - [a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(c^2+a^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2] + a^2b^2c^2 = 0. \tag{2'}$$

1) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den „Litteraturnachweis“ am Ende des Aufsatzes.

Die Herleitung dieser Gleichung, insbesondere von der später zu erwähnenden Wellengeschwindigkeitsfläche ausgehend, auf die einfachste Weise zu bewirken, bemühten sich zahlreiche Mathematiker: Fresnel [2][3], Ampère [1] [2], Cauchy [2] [4], Senf bei F. Neumann [2], Hamilton [1] [2], Mac Cullagh [2], Smith [1] [2], Sylvester [1], Lubbock [3], Galopin-Schaub [1]. Cauchy [4] behauptet, dafs auch von Ettingshausen eine Lösung dieser Aufgabe gegeben habe; Lubbock [1] glaubte irrtümlich, dafs die Flächen von Fresnel und Cauchy von einander verschieden seien. Eine andere Form der Gleichung ist:

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0 \qquad (2'')$$

eine dritte gab Tait [2]:

$$\frac{x^2}{b^2c^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)}+\frac{y^2}{c^2a^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)}+\frac{z^2}{a^2b^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)}=0. \qquad (2''')$$

Die Gleichnng in *Ebenenkoordinaten* findet sich z. B. bei Beer [3], Frosch [1] und Kolaček [1]; vermittelst der *singulären* Ebenen wurde die Fläche von Booth [1] ausgedrückt. Hamilton [2] und Sylvester [1] gaben die *Radioangulargleichung*, in welcher der Radiusvektor als Funktion seiner Winkel mit den optischen Achsen erscheint. W. Roberts (bei Salmon [1], p. 288) und Cayley [5] drückten die Fläche vermittelst Laméscher elliptischer Koordinaten aus; die Quaternionengleichung wurde von Tait [1] und Hamilton [4] aufgestellt.

Irrationale Parameterdarstellungen der Koordinaten finden sich bei Catalan [2] und Cayley [6]. Von der durch Weber [1] eingeführten Parameterdarstellung vermittelst *elliptischer Funktionen*, wobei die sphärischen und ellipsoidischen Linien Parameterkurven sind, machten Sophie von Kowalewski [1], Volterra [1] und Lacour [1] [2] Gebrauch. Sophie von Kowalewski [1] und Weber [2] machten darauf aufmerksam, dafs hierbei den beiden Mänteln der Fläche verschiedene Parameterdarstellungen zukommen. Bricard [1] drückte die Koordinaten des Tetraedroids durch elliptische σ-Funktionen aus.

3. Die Fläche ist von der 4. Ordnung und von der 4. Klasse. Ihre Stellung im System der F_4 wurde von Rohn [1] angegeben; sie gehört zum Typus IVa seiner Einteilung. Als *Kummersche Fläche* mit 16 Knotenpunkten und zwar der speziellen Klasse der *Tetraedroide*, von Cayley [1] eingeführt, angehörig, nimmt sie teil an den Eigenschaften dieser wichtigen Flächenklassen. Die *Schnitte* der Fläche mit den Koordinatenebenen zerfallen, wie schon Fresnel [1] [2] [3], Ampère [1] [2] und Smith [3] bemerkten, je in einen Kreis (*Hauptkreis*) und eine Ellipse (*Hauptellipse*).

Im Unendlichen, wo die Fläche imaginär ist, geht sie durch den unendlich fernen Kugelkreis und durch den unendlich fernen Kegelschnitt des *Polarisationsellipsoids* (zweites Ellipsoid nach PLÜCKER; *Indikatrix* nach FLETCHER):

$$E \equiv a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0, \tag{3}$$

das die Hauptbrechungskoeffizienten als Achsen hat und zum Ergänzungsellipsoid polarreziprok ist. So entstehen in jeder Fundamentalebene 4 *Knotenpunkte* (*singuläre Punkte*) der Fläche. Von denselben sind jedoch nur die 4 in der Ebene $y = 0$ liegenden als Schnitt von Hauptkreis und Hauptellipse (cf. MANNHEIM [10]) reell, wenn $a > b > c$ ist. Dieselben wurden von AMPÈRE [1] [2] und HAMILTON [1] entdeckt. Die Tangentialkegel in denselben können keine Drehungskegel sein (FROSCH [1]). PRESCOTT [1] und CATALAN [2] zeigten, dafs die Kreisschnittebenen senkrecht stehen auf dem Radius des hindurchgehenden Hauptkreises (sog. *sekundäre optische Achsen*, von SYLVESTER [1] primi radii, von FLETCHER [1] biradials genannt) und auf der Normalen der hindurchgehenden Hauptellipse. Nach BOOTH [1] berühren die Tangentialkegel der 4 singulären Punkte einer Hauptebene alle dasselbe Ellipsoid. Bei der liniengeometrischen Definition der Wellenfläche (PAINVIN [1] [2]) entsprechen den singulären Punkten in Doppelebenen ausartende Kegel des erzeugenden Komplexes. Nach NIVEN [1] und MANNHEIM [23] liegen die Fufspunkte der Ursprungslote auf die Tangentialebenen eines Tangentialkegels auf einem Kreis. Die Kreisschnittebenen des Normalenkegels in einem singulären Punkt stehen nach LACOUR [1] senkrecht auf der betreffenden Hauptachse, und sind parallel zu den gemeinsamen Tangenten von Hauptkreis und Hauptellipse in dieser Ebene. CLIFTON [1] hat darauf aufmerksam gemacht, dafs die Wellenfläche in der Nähe eines singulären Punktes annähernd durch einen Wulst von geringer Excentrizität ersetzt werden kann; die betreffenden Gebiete werden von BOOTH [2] „basins" genannt.

4. Polarreziprok (nach DURRANDE [2]) zu den 16 singulären Punkten sind die 16 *singulären Ebenen*, welche zu den Hauptebenen senkrecht stehen und die Fläche längs (doppelt zählenden) Kreisen berühren, von denen jedoch auch nur die 4 senkrecht zur Ebene $y = 0$ stehenden reell sind. Die Ursprungslote auf die reellen singulären Ebenen heifsen *wahre optische Achsen* („prime normals" nach SYLVESTER [1], „binormals" nach FLETCHER [1]); sie gehen durch die Mittelpunkte der Berührungskreise. Die singulären Ebenen, deren Entdeckung SMITH [3], der die Lage und Gröfse des Berührungskreises untersuchte, GREATHEED zuschreibt, finden sich ebenfalls bereits bei HAMILTON [1]. Nach LACOUR [1] liegt jeder Berührungskreis mit einem Hauptkreis auf einer Kugel. Die Komplexkegel-

schnitte in den singulären Ebenen arten in Doppelpunkte aus (Painvin [1] [2]); die Ebenen parallel zu den singulären schneiden nach Mannheim [10] [12] die Fläche in anallagmatischen C_4. Dafs die Wellenfläche aufser den Knotenpunkten keine Doppelkurve besitzen kann, zeigte Larmor [1], nachdem schon Stokes [1] bewiesen hatte, dafs aus optischen Gründen der Rand einer etwaigen Vertiefung der Fläche eben sein müsse. Die *Nabelpunkte* der Fläche bestimmten Galopin Schaub [2] und Mannheim [14] [17] p. 334, welch' letzterer zeigte, dafs die 8 Punkte des Ergänzungsellipsoids, für welche die Strecke der Hauptkrümmungscentra vom Mittelpunkt unter rechtem Winkel erscheint, auf die Nabelpunkte der Wellenfläche führen. Vgl. über diese Punkte auch noch Böklen [3] und de Salvert [1].

5. Die Wellenfläche besteht aus *zwei Mänteln*, welche in den Knotenpunkten aneinanderstofsen. Zech [1] gab eine anschauliche *gestaltliche Beschreibung* der Fläche, vgl. auch Lamé [1] und Catalan [2]. Rohn [1] zeigte, dafs die Fläche zwei elliptisch gekrümmte Gebiete besitzt, von denen eines durch die 4 Tangentialkegel der Knotenpunkte, das andere durch die 4 Berührungskreise begrenzt ist. Je ein Kegel und ein Kreis schliefsen ein hyperbolisch gekrümmtes Gebiet ein (vgl. auch Schuh [1]). Beer gab bereits eine Abbildung eines *Kartonmodells* der Fläche; ferner hatte damals (1853) Soleil in Paris ein *Gypsmodell* des zwischen beiden Mänteln der Fläche liegenden Raumteils hergestellt, und Plücker besafs ein von Magnus verfertigtes *Holzmodell* der Fläche. Hicks [1] gab später ein Verfahren an, um die Fläche vermittelst weniger ebener Schnitte zu modellieren; das Modell befindet sich im „Cavendish physical laboratory" in Cambridge. Endlich ist eine Darstellung der Fläche vermittelst der sphärischen und ellipsoidischen Linien von Böklen [4] ausgeführt und von L. Brill (Darmstadt) in den Handel gebracht worden.

6. Die *sphärischen* und *ellipsoidischen* Linien der Wellenfläche finden sich zuerst bei Hamilton [1] und Sylvester [1]. Erstere sind die Schnitte der Wellenfläche mit einer Schaar konzentrischer Kugeln; nach Catalan [2] werden sie, je nachdem sie auf dem $\left|\begin{matrix}\text{äufseren}\\ \text{inneren}\end{matrix}\right|$ Mantel der Fläche liegen, durch konfokale $\left|\begin{matrix}\text{ein-}\\ \text{zwei-}\end{matrix}\right|$ schalige Hyperboloide ausgeschnitten, sind daher sphärische Kegelschnitte. Die ellipsoidischen Linien sind die Orthogonaltrajektorien der sphärischen (Lamé [1] p. 264); sie werden durch Ellipsoide ausgeschnitten, welche zu den erwähnten Hyperboloiden konfokal sind. Nach Böklen [1] und Mannheim [19] schneidet ein Ursprungskegel, der eine sphärische Linie des einen Mantels projiziert, den andern Mantel in einer ellipsoidischen Linie. Die Ursprungskegel, welche die

spärischen und ellipsoidischen Linien projizieren, sind konfokal mit den sekundären optischen Achsen als Fokallinien. Ebenso fallen auch die Projektionen der sphärischen Kurven des einen Mantels auf eine Hauptebene mit den Projektionen der ellipsoidischen Linien des andern Mantels zusammen; die Projektionen sind nach BÖKLEN [2] affin zu konfokalen C_2. Die Tangentialebenen, welche durch die Tangenten des äufseren Mantels an den inneren gelegt werden, berühren eine konzentrische Kugel (BÖKLEN [6]). TAIT [1] gab die Gleichung der sphärischen und ellipsoidischen Linien in Quaternionen; wie bereits bemerkt, sind sie auch Parameterlinien in der Darstellung durch elliptische Funktionen. VOLTERRA [1] gab einen Überblick über die Verteilung der Parameterwerte auf beiden Mänteln und über die auftretenden Unstetigkeiten. WEBER [2] bemerkte, dafs die sphärischen und ellipsoidischen Linien eine nichtkonforme Abbildung der Wellenfläche auf das Ergänzungsellipsoid vermitteln. BÖKLEN zeigte, dafs bei jedem aus je einem Paar sphärischer und ellipsoidischer Kurven gebildeten *Viereck* auf der Fläche die Abstände einer Hauptebene von den vier Ecken, sowie von den Durchdringungspunkten von je vier zu zwei Gegenseiten gehörigen Tangenten dieser Linien mit einer andern Hauptebene in Proportion stehen. Ferner sind in einem solchen Viereck die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich; die Entfernung eines Punktes der Wellenfläche vom Endpunkt der sekundären optischen Achse ist gleich dem Abstand der Schnittpunkte der durch den Punkt gehenden sphärischen und ellipsoidischen Linie mit einer Hauptebene. In GILBERTS [1] Theorie der Apsidalflächen treten die ellipsoidischen Linien als *Attraktionslinien* auf, d. h. ihre Tangenten liegen in der *Meridianebene*; so heifst die Ebene durch Radiusvektor und Flächennormale der Wellenfläche. Dafs die genannten Linien *Schwingungslinien* in der FRESNELschen Theorie der Doppelbrechung sind, haben HAMILTON [1], SYLVESTER [1] und WALTON [2] bemerkt. PAINVIN [2] untersucht die Developpablen der Tangenten der ellipsoidischen Linien; ZECH [2] [3] die *Developpablen*, welche zu den sphärischen und ellipsoidischen Linien in Bezug auf das Direktionsellipsoid (siehe unten) polarreziprok sind. DURRANDE [2] zeigte, dafs die Tangentialebenen der zu einer ellipsoidischen Linie polarreziproken Developpabeln die Kugel berühren, welche die auf demselben Ursprungskegel wie die ellipsoidische Linie gelegene sphärische Kurve ausschneidet. MANNHEIM [21] betrachtet in einer mir leider unzugänglichen Arbeit Kegel, welche anallagmatische Kurven aus der Wellenfläche ausschneiden. Nach PAINVIN [1] [2] schneidet die Wellenfläche das Ergänzungsellipsoid in der imaginären Kurve, welche dasselbe mit der Kugel gemein hat, von deren Punkten aus drei aufeinander senkrechte Tangentialebenen an das Ellipsoid gehen (*orthoptische* Kugel). HUMBERT [2]

untersuchte die Gattungen der auf der Wellenfläche (resp. dem Tetraedroid) möglichen algebraischen Kurven.

7. Über *Durchmesser* und *Diametralebenen* der Wellenfläche sind zahlreiche Sätze, von denen einige, in optischer Einkleidung, sich schon bei Walton [9] finden, von Mannheim mitgeteilt worden. Einige derselben finden sich in der Arbeit [4]; in [6] zeigt Mannheim, dafs, wenn ein Ursprungslot auf einer Meridianebene durch Radius OM und Normale MN die Mäntel der Fläche in M_1 und M_2 trifft, die Gröfse $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2}$ konstant, d. h. von der Wahl des Punktes M unabhängig ist. In [11] stellt Mannheim folgenden Satz auf: Werden senkrecht zu den Spuren der Meridianebene OMN in den Hauptebenen Diametralebenen konstruiert, so bestimmen diese auf der Normalen MN proportionale Stücke. Die Strahlenschiefe, d. h. der Winkel zwischen Normale und Radiusvektor wurde von Sylvester [1] bestimmt, die Strahlen gröfster Schiefe von Walton [3]. Dieselben liegen in der Ebene $y = 0$; sind resp. φ, χ, ψ die Neigungen der x-Achse gegen die wahre und die sekundäre Achse und gegen einen solchen Strahl, so ist

$$\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi.$$

Soret [1] zeigte, unter Zugrundelegung eines Beweises von Cellérier, dafs die Maxima und Minima der Fufspunktkurven der Diametralschnitte in dieselben Radien fallen, wie die Maxima und Minima dieser Schnitte selbst.

8. Die zur Wellenfläche in Bezug auf die Einheitskugel *polarreziproke* Fläche ist ebenfalls eine Wellenfläche W' und wurde von Hamilton [1] *surface of components* (of normal slowness) genannt. Dafs viele Autoren Hamilton den Namen „surface of wave slowness" (Wellenlangsamkeitsfläche, nach Galopin-Schaub [2]: „surface de l'onde lente") zuschreiben, läfst vermuten, dafs dieselben ebensowenig wie Plücker Hamiltons Originalarbeit vor sich gehabt haben können, sondern nur das Referat von Lloyd [1]. Die Fläche hat noch andere Namen bekommen: Mac Cullagh [2] *surface of refraction*, später [3] [4], wo er eine Konstruktion angab, *index-surface* (cf. Tait [2]); Cauchy [3], der als ihr Konstruktionsellipsoid das von ihm eingeführte Polarisationsellipsoid benützte, *surface caractéristique*. Indefs zeigte Plücker [1], dafs die Wellenfläche zu sich selbst polarreziprok (autopolar) ist in Bezug auf ein Ellipsoid

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ca} + \frac{z^2}{ab} - 1 = 0, \tag{4}$$

das er *Direktionsellipsoid* („ellipsoide directeur") nannte. Beweise dieses Satzes finden sich bei Tait [2], Durrande [2], Catalan [2], Town-

SEND [1], NIVEN [3]. Dabei heifsen nach LAMÉ [1], p. 247 ein Punkt der Wellenfläche und der Berührungspunkt seiner Polarebene in Bezug auf das Direktionsellipsoid *konjugierte Punkte*. DARBOUX [2] zeigte, dafs die Wellenfläche in Bezug auf $10 F_2$ autopolar ist (aufser dem Direktionsellipsoid drei imaginäre Mittelpunktsflächen, die schon PLÜCKER kannte, und sechs Paraboloide). Die Indexfläche ist autopolar in Bezug auf das zum Direktionsellipsoid polarreziproke Ellipsoid.

9. Die *Fufspunktfläche* der Wellenfläche

$$V \equiv \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} = 0 \qquad (5)$$

oder

$$(x^2+y^2+z^2)^3 - (x^2+y^2+z^2)\left((b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2\right) - (b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2) = 0 \qquad (5')$$

heifst *Wellengeschwindigkeitsfläche* und ist zu W' invers (BRILL [2] [3]). Sie ist namentlich von CATALAN [2], der sie als Ort sphärischer Kegelschnitte erkannte, aber irrtümlicher Weise für die Indexfläche von MAC CULLAGH hielt, und von BÖKLEN [3] [5] untersucht worden; siehe auch PAINVIN [2]. BOOTH [2] erwähnt auch die zweite Fufspunktfläche der Wellenfläche, sowie deren erste negative Fufspunktfläche, von welcher schon früher Lord RAYLEIGH (= W. STRUTT) [1] nachgewiesen hatte, dafs sie die Enveloppe der Ebenen ist, welche parallel zu den Zentralschnitten des Polarisationsellipsoids in Abständen gleich den Achsen desselben gelegt werden, dafs sie ferner vom 16. Grad ist und als Approximation der Wellenfläche dienen kann. Die Fufspunktfläche des Ergänzungsellipsoids, welche gewöhnlich *Elastizitätsfläche* heifst, ist eine ebenfalls von FRESNEL [1] S. 67 entdeckte, zur Wellenfläche apsidale (CATALAN [2]) F_6:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0, \qquad (6)$$

welche vielfach untersucht worden ist (z. B. von MAGNUS [1], GALOPIN-SCHAUB [2], DURRANDE [2], LACOUR [2]), auch in Bezug auf physikalische Anwendungen (BENTZIEN, Diss. Greifswald 1881; ZIMMERMANN, Diss. Göttingen 1881; DOORMANN, Diss. Göttingen 1882; F. HAUGER, Diss. Greifswald 1886; RIEDEL, Diss. Leipzig 1891); ihre Parallelflächen sind von E. HUTT (Pr. Tilsit 1868) komplaniert worden.

10. Für die *Tangentialebene* gab DARBOUX [2] folgende Konstruktion: N sei ein Punkt der Wellenfläche, M_1 der Schnitt seiner Polarebenen in Bezug auf $3 F_2$ durch die vier singulären Punkte im Unendlichen und durch die vier singulären Punkte in einer Hauptebene; M_2 der Schnitt seiner Polarebenen in Bezug auf $3 F_2$ durch die acht singulären Punkte in den andern Hauptebenen; so ist $M M_1 M_2$ Tangentialebene und $M M_1$,

MM_2 konjugierte Tangenten. In [2] bewies Mannheim folgenden Satz: Legt man parallele Tangentialebenen an das Ergänzungsellipsoid und an beide Mäntel der Wellenfläche, so schneiden die Durchmesser durch die drei Berührungspunkte und der Durchmesser senkrecht zur Ebenenstellung jede der drei Ebenen in Punkten eines Rechtecks. Die *Normalenkonstruktion* gab Mannheim schon in [1]. Nach Sylvester [1] sind die zwei zu einem Radius gehörigen Meridianebenen auf einander senkrecht; ebenso die zwei zu einer Normalenrichtung gehörigen Meridianebenen. Jede Meridianebene halbiert den Winkel zwischen den Ebenen durch ihren Radius und die sekundären optischen Achsen, ebenso den Winkel der Ebenen durch ihre Normale uud die wahreu optischen Achseu. In [22] betrachtet Mannheim Normalen in den Punkteu einer Flächenkurve; in [5] und [13] abwickelbare Normalenflächen. In [4] zeigt er: Schneidet das Lot vom Mittelpunkt o auf die Normale des Punktes m_1 der Wellenfläche diese Fläche in a_1 und b_1, ist ferner t_1 Fufspunkt des Lots von o auf die Tangentialebene in m_1, so sind $oa_1^2 + ob_1^2 + om_1^2$ und $oa_1 \cdot ob_1 \cdot ot_1$ von der Wahl des Punktes m_1 unabhängig. Böklen [7] betrachtete das oskulierende Ellipsoid der Wellenfläche mit Anwendung auf den Vorgang des Sehens. Das *Bogenelement* wurde von Combescure [1], Cayley [6] und Weber [2] gegeben. Konstruktionen der *Krümmungsmittelpunkte* sind von Mannheim [1] [15] [17] p. 332 [20] und Niven [3] mitgeteilt worden. Ersterer gab auch in [20] die *Indikatrix* und in [1] und [20] die *Hauptschnitte* (Richtungen der Krümmungslinien) an, (siehe auch Tait [1]) und bestimmte den Winkel, unter welchem die Strecke der Hauptkrümmungszentra vom Mittelpunkt erscheint (eine bemerkenswerte Differentialinvariante der dreigliedrigen Rotationsgruppe des Raumes). Die *Hauptkrümmungsradien* sind auch von Cayley [6] berechnet worden. Die *Centrafläche* wurde von Combescure [1], Cayley [6] und Böklen [10] untersucht. Die beiden letzteren bestimmten insbesondere die Kuspidalkurven derselben; es sind C_6 resp. C_4. Cayley [6] vermutet, dafs die Centrafläche von der 38. Ordnung ist.

11. Über der Bestimmung der *Krümmungslinien* der Wellenfläche waltete ein eigentümlicher Unstern. Zech [3] glaubt dieselben in den Berührungskurven der zu den sphärischen und ellipsoidischen Kurven polarreziproken Developpablen gefunden zu haben. Zwar nahm er in [4] diese Behauptung, deren Unrichtigkeit er erkannt hatte, zurück, aber bereits hatte Cayley in einem Referat [2] über die Arbeiten Zechs die angebliche Entdeckung weiter verbreitet und ehe derselbe in [3] von dem Widerruf Zechs Kunde geben konnte, machten sich Bertrand [1], Brioschi [1] und Combescure [1] an die Widerlegung der irrtümlichen Behauptung. Dazwischen kam noch Rouché [1] mit einer Mitteilung an

die französische Akademie, dafs er die Krümmungslinien der Wellenfläche gefunden habe; doch auch er mufste diese Behauptung wieder zurückziehen. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wurde nun weiter von COMBESCURE [1], BRIOSCHI [1], CAYLEY [1], der die Hauptschnitte als Krümmungslinien erkannte, und DARBOUX [4] [6] [7] untersucht. Ersterer vermutete, ihr Integral werde im allgemeinen algebraisch sein; DARBOUX [4] bestritt dies dagegen ausdrücklich auf Grund der Entdeckung, dafs dasselbe in einem Grenzfall (kugelähnliche Wellenfläche bei cylinderähnlichem Ergänzungsellipsoid) nicht algebraisch ist. Doch ist dieser Schlufs von einem Grenzfall auf den allgemeinen Fall natürlich nicht zwingend, und man weifs daher heute noch nicht, ob die Krümmungslinien der Wellenfläche algebraisch sind. Übrigens können dieselben in der Nähe der Nabelpunkte mit algebraischen Kurven 10. Ordnung verwechselt werden (DARBOUX [4]). Noch einmal sollten die Krümmungslinien zu einem Irrtum Anlafs geben, indem AUGUST in einem Referat (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **14** [1882], 696) BÖKLEN [6] die Behauptung zuschrieb, er habe im Gegensatze zu DARBOUX [4] algebraische Kurven, nämlich die ellipsoidischen Linien, für Krümmungslinien der Wellenfläche gehalten. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dafs BÖKLEN nur behauptet hatte, diese Kurven seien Krümmungslinien der Ellipsoide, welche dieselben ausschneiden. Dieser letztere Satz findet sich schon bei CATALAN [1], ebenso bei MANNHEIM [19], der noch bemerkt, dafs auch die sphärischen Kurven Krümmungslinien der ausschneidenden Hyperboloide sind. PAINVIN [3] bemerkt ausdrücklich, dafs die Krümmungslinien der Ellipsoide *nicht* Krümmungslinien der Wellenfläche sind.

12. Die *Asymptotenkurven* der Wellenfläche, welche nach ROHN [1] keine Inflexionstangenten besitzen, sind von DARBOUX [4] [6] [7] untersucht worden. Er machte darauf aufmerksam, dafs die Asymptotenkurven des Tetraedroids bereits von LIE (Comptes rendus Paris **71**, 1870, 579—583; vgl. auch KLEIN und LIE, Monatsber. Ak. Berlin 1870, 891—899) bestimmt und als algebraische Kurven 16. Ordnung und Klasse erkannt worden waren und gab ihren Zusammenhang mit der liniengeometrischen Erzeugung der Fläche vermittelst eines CHASLESschen Komplexes an. Alle Tangentialebenen nämlich in den Punkten einer Asymptotenkurve berühren die Kegel, deren Spitzen resp. ihre Berührungspunkte sind und deren Erzeugende das Tetraeder der vier Fundamentalebenen (inkl. der unendlich fernen) in einem von der Wahl der Asymptotenkurve abhängenden konstanten Doppelverhältnis schneiden. Die Differentialgleichung der *geodätischen Linien* ist von COMBESCURE [1] und CAYLEY [6] aufgestellt worden.

13. Die *Kubatur* der Wellenfläche wurde von W. Roberts [1] [2] vermittelst elliptischer Integrale 1. und 2. Gattung ausgeführt. Glaisher [1] gab das Volumen des Tangentialkegels in einem singulären Punkt bis zur Polarebene dieses Punkts in Bezug auf das Ergänzungsellipsoid. Die Komplanation der Fläche ist noch nicht ausgeführt worden, ebensowenig Schwerpunktsbestimmungen.

14. *Erzeugungen* der Wellenfläche als *Ort von Punkten:*

a) Konstruktion von Fresnel [1] [2] [3]: Wellenfläche als Ort der Endpunkte der Lote, welche im Mittelpunkte auf den Centralschnitten des Ergänzungsellipsoids errichtet und gleich den Achsen dieser Schnitte gemacht werden. Vgl. auch Mac Cullagh [1] und Walton [7], der bemerkt, dafs die Tangentialebenen in den beiden so entstehenden Flächenpunkten einander parallel sind. S. Roberts [1] hat diese Konstruktion verallgemeinert, indem er auf den Loten statt der Länge r einer solchen Achse die Strecken $\sqrt{\frac{r^2}{kr^2+1}}$ oder $\sqrt{\frac{r^2}{kr^2-1}}$ abtrug und damit wieder auf eine Wellenfläche kam.

b) Konstruktion als *Apsidalfläche*. Dieselbe geht auf Mac Cullagh [2] zurück, doch stammt die eigentliche Theorie von Catalan [1] [2]. Die Wellenfläche ist eine Apsidalfläche des Ergänzungsellipsoids, d. h. auf jeder Meridianebene dieses Ellipsoids wird im Mittelpunkt ein Lot gleich dem Radiusvektor des Ellipsoids errichtet, so ist der Ort der Endpunkte dieser Lote eine Wellenfläche. Siehe ferner Niven [3], Darboux [7] und „Un Abonné“ [1], wo eine Verallgemeinerung, indem das Lot gleich einer Funktion des Radiusvektors gemacht wird.

c) Die Erzeugung von Walton [1] durch die ellipsoidischen Linien, deren jede alle drei Hauptkreise schneiden mufs, und welche als Schnitte von Umdrehungscylindern oder von Drehflächen zweiter Ordnung erscheinen. Ebenso läfst Durrande [4] die Wellenfläche durch ihre sphärischen Kurven erzeugen, welche [2] als Supplementarkegelschnitte der sphärischen Kegelschnitte des Ergänzungsellipsoids auftreten (siehe auch Catalan [2] und W. Roberts bei Salmon [1] p. 331).

d) Nach dem Zeugnis von Geiser [1] und Weierstrass (bei Steiner [1] p. 724, 742) stellte Steiner 1860 die Aufgabe nach dem Ort der Punkte, von welchen aus an ein Ellipsoid Tangentialkegel mit einem rechtwinkligen Hauptschnitt gehen. Weierstrass fand, dafs man eine Wellenfläche erhält; doch ist das gegebene Ellipsoid nicht Ergänzungsellipsoid derselben; vielmehr, wenn ersteres die Achsen a, b, c hat, sind diejenigen des letzteren $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$. Vgl. ferner Lampe [1], der die Erzeugungsweise zuerst publiziert zu haben scheint, Mannheim [16] [19], Böklen [8] und Haas [1], der allgemein die Frage nach

dem Spitzenort der ähnlichen Tangentialkegel des Ellipsoids untersuchte. GEISER findet übrigens das Ergänzungsellipsoid der Wellenfläche als Bestandteil des Orts. MANNHEIM [16] definiert die Wellenfläche auch als Ort der Spitze eines rechten Winkels, dessen Schenkel ein Ellipsoid berühren und dessen Ebene in den Berührungspunkten auf der Fläche senkrecht steht (siehe auch S. ROBERTS [1]), oder wie sich MANNHEIM (a. a. O.) auch ausdrückt: Projiziert man ein Ellipsoid normal auf eine Tangentialebene in m, so liegen die Fufspunkte der vier von m auf die Kontour gefällten Normalen auf einer Wellenfläche. Diese Erzeugung, bei welcher die Flächennormale immer durch den Mittelpunkt der Berührungssehne des Winkels geht ([17] p. 265), kommt zwar auf die STEINERsche hinaus; sie wurde aber von MANNHEIM [18] verallgemeinert, indem jetzt jeder Schenkel eines von zwei konfokalen Ellipsoiden berührt, während seine Ebene zu jedem im Berührungspunkt senkrecht bleibt; der Ort der Spitze ist immer noch eine Wellenfläche.

e) Die Definition von NIVEN [1] ist die einzige unabhängige von einem Ellipsoid: Legt man durch einen Punkt einer Fläche und je durch einen von drei konzentrischen in zu einander senkrechten Ebenen gelegenen Kreisen (den Hauptkreisen) Kugeln und steht die Verbindungslinie des Flächenpunkts mit dem zweiten Schnittpunkt der drei Kugeln auf der Verbindungslinie dieses Punkts mit dem Mittelpunkt senkrecht, so ist die Fläche eine Wellenfläche, während der zweite Schnittpunkt der Kugeln eine Wellengeschwindigkeitsfläche beschreibt (siehe auch LACOUR [1]). MANNHEIM [24] ebenso GENTY [1] und MICHEL [1] haben in Beantwortung einer Frage von „de Crès“ [1] den Zusammenhang dieses Satzes mit der MAC CULLAGHschen Definition klargelegt. DARBOUX [4] [6] hat an Stelle der Hauptkreise drei beliebige Kreise eingeführt und einen Punkt O, welcher von dem Schnittpunkt H der drei Kreisebenen verschieden ist, und welcher an Stelle des Mittelpunkts in der NIVENschen Definition tritt. Die Fläche ist aber alsdann eine F_5; sie wird jedoch eine F_4 (ein Tetraedroid), wenn O und H zusammenfallen.

f) BÖKLEN [1] bewies, dafs die Brennpunkte der durch die grofse Achse gehenden Hauptschnitte aller Ellipsoide, welche einen Zentralschnitt gemein haben, auf einer Wellenfläche liegen. In [9] zeigte er noch, dafs die Brennpunkte der Hauptschnitte durch die kleine Achse dieser Ellipsoide eine PAINVINsche Fläche erzeugen.

g) Endlich wurde von BÖKLEN [6] folgende Erzeugung angegeben: Konstruiert man alle Ellipsoide mit gemeinsamem Zentralschnitt, für welche die Quadratsumme der grofsen und der $\left|\begin{matrix}\text{kleinen}\\\text{mittleren}\end{matrix}\right|$ Achse konstant ist, so liegen die Endpunkte der zu dem Centralschnitt konjugierten

Durchmesser auf einer Wellenfläche. Brill [2] [3] hat die Bestimmung der Wellenfläche aus einem ebenen Zentralschnitt mit Rücksicht auf die optischen Anwendungen angegeben, wobei sich zwei nur in der mittleren Achse verschiedene Lösungen ergaben; vgl. auch Mannheim [23], der die Achsen aus einem Zentralschnitt, einem Flächenpunkt und einer Tangentialebene bestimmt, und nenerdings Viola [1].

15. *Erzeugungen* der Wellenfläche als *Enveloppe*:

a) Nach Cauchy [1] und Hamilton [1] wird die Wellenfläche erzeugt als Enveloppe der Ebenen, welche senkrecht zu den Radien der Indexfläche in einem Ursprungsabstand reziprok zu diesen Radien (in Bezug auf die Einheitskugel) gelegt werden oder wie Zech [2] es ausdrückt: welche parallel zu den Diametralschnitten des Ergänzungsellipsoids im Ursprungsabstand gleich der reziproken Länge der Halbachse dieser Schnitte gelegt werden; ähnlich Frosch [1]; siehe auch Zech [1], Niven [3], Mannheim [8], welcher zeigt, dafs die zu den Tangentialebenen eines singulären Punktes der Wellenfläche parallelen Tangentialebenen des Ergänznngsellipsoids einen Drehnngscylinder umhüllen.

b) Böklen [6] zeigte, dafs die Ebene der Kreise, in welchen die zu je einem Berührungscylinder des Ergänzungsellipsoids koaxialen, ein- und umbeschriebenen Drehungscylinder die orthoptische Kugel des Ellipsoids schneiden, die Wellenfläche umhüllen.

c) Andrerseits wird nach Painvin [2] die Wellenfläche umhüllt durch die Drehungscylinder, deren Leitlinien die Projektionen der orthoptischen Kngel auf die Tangentialebenen des Ellipsoids sind.

d) Zech [2] [3] definiert endlich die Wellenfläche als Enveloppe der Schaaren von Developpablen, welche zn den sphärischen und ellipsoidischen Linien polarreziprok sind.

16. *Liniengeometrische Erzeugungen* der Wellenfläche. Die Wellenfläche ist nach Painvin [1] [2] und Mannheim [18] zusammen mit einer anderen Fläche Singularitätenfläche des Komplexes der Geraden, von welchen an das Ergänzungsellipsoid zwei aufeinander senkrechte Tangentialebenen gehen. Painvin [2] zeigte, dafs der |äufsere / innere| Mantel der Wellenfläche der Ort der Punkte ist, für welche der Komplexkegel in zwei |reelle / imaginäre| Ebenen zerfällt. Painvin [2] und S. Roberts [1] kennzeichneten den |äufseren / inneren| Mantel der Wellenfläche als Enveloppe der Ebenen, deren Komplexkegelschnitte in |imaginäre / reelle| Punktepaare ausarten. Painvin [3] definierte die Wellenfläche zusammen mit einer andern Fläche 12. Ordnung und 12. Klasse mit vier Doppelknrven 4. Ordnnng und sech-

fachem Punkt im Mittelpunkt, als Ort von Brennpunkten von Komplexkegelschnitten. In diesem Zusammenhang mufs noch folgende Erzeugung von MANNHEIM [16] erwähnt werden: Die Fufspunkte der Lote vom Mittelpunkt des Ellipsoids auf die Sehnen, welche vom Mittelpunkt unter rechtem Winkel erscheinen, erfüllen einen von einer Wellenfläche umgrenzten Raum.

17. Eine *Schaar* von ähnlichen und ähnlich gelegenen Wellenflächen findet sich bei VOLTERRA [1] in elliptischen Koordinaten.

Der *Spezialfall*, dafs das Ergänzungsellipsoid ein *Drehungsellipsoid* wird, findet sich schon bei FRESNEL [1] [2] [3] und MAC CULLAGH [1]; die Wellenfläche zerfällt alsdann in eine Kugel und ein Drehungsellipsoid (siehe auch z. B. BRILL [2] [3]). Aus einer Andeutung von WEIERSTRASS (bei STEINER II, 742) geht hervor, dafs die STEINERsche Konstruktion auf ein Paraboloid angewandt, eine F_3 liefert.

18. *Verallgemeinerungen* der Wellenfläche sind ziemlich viele bekannt geworden. Zunächst kann an Stelle des Ergänzungsellipsoids eine allgemeine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung treten. Diesen Fall hat DURRANDE [3] [4] behandelt; er nennt diese Flächen *surfaces analogues à la surface des ondes*. Aufser Arbeiten von S. ROBERTS [1] nnd ISSALY [3], der die Fläche *surface normodirective minima* nennt, vergleiche man die Abhandlung [1] von LEGOUX, welcher die Wellenfläche als Spezialfall eines konfokalen aber nicht orthogonalen F_4-Systems ansieht, bei welchem durch jeden Punkt des Raumes aufser einer Wellenfläche zwei von Hyperboloiden abgeleitete analoge Flächen gehen. Zwei solche Flächen schneiden sich in Kurven 12. Ordnung; die Enveloppe des Systems ist eine Developpable 8. Ordnnng. Natürlich enthalten auch die „hyperboloidischen" Wellenflächen sphärische Kegelschnitte und Krümmungslinien von F_2 als ihre Orthogonaltrajektorien. LEGOUX entwickelt auch die Differentialgleichung der Nulllinien, der Asymptotenkurven und der Krümmungslinien. Das von CAYLEY [1] eingeführte *Tetraedroid* geht in eine Wellenfläche über, wenn drei Tetraederebenen auf einander senkrecht stehen, die vierte ins Unendliche gerückt ist, und von den Schnittkegelschnitten in jeder der ersteren Ebenen einer in einen Kreis übergeht. Das *Tetraedroid* ist eine Fläche vom Rang 12; es giebt 48 Ebenen (je 12 durch eine Tetraederecke), welche die Fläche in C_2 schneiden. Nach NIVEN [3] liegen die Punkte, deren Projektionen auf die Achsen die Mittelpunkte der drei Kugeln bei der NIVENschen [1] Erzeugung der Wellenfläche sind auf einer F_4 mit 16 imaginären und acht reellen Geraden und drei asymptotischen elliptischen Cylindern. Die Fläche wird auch, wenn man durch je eine Hauptellipse nnd einen Punkt der Wellenfläche ein zum Polarisationsellipsoid ähnliches Ellipsoid legt, durch den zweiten endlichen Schnittpunkt der drei Ellipsoide erzeugt. MANNHEIM [19] betrachtet Flächen,

welche Spitzen von Tangentialkegeln sind, deren Hauptschnitte einen konstanten, von einem Rechten verschiedenen Winkel bilden, und zeigt, dafs sie ebenfalls Krümmungslinien von Ellipsoiden enthalten. Eine Verallgemeinerung von Walton [1] besteht darin, dafs bei seiner Erzeugung die ellipsoidischen Linien, statt die drei Hauptkreise zu schneiden, anderen Bedingungen genügen müssen; er giebt die Differentialgleichung der so definierten Fläche. Eine von Cauchy [1] angegebene allgemeine Wellenfläche mit 76 singulären Punkten in jedem Hauptschnitt und mit 24 singulären Tangentialebenen ist von Knoblauch [1] näher untersucht worden. Ebenso beschäftigen sich die Arbeiten von Pochhammer [1] [2] mit der Cauchyschen Fläche, von welcher ein Spezialfall sich bei F. Neumann [1] findet. Ein anderer Spezialfall, bei welchem die Fläche von der 4. Ordnung ist und als Hauptschnitte Ellipsenpaare besitzt, ist von Pochhammer [2] erwähnt und von Schuh [1] als *elektromagnetische* Wellenfläche näher untersucht worden. Als affine Fläche zur gewöhnlichen Wellenfläche besitzt sie auch die singulären Punkte und Tangenten derselben. Auch die elektromagnetische Wellenfläche von Heaviside [1] [2] [3] entsteht durch affine Deformation aus der Fresnelschen (siehe auch Mac Aulay [1]). Endlich ist auch die Wellenfläche von Boussinesq [1], welche den Übergang zwischen zwei Fresnelschen bildet, zu diesen affin. Issaly [2] betrachtet allgemeine Wellenflächen mit Höhlungen, welche zwischen den Mänteln der Fresnelschen gelegen sind. Eine Verallgemeinerung von Darboux [7] bezieht sich auf Flächen, deren Asymptotenkurven sich ebenso wie bei der Fresnelschen durch eine Eulersche Gleichung bestimmen lassen. Zuletzt wäre noch die der theoretischen gegenüber stehende physikalische Wellenfläche von Cellérier [1] [2] zu erwähnen, sowie die F_6 von Beltrami [1].

19. Die Gleichung einer *n-dimensionalen* „Wellenfläche" gab Vahlen [1]. Schoute [1] verallgemeinerte für dieselbe zwei Erzeugungen von Mannheim [2] und zeigte [2], dafs die n-dimensionale Übertragung der Steinerschen Konstruktion auf ein anderes Gebilde führt.

20. Auf dem Gebiet der *Mechanik* hat Böklen [6] eine interessante Eigenschaft der Wellenfläche entdeckt. Er zeigte, dafs alle Punkte eines Körpers, für welche ein Hauptträgheitsradius konstant ist, auf einer Wellenfläche liegen, und dafs die Tangenten der ellipsoidischen Linien die Richtungen dieser konstanten Trägheitsradien angeben. Die durch den Schwerpunkt und den konstanten Trägheitsradius bestimmte Ebene schneidet die Ebene des gröfsten und des $\left|\begin{matrix}\text{kleinsten}\\ \text{mittleren}\end{matrix}\right|$ Trägheitsradius in der Flächennormale, je nachdem der Punkt auf dem $\left|\begin{matrix}\text{äufsern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right|$ Mantel liegt.

21. Die *optischen* Anwendungen waren nicht allein die Veranlassung zur Entdeckung der Wellenfläche, sondern sie spielen auch in den meisten Arbeiten über dieselbe eine wichtige Rolle. Die innere und äufsere *konische* (und cylindrische) *Refraktion*, welche auf den singulären Punkten und Tangentialebenen beruht, wurde von Hamilton [1] theoretisch vorhergesagt und von Lloyd [2] sofort bestätigt (siehe auch Smith [3], Prescott [1]). Eine wichtige Stelle nehmen die Untersuchungen über die optischen Voraussetzungen ein, welche mit der Fresnelschen Fläche vereinbar sind. Man vergleiche hierüber die Arbeiten von Lévy [1] [2], wo die Fresnelsche Fläche vereinbar erscheint mit den Anffassungen von Fresnel; Mac Cullagh, Neumann, Cauchy, Lamé, Massieu; Sarrau, Maxwell; Boussinesq. Andererseits hat Kohlrausch [1] nachgewiesen, dafs bei Zugrundelegung der Fresnelschen Fläche die Theorie der Doppelbrechung mit der Beobachtung in einer befriedigenden, innerhalb der Fehlergrenzen liegenden Übereinstimmung steht (cf. auch Cellérier [2]). Das den meisten doppelbrechenden Substanzen zugehörige Ergänzungsellipsoid ist übrigens ein sehr kugelähnliches. Verschiedene optische Fragen werden in Arbeiten von Mac Cullagh [1], Beer [1] [2], Walton [3] [6] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14], Curtis [1], Zech [3], Galopin-Schaub [2], Brill [1], Mannheim [4] [6], Issaly [2] behandelt; insbesondere erscheinen bei englischen und andern Autoren geometrische Sätze in optischem Gewande. Hervorheben mufs ich noch Waltons [10] *equiradial cone*, einen Kegel 4. Ordnung, für dessen Erzeugung beide Strahlengeschwindigkeiten der Welle einander gleich sind und welcher die *equiradial curve* Waltons [11] ausschneidet. Ewald [1] und Galopin-Schaub [2] unterscheiden |negativ / positiv| zweiachsige Krystalle, je nachdem $b^2-c^2 \lesseqgtr a^2-b^2$, d. h. je nachdem der |innere / äufsere| Mantel dem ordentlichen Strahl bei der Doppelbrechung entspricht.

22. Anwendungen auf die *Elektrizität* und den *Magnetismus* wurden, abgesehen von der erwähnten elektro-magnetischen Wellenfläche Heavisides [1], Mac Aulays [1] und Schuhs [1], besonders von Sella [1] gemacht, der die Fresnelsche Fläche als Wellenfläche in magnetischen Krystallen nachwies. Raveau [1] zeigte, dafs bei elektrischer Isotropie und magnetischer Anisotropie die Fresnelsche Fläche auftrete. Die Fläche, welche dem Fall der elektrischen Anisotropie entspreche, sei von Hertz untersucht worden.

Litteraturnachweis.

(Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind mir nicht zugänglich gewesen.)

Ampère, A. M. [1] *Mémoire sur la détermination de la surface courbe des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les 3 directions principales.* Ann. chim. phys. **39**$_2$ (1828), 113—144. — [2] *Bestimmung der krummen Fläche der Lichtwellen in einem Mittel, dessen Elasticität verschieden ist nach den 3 Hauptrichtungen.* Ann. Phys. **30**$_2$ (1833), 262—295.

Bassett, A. B. [1] *Treatise on physical optics* (London 1892), p. 123.

Beer, A. [1] *On the deduction of Fresnels construction from the formulae of Cauchy for the motion of the light.* Philos. mag. **2**$_4$ (1851), 297—303. — [2] *Sur le calcul de la surface de l'onde de Fresnel.* Ann. chim. phys. **34**$_3$ (1852), 347—354. — [3] *Einleitung in die höhere Optik* (Braunschweig 1853, 2. Aufl. 1882).

Beltrami, E. [1]* *Sulla teoria generale delle onde piane.* Rend. circ. mat. Palermo **5** (1891), 227—235.

Bertrand, J. [1] *Note sur la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **47** (1858), 817—819. — [2] *Traité de calcul différentiel* I (Paris 1864). — [3] *Étude des surfaces algébriques.* Journ. des savants 1867, p. 644—656; Nouv. ann. de mathém. **7**$_2$ (1868), 49—56.

Billet, F. [1] *Traité d'optique physique* (II. Paris 1859).

Böklen, O. [1] [2] [3] *Über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Zeitschr. für Mathem. **24** (1879), 400—405; **25** (1880), 207—213, 346—351. — [4] *Die sphärischen und die ellipsoidalen Curven einer Wellenfläche.* Mathem. Modelle XX, Darmstadt 1880. — [5] *Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Progr. Reutlingen 1881. — [6] *Über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Zeitschr. für Mathem. **27** (1882), 160—175. — [7] *Über die Krümmung der Flächen.* Journ. für Mathem. **96** (1884), 152—182. — [8] *Über die Tangentialkegel der F_2.* Mathem.-nat. Mitt. Stuttgart **1** C (1886), 48—55. — [9] *Note sur une surface étudiée par Painvin.* Nouv. ann. de mathém. **18**$_3$ (1899), 370—372. — [10] *Über die Wellenfläche.* Zeitschr. für Mathem. **44** (1899), 289—297.

Booth, W. [1] *On Hamiltons singular points and planes on Fresnels wave-surface.* Proc. roy. soc. Dublin **8**$_2$ (1897), 381—388. — [2] *On Fresnels wave-surface and surfaces related thereto.* Trans. roy. soc. Dublin **6**$_2$ (1897), 205—212.

Boussinesq, J. [1] *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés.* Journ. de mathém. **13**$_2$ (1868), 209—224.

Bricard, R. [1] *Étude du tétraédroïde.* Nouv. ann. de mathém. **18**$_3$ (1899), 197—217.

Brill, A. [1] *Über die Differentialgleichungen für die Lichtschwingungen.* Mathem. Ann. **1** (1869), 225—252. — [2] *Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem Centralschnitt derselben.* Sitzungsber. Acad. München (Mathem. Kl.) **13** (1883), 423—435; Mathem. Ann. **34** (1889), 297—305.

Brioschi, F. [1] *Sulle linee di curvatura delle superficie delle onde.* Annali di matem. **2** (1859), 135—136. — [2] *Osservazioni sulla medesima quistione.* Annali di matem. **2** (1859), 285—287.

Briot, C. [1] *Essai sur la théorie mathématique de la lumière.* Paris 1864.

Catalan, E. *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes.* [1] *Rapport* par M. Gilbert. Bull. ac. Bruxelles **27**$_2$ (1869), 129—142. — [2] *Le mémoire complet.* Nouv. mém. ac. Bruxelles **38** (1871). — [3] *Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et de la surface des ondes.* Assoc. franç. **7** (Congrès de Paris 1878), 58—62.

Cauchy, A. L. [1] *Applications de formules qui réprésentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de repulsion mutuelle à la théorie de la lumière.* Exercices de mathém. **5** (Paris 1830), 19—72. — [2] *Mémoire sur la théorie de la lumière.* Mém. ac. Paris **10** (1831), 286—316. — [3] *Note sur la surface des ondes lumineux dans les cristaux à 2 axes optiques.* Comptes rendus ac. Paris **13** (1842), 319—323. — [4] *Mémoire sur la polarisation rectiligne et la réfraction.* Mém. ac. Paris **18** (1842), 153—217.

Cayley, A. [1] *Sur la surface des ondes.* Journ. de mathém. **11** (1846), 291—296. — [2] *On the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 16—22. — [3] *Note on the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 142—144. — [4] *On the tetraedroid as a sixteennodal quartic surface.* Journ. für Mathem. **87** (1879), 161—164. — [5] *Equation of the wave surface in elliptical coordinates.* Mess. of mathem. 8_2 (1879), 190—191. — [6] *Sur la surface des ondes.* Annali di matem. 20_2 (1892), 1—18.

Cellérier, C. [1] *Mémoire sur la surface des ondes.* Mém. soc. sci. phys. et nat. Genève **23** (1874), 161—235. — [2] *Note sur la surface des ondes.* Arch. sci. phys. et nat. Genève 49_2 (1874), 5—23.

Clifton, R. B. [1] *On the conical refraction of a straight line.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 360—363.

Combescure, E. [1] *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.* Annali di matem. **2** (1859), 278—285.

„de Crès R." [1] *Question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 79—80.

Curtis, A. H. [1] *A geometrical proof of professor Mac Cullaghs theorem of the polar plane.* Quart. journ. of mathem. **1** (1857), 134—141.

Darboux, G. [1] *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **92** (1881), 446—448. — [2] *Sur les surfaces à 16 points singuliers et des fonctions à 2 variables.* Comptes rendus ac. Paris **92** (1881), 685—688. — [3] *Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **97** (1883), 1039—1045. — [4] *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes.* Comptes rendus ac. Paris **97** (1883), 1133—1135. — [5]* *Sur la surface des ondes.* Paris 1887 (vielleicht identisch mit [6]?). — [6] *Sur la surface des ondes.* Ann. éc. norm. Paris 6_3 (1889), 379—388. — [7] *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* IV (Paris 1896), Note 8, p. 466—488.

Durrande, H. [1] *Sur la surface des ondes de Fresnel.* Nouv. ann. de mathém. **20** (1861), 456—458. — [2] *Recherches sur la surface des ondes.* Nouv. ann. de mathém. 2_2 (1863), 193—204, 252—261. — [3]* *Propriétés géométriques des surfaces analogues à la surface des ondes.* Thèse (Paris) Moulins 1864. — [4] *Sur les surfaces du 4e ordre.* Nouv. ann. de mathém. 9_2 (1870), 410—417, 440—457.

Dziwinski, P. [1]* *Die Fresnelsche Wellenfläche vom Standpunkt der Geometrie* (poln.). Progr. Jaroslaw 1878.

Ewald, J. W. [1] *De crystallis duorum axium opticorum* (Diss. Berlin 1837).

Fletcher, L. [1]* *The optical indicatrix.* London 1892. — [2] *Die optische Indicatrix.* Deutsch von Ambronn (Leipzig 1893).

Fresnel, A. J. [1] *Extrait d'un mémoire sur la double réfraction.* Bull. soc. philom. Paris 1822, 63—71.[1]) — [2] *Sur la double réfraction.* Mém. ac. Paris **7** (1828), 45—176. — [3] *Über die doppelte Strahlenbrechung.* Ann. phys. 23_2 (1831), 372—434.

1) Auf diese Arbeit wurde ich in freundlicher Weise von Herrn J. E. Hill in Morgantown (West-Virg.) aufmerksam gemacht.

Frosch, C. [1] *Die singulären Punkte und Tangentialebenen der Wellenfläche.* Progr. Schneidemühl 1870.

Galopin-Schaub, C. [1]* *Sur l'équation des ondes lumineuses dans les milieux biréfringents.* Thèse (Paris) Genève 1858. — [2] *Étude sur la théorie de la double réfraction.* Arch. sci. phys. et nat. Genève **18**$_2$ (1863), 131—144.

Geiser, C. F. [1] *Über die Fresnelsche Wellenfläche.* Verhandl. Schweiz. Naturf. Gesellsch. **54** (Frauenfeld 1871), 178—192.

Genty, E. [1] *Réponse à la question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 260.

Gilbert, P. [1] *Sur quelques propriétés des surfaces apsidales.* Bull. ac. Bruxelles **28**$_2$ (1869), 31—53.

Glaisher, J. W. L. [1]* Solutions of Cambridge problems 1878, p. 184.

Glazebrook, R. T. [1] *An experimental investigation into the velocities of normal propagation of plane waves in a biaxal crystal.* Phil. trans. roy. soc. London **170** (1880), 287—377.

Haas, A. [1] *Über die einem Ellipsoid umschriebenen Kegel.* Mathem.-nat. Mitt. Stuttgart **4**$_2$ (1902), 39—44.

Hamilton, W. R. [1] *Third supplement to an essay on the theory of systems of rays.* Trans. r. ir. ac. Dublin **17** II (1837), 1—144.[1]) — [2] *On a mode of deducing the equation of Fresnels wave.* Philos. mag. **19**$_3$ (1841), 381—383. — [3] *On some quaternion equations connected with Fresnels wave surface of biaxal crystals.* *Proc. roy. ir. ac. Dublin **7** (1858), 122—124, 163—164; *Report Brit. assoc. **29** (Aberdeen 1859) II, 248; *Natural history review, London **6** (1859), 240—242, 365. — [4] *Elements of quaternions* (London 1866), p. 336—357.

Hammon, C. [1] *Die Leistungen Fresnels in der Wellentheorie.* Diss. München 1858.

Heaviside, O. [1] *On the electromagnetic wave surface.* Philos. mag. **19**$_5$ (1885), 377—419. — [2]* *Electrical papers* II (London 1892), p. 1. — [3] *On the transformation of optical wave-surfaces by homogeneous strain.* Proc. roy. soc. London **55** (1894), 30—43.

Herschel, J. F. W. [1] *Theory of light.* London 1828 (Franz. Übers. Bruxelles 1828—1829; Deutsche Übers. Stuttgart 1831).

Hicks, W. M. [1]* *Practical method of modelling the wave surface.* Mess. of mathem. **5**$_2$ (1876), 183—186.

Humbert, G. [1] *Sur les surfaces de Kummer elliptiques.* Amer. journ. of mathem. **16** (1894), 221—253. — [2] *Détermination des courbes algébriques de degré quelconque qu'on peut tracer sur la surface de l'onde.* Bullet. soc. mathem. Paris **30** (1902), 23—28.

Issaly. [1] *Connexité et généralisation de trois lieux géométriques.* Mém. soc. sci. Bordeaux **5**$_3$ (1889), 163—183. — [2] *Mémoire sur une double série de surfaces nouvelles comprises entre les deux nappes de la surface de l'onde de Fresnel et sur les cônes isochromatiques circonscrits à ces surfaces.* Mém. soc. sci. Bordeaux **5**$_3$ (1889), 251—275. — [3] *Mémoire sur une surface d'ondes réfléchies corrélative de celle de Fresnel et sur la double série de surfaces d'onde moyennes dont elle est la limite.* Mém. soc. sci. Bordeaux **2**$_4$ (1891), 339—377.

„Jesuiticus". [1] *Remarks on a paper of Mr. Moon on Fresnels theory of double refraction.* Philos. mag. **28**$_3$ (1846), 144—145.

Knoblauch, J. [1] *Über die allgemeine Wellenfläche.* Diss. Berlin 1882.

Kohlrausch, W. [1] *Über die experimentelle Bestimmung der Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen.* Ann. phys. **6**$_3$ (1879), 86—116; **7**$_3$ (1879), 427—435.

---

1) Sylvester [1] nennt irrtümlich Laplace als Verfasser dieser Abhandlung

Koláček, F. [1] *Theorie der Doppelbrechung in induktiver Darstellung.* Ann. phys. 47_3 (1892), 258—264.

Kowalewski, S. [1] *Über die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln.* Acta Mathem. 6 (1885), 249—304.

Lacour, E. [1] *Sur la surface de l'onde.* Nouv. ann. de mathém. 17_3 (1898), 266—272. — [2] *Sur la surface de l'onde et la surface correspondante de l'élasticité.* Nouv. ann. de mathém. 19_3 (1900), 362—369.

Lamé, G. [1] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité.* Paris 1852.

Lampe, E. [1]* *Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes.* Progr. Berlin 1870.

Larmor, J. [1] *The singularities of the optical wave-surface, electric stability and magnetic rotatory polarisation.* Proc. mathem. soc. London 24 (1893), 272—290.

Legoux, A. [1] *Sur une nouvelle propriété d'un système triple de surfaces quartiques homofocales, comprenant comme cas particulier la surface des ondes.* Nouv. ann. de mathém. 4_3 (1885), 393—408.

Lévy, M. *Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de Fresnel.* [1] Comptes rendus ac. Paris 105 (1887), 1044—1050. — [2] Journ. de mathém. 4_4 (1888), 257—312.

Lloyd, H. [1] *Report on the progress and present state of physical optics.* Report Brit. assoc. 4 (Edinburgh 1834), 295—413. — [2] *On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals.* Trans. roy. ir. ac. Dublin 17 II (1837), 145—157 — [3] *Elementary treatise on the wave theory of light.* 2. ed. London 1857.

Lubbock, J. W. *On the wave surface in the theory of double refraction.* [1] Philos. mag. 11_3 (1837), 417—421. — [2] Philos. mag. 12_3 (1838), 47—48. — [3] Philos. mag. 15_3 (1839), 351—357.

Mac Aulay, A. [1] *On the wave-surface and rotation of polarisation plane in an aeolotropic electromagnetic medium.* Philos. mag. 42_5 (1896), 224—231.

Mac Cullagh, J. [1] *On the double refraction of light in a crystallized medium according to the principles of Fresnel.* Trans. roy. ir. ac. Dublin 16 II (1831), 65—78. — [2] *Geometrical propositions applied to the wave theory of light.* Trans. roy. ir. ac. Dublin 17 II ((1837), 241—264. — [3] *On the laws of crystalline reflection and refraction.* Trans. roy. ir. ac Dublin 18 I (1838), 31—74. — [4] *Mémoire sur les lois de la réflexion et de la réfraction crystalline.* Journ. de mathém. 7 (1842), 217—265.

Magnus, L. J. [1] *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie.* I. Berlin 1837.

Mannheim, A. [1] *Détermination géométrique pour un point de la surface des ondes de la normale, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure.* Comptes rendus ac. Paris 64 (1867), 170—174, 268—269. — [2] *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde.* Comptes rendus ac. Paris 77 (1873), 839—840. — [3]* *Sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. 3 (Lille 1874), 1168—1193. — [4] *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés.* Comptes rendus ac. Paris 81 (1875), 369—370; Assoc. franç. 4 (Nantes 1875), 231—235. — [5] *Recherches sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. 4 (Nantes 1875), 167—173. — [6] *Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde qui s'interprètent en optique.* Comptes rendus ac. Paris 82 (1876), 368—369. — [7]* *Nouvelles propriétés optiques déduites de l'étude géométrique de la surface de l'onde.* Journ. de phys. 5 (1876), 137—144. — [8] *Remarque sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. 5 (Clermont-

Ferrand 1876), 130—140. — **[9]** *Sur les plans tangents singuliers de la surface de l'onde et sur les sections faites dans cette surface par des plans parallèles à ces plans tangents.* Assoc. franç. **6** (Le Havre 1877), 125—127. — **[10]** *Sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **6** (Le Havre 1877), 167—168. — **[11]** *Sur les normales de la surface de l'onde.* Assoc. franç. **6** (Le Havre 1877), 175—176. — **[12]** *On the wave surface.* Mess. of mathem. $\mathbf{7}_2$ (1877), 100—101. — **[13]** *Sur la surface de l'onde.* Assoc. franç. **7** (Paris 1878), 63—67. — **[14]** *Détermination géométrique des ombilics de la surface de l'onde.* Comptes rendus ac. Paris **88** (1879), 902—908. — **[15]** *Sur la surface de l'onde et sur la transformation d'un pinceau.* Comptes rendus ac. Paris **88** (1879), 1248—1252. — **[16]** *Sur la surface de l'onde considérée comme surface limite.* Comptes rendus ac. Paris **90** (1880), 971—974. — **[17]** *Cours de géométrie descriptive.* Paris 1880 (2 éd. 1886). — **[18]** *Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses.* Comptes rendus ac. Paris **90** (1880), 1333—1336. — **[19]** *Sur la surface de l'onde et théorèmes relatifs aux lignes de courbure des F_2.* Proc. roy. soc. London **32** (1881), 447—450. — **[20]** *Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde.* Collectanea Mathem. (Milano 1881), p. 91—104. — **[21]*** *On the wave surface.* Mess. of mathem. $\mathbf{14}_2$ (1885), 189—190. — **[22]*** *Note on the wave surface.* Mess. of mathem. $\mathbf{15}_2$ (1885), 40—41. — **[23]** *Propriétés nouvelles de la surface de l'onde.* Comptes rendus ac. Paris **122** (1896), 708—711. — **[24]** *Réponse à la question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 238—240.

Marx, C. M. **[1]** *Zur Geschichte der Lehre von der doppelten Strahlenbrechung.* Ann. phys. $\mathbf{78}_2$ (1849), 272—274.

Massieu, F. J. D. **[1]*** *Sur la mode de propagation des ondes planes et sur la surface de l'onde élémentaire dans les cristaux biréfringents à 2 axes.* Thèse Paris 1861.

Mathieu, E. **[1]** *Note sur la surface de l'onde.* Journ. de mathém. $\mathbf{11}_2$ (1866), 298—304.

Michel, F. **[1]** *Réponse à la question 1267.* L'interméd. des mathém. **5** (1898), 258.

Moon, R. *On Fresnels theory of double refraction.* **[1]** Philos. mag. $\mathbf{27}_3$ (1845), 553—559. — **[2]** Philos. mag. $\mathbf{28}_3$ (1846), 134—136. — **[3]*** *Fresnel and his followers.* Cambridge.

Moutier, J. **[1]** *Sur l'intensité de la lumière.* Journ. éc. polyt. cah. **59** (1889), 77—96.

Neumann, C. **[1]** *Vorlesungen über theoretische Optik.* Leipzig 1885.

Neumann, F. **[1]** *Theorie der doppelten Strahlenbrechung.* Ann. Phys. $\mathbf{25}_2$ (1832), 418—454. — **[2]** *Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach denen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflektiert und gebrochen wird.* Abh. Ak. Berlin 1835, p. 1—160.

Niven, C. **[1]** *On some theorems connected with the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **9** (1868), 22—24. — **[2]** *On Mr. Mannheims researches on the wave-surface.* Quart. journ. of mathem. **15** (1878), 242—257. — **[3]** *On some properties of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **15** (1878), 257—266.

Painvin, L. *Étude d'un complexe du 2e ordre.* **[1]** Bullet. sci. mathém. **2** (1871), 368—382; **[2]** Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{11}_2$ (1872), 49—60, 97—107, 202—210, 289—297, 481—500, 529—535. — **[3]** *Étude d'un système de rayons.* Journ. de mathém. $\mathbf{19}_2$ (1874), 57—113.

Plücker, J. **[1]** *Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.* Journ. für Mathem. **19** (1839), 1—44, 91—92.

Pochhammer, L. **[1]** *De superficiei undarum derivatione.* Diss. Berlin 1863. — **[2]** *Über*

die optischen Axen der allgemeinen Wellenoberfläche von Cauchy und Neumann. Ann. Phys. **121**, (1864), 239—249.

Prescott, J. E. [1] *On the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **2** (1857), 1—8.

Preston, T. [1]* *The theory of light.* London 1890.

Raveau, C. *Sur la surface de l'onde dans les cristaux.* Comptes rendus ac. Paris **112** (1891), 1056—1058.

Lord Rayleigh (J. W. Strutt). [1] *On double refraction.* Philos. mag. **41**, (1871), 519—528.

Roberts, S. [1] *On some formulae of the equation of the wave-surface.* Quart. journ. of mathem. **17** (1881), 319—326.

Roberts, W. *Cubature de la surface des ondes.* [1] Comptes rendus ac. Paris **55** (1860), 503. — [2] Annali di matem. **4** (1861), 345—347.

Rohn, K. [1] *Die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche.* Mathem. Ann. **18** (1881), 99—160.

Rouché, E. [1]* L'Institut **27** (1859), No. 1328.

de Salvert, F. [1]* *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces.* Ann. soc. sci. Bruxelles **5** B (1881), 291—473. — [2]* *Mémoire sur les ombilics coniques.* Ann. soc. sci. Bruxelles **7** B (1882), 143—248.

Schoute, P. H. [1]* *Uitbreiding van het begrip „golfoppervlak" op de ruimte met n afmetingen.* Nieuw Archief voor Wisk. **3**, (1897), 239—242. — [2]* *Extension of the notion of wave-surface to space of n dimensions.* Proc. mathem. soc. Edinburgh **16** (1898), 51—56.

Schuh, F. [1] *Vlakke lichtgolven in een homogeen electrisch en magnetisch anisotroop dielectricum.* Verslagen Ak. Amsterdam **10** (1901—1902), 74—90, 159—167.[1])

Sella, A. *Ancora sulle leggi di propagazione della luce nei cristalli magnetici.* Rend. r. acc. Lincei Roma **4**, II (1895), 283—288.

de Sénarmont, H. H. [1] *Note sur la théorie mathématique de la double réfraction.* Journ. de mathém. 8 (1843), 361—378. — [2] *Commentaire au mémoire de Fresnel sur la double réfraction.* Journ. éc. polyt. cah. **35** (1851), 1—27.

Smith, A. *Investigation of the equation to Fresnels wave surface.* [1]* Trans. philos. soc. Cambridge **6** I (1836), 85—90. — [2] Philos. mag. **12**, (1838), 335—336. — [3] *Notes on the undulatory theory of light.* Cambridge mathem. journ. **1** (1837), 1—8, 77—86. — [4] *On Fresnels theory of double refraction.* Philos. mag. **28**, (1846), 48.

Soret, L. [1] *Sur la mesure des indices de réfraction des cristaux à deux axes par l'observation des angles limites de réflexion totales sur des faces quelconques.* Comptes rendus ac. Paris **107** (1888), 176—178, 479—482.

Steiner, J. [1] *Werke. Herausgegeben von* K. Weierstrass. II. Berlin 1882, p. 724, 742.

Stokes, G. G. [1]* *Report on double refraction.* Report Brit. assoc. **32** (Cambridge 1862), 253—282.

Sylvester, J. [1] *Analytical development of Fresnels optical theory of crystals.* Philos. mag. **11**, (1837), 464—469, 537—541; **12**, (1838), 73—83, 341—345.

Tait, P. G. [1] *Quaternion investigations connected with Fresnels wave-surface.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 190—210. — [2] *Note on the Cartesian equation to the wave surface.* Quart. journ. of mathem. **3** (1860), 269—270. — [3] *On some space loci.* Proc. roy. soc. Edinburgh **11** (1881), 197—198.

1) Diese Arbeit wurde mir von ihrem Autor in freundlicher Weise zugänglich gemacht.

Townsend, R. [1]* *On a property of the wave surface.* Mess. of mathem. 2_2 (1872), 28—29.
Turnbull, W. P. [1] * *The wave surface.* Mess. of mathem. 3 (1866), 153—169, 205—222.
Vahlen, K. T. [1] *Sur la surface de Fresnel.* Nouv. ann. de mathém. 14_3 (1895), 344—347.
Verdet, E. [1] *Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts.* II. Braunschweig 1887.
Viola, C. [1] *Die Bestimmungen der optischen Konstanten eines Krystalls aus einem einzigen beliebigen Schnitte.* Zeitschr. f. Krystallogr. 36 (1902), 215—251.
Volterra, V. [1] *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* Acta Mathem. 16 (1892), 153—215.
Walton, W. [1] *On the family of the wave surface.* Cambridge Dublin mathem. journ. 7 (1852), 105—110. — [2] *On a physical property of the wave surface.* Cambr. Dubl. mathem. journ. 8 (1853), 33—34. — [3] *On the obliquity of a ray in a biaxal crystal.* Quart. journ. of mathem. 4 (1861), 1—5. — [6] *Note on a geometrical property of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. 4 (1861), 151—152. — [5] *On the generation of the wave surface by the intersection of 2 sympathetic surfaces of revolution.* Quart. journ. of mathem. 4 (1861), 310—314. — [6] *On certain analytical relations between conjugate wave-velocities, ray velocities and planes of polarisation.* Quart. journ. of mathem. 5 (1862), 127—130. — [7] *On certain relations between tangent planes and radii of the wave surface and the ellipsoid of construction.* Quart. journ. of mathem. 5 (1862), 285—288. — [8] *Note on the inclination of the optical axis to the ray axis of a biaxal crystal.* Quart. journ. of mathem. 5 (1862), 317. — [9] *Theorems concerning wave-velocities and ray slownesses in a biaxal crystal.* Quart. journ. of mathem. 5 (1862), 360—361. — [10] *On the equiradial cone of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. 6 (1863), 78—81. — [11] *On the equiradial curve of the wave surface.* Quart. journ. of mathem. 6 (1863), 144—145. — [12] *On a physical property of a certain generator of the wave surface of a biaxis crystal.* Quart. journ. of mathem. 22 (1887), 268—270. — [13] *On the coincidence of ray directions in a biaxis crystal which correspond to certain conjugate planes of polarisation.* Quart. journ. of mathem. 23 (1889), 7—10. — [14] *On the magnitudes of conjugate ray velocities in a biaxis crystal and their inclination to each other.* Quart. journ. of mathem. 25 (1891), 182—185.
Weber, H. [1] *Über die Kummersche F_4 mit 16 Knotenpunkten.* Journ. für Mathem. 84 (1878), 332—354. — [2] *Darstellung der Fresnelschen Wellenfläche durch elliptische Funktionen.* Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich 41 (1896), 82—91.
Zech, P. [1] *Die Eigenschaften der Wellenfläche der zweiaxigen Krystalle mittelst der höheren Geometrie abgeleitet.* Journ. für Mathem. 52 (1856), 243—253. — [2] *Die höhere Geometrie.* Stuttgart 1857. — [3] *Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.* Journ. für Mathem. 54 (1857), 72—76. — [4] *Berichtigung.* Journ. für Mathem. 55 (1858), 7.
„Un Abonné“. [1] *Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde.* Nouv. ann. de mathém. 1_3 (1882), 29—31.

Litteraturverzeichnisse über die Wellenfläche finden sich bei Mannheim [17], Böklen [5] und in dem mir nicht zugänglichen Buch von G. Loria *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche,* 2. ed. (Torino 1896), p. 114—115.

Intorno ad alcune anomalie presentate dal „Bullettino“ del Principe Boncompagni.

Di Antonio Favaro a Padova.

Vissuto per quasi un quarto di secolo in intima relazione ed in continua corrispondenza col non mai abbastanza rimpianto Principe Don Baldassarre Boncompagni, ed avendo avuto l' onore di vedere accolti parecchi miei lavori nel celebre Bullettino da lui edito, parmi opportuno chiarire alcuni particolari i quali possono fornire la spiegazione di certe anomalie che si avvertono o che si potrebbero avvertire tra un esemplare e l' altro di qualche volume, ed una delle quali, sebbene d' ordine alquanto diverso, fu già segnalata dal Prof. Maurizio Steinschneider[1]), fornendo occasione ad alcune dichiarazioni da parte del Signore G. Valentin.[2])

È ben noto che, insofferente degli indugi ed anche delle minime difficoltà le qnali il Principe aveva incontrate nella pubblicazione dei suoi primi lavori nei rispetti tipografici, incontentabile al pnnto da non decidersi a far tirare un lavoro finchè non l'avesse sott' occhio composto quasi per intero, per quanto fosse lungo, continuamente desideroso di accrescere l' apparato di erudizione così da tenere in piedi centinaia di pagine, sospendendone la continuazione finchè non fosse giunto, e spesso da lontani paesi, o un manoscritto pagato più che a peso d' oro, o un fac-simile, o un documento o una notizia, egli si indusse a fondare una tipografia sua propria che intitolò „delle scienze matematiche e fisiche.“ Questa sua tipografia egli fornì di copioso materiale, adatto non solo a soddisfare le esigenze delle scritture concernenti le matematiche, ma altresì ricco di quei caratteri speciali rappresentanti abbreviazioni e segni che si incontrano così negli antichi manoscritti come nelle vecchie stampe e che mancavano a tutte le tipografie per quanto riccamente fornite. A questa sua tipografia egli assegnò comoda ed ampia sede nel pianterreno del Palazzo

1) Biblioth. Mathem. 1898, 64.
2) Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 131—132.

Boncompagni-Simonetti in via del Corso a Roma, palazzo di sua proprietà, ma non da lui abitato; e la indicazione di „Via Lata n° 3", che si legge appiedi del frontespizio dei volumi del Bullettino sta ad indicare soltanto che la tipografia aveva un ingresso proprio sul fianco del palazzo che prospetta quest' ultima via. E soltanto quando venne demolito il Palazzo di Piombino di fronte a Piazza Colonna, e del quale il Principe Don BALDASSARRE occupava con parte della biblioteca l'ultimo piano, trasferì tipografia e biblioteca nel Casino Aurora del Quartiere Ludovisi, dov' egli soggiornò poi insin che visse.

Sono pure ben note tutte le cure che il Principe dedicava alla pubblicazione del Bullettino; ma soltanto chi ebbe l' onore di vedere i proprii lavori inseriti in questa famosa effemeride, e di essere anche, diciamolo pure, tormentato dalla corrispondenza postale e telegrafica dell' illustre Mecenate, la quale durante la composizione tipografica e la correzione delle stampe era più che quotidiana, può formarsi una idea esatta della somma di lavoro che il Bullettino gli costava. Nè questo basta, imperocchè possa dirsi non esservi scrittura della raccolta da lui edita, della quale egli non sia stato collaboratore efficacissimo, sia somministrando materiali copiosi, sia aggiungendo preziose notizie, ognuna delle quali portava o un dato biografico fino allora ignorato, o notizia di un manoscritto sconosciuto o di un' opera rara, il tutto improntato a quella scrupolosa esattezza, la quale, può dirsi senza ombra di esagerazione, nessuno prima di lui aveva pensato ad adoperare.

Or bene, quantunque il Bullettino non dovesse uscire a scadenza fissa, pure in prossimità al termine entro il quale egli si era prestabilito di far vedere la luce al fascicolo, più spesso mensile, aumentavano le sue già non infrequenti impazienze, dovute in principal modo al timore di far uscire con soverchio ritardo i bimestrali „Annunzi di recenti pubblicazioni", e non di rado accadde che l' autore si vide capitare bello e stampato l'articolo del quale egli non aveva peranco licenziate le prove di stampa, oppure accadeva che all'ultimo momento il Principe avesse stimato opportuno di introdurre, con le migliori intenzioni di questo mondo, qualche variazione od aggiunta della quale l' autore non riconosceva la necessità o la opportunità, ed allora l' illustre Mecenate tagliava corto, avvertendo per lettera o per telegramma che la pubblicazione del fascicolo non aveva potuto ulteriormente attendere, ma che però ai fogli contenenti errori di stampa o modificazioni dall' autore non consentite sarebbero stati sostituiti altri fogli nei quali tutto sarebbe stato rimesso al debito posto. Questi fogli corretti venivano quasi sempre, sebbene talvolta con lunghi ritardi, e non so se in tutte le biblioteche alle quali perveniva il Bullettino saranno pervenuti i fogli sciolti e privi bene spesso di qualsiasi

indicazione, e se si avrà avuta cura di effettuare sempre la sostituzione, specialmente se il relativo volume era ormai rilegato. Per questo motivo io credo che se si facesse un diligente confronto dei varii esemplari del Bullettino, specialmente delle dieci o dodici ultime annate, si riscontrerebbero molte e molte differenze, nè sarebbe sempre così facile, come si può credere, lo stabilire quali esemplari rechino la lezione definitiva, cioè pienamente conforme alla intenzione dell' autore.

Questo particolare il quale deve, per esperienza propria, essere a cognizione di molti che al par di me ricevevano dal Principe stesso il Bullettino, mi è sembrato opportuno di porre in piena evidenza, perchè con la scorta dello schiarimento da me fornito potranno essere spiegate alcune differenze d' altronde inesplicabili.

August Heller.

Von Siegmund Günther in München.[1])

Am 6. September 1902 versammelte sich im Vestibül der Kgl. ungarischen Akademie der Wissenschaften eine Schar von Leidtragenden, um einem hervorragenden Manne die letzte Ehre zu erweisen. Von diesem Orte aus pflegt man in Budapest Männer zu beerdigen, die sich um das Land grofse Verdienste erworben haben; es ist zum Beispiel so mit Franz Deák, dem Grafen Andrássy, Trefort, Toldi u. a. gehalten worden. Diesmal jedoch handelte es sich nicht um einen Staatsmann, sondern um einen schlichten Gelehrten. Professor Heller, der Historiker der Physik, war es, dem die Ehrenbezeugung galt. Gestorben am 4. September nach längerem Leiden, hatte er sich in der That unter den Männern der Wissenschaft in seinem Lande eine hoch geachtete Stellung erworben, und die Art seiner Bestattung legte nur Zeugnis ab von der Wertschätzung, welche man dem Forscher und nicht weniger auch dem Menschen zollte.

August Heller erblickte das Licht der Welt in der damals noch nicht mit Ofen vereinigten Stadt Pesth am 6. August 1843, so dafs er sein Leben also ein wenig über 59 Jahre gebracht hat. Er absolvierte

1) Der Verf. ist der Witwe des Verewigten zu aufrichtigem Dank für die umfassenden und sachkundigen biographischen Mitteilungen verbunden, ohne welche dieser Nekrolog nicht hätte geschrieben werden können.

die Realschule und von 1862 bis 1866 auch das Polytechnikum seiner Vaterstadt und war bereits im Begriffe, sich der Laufbahn des Ingenieurs zu widmen, als wohlgemeinter Rat ihn veranlafste, der Wissenschaft den Vorzug zu geben, zumal da auch die nur kurze Zeit bekleidete Stelle eines Bankbeamten ihm keine Genugthuung zu gewähren vermochte. Im Juni 1868 bestand er „mit Vorzug" die Konkursprüfung für das Lehramt der Physik und Mathematik und wurde gleich darauf Assistent am Polytechnikum. Ein Stipendium ermöglichte es ihm, 1869 noch ein Jahr an der Universität Heidelberg zu studieren, wo er namentlich zu Gustav Kirchhoff in ein näheres Verhältnis trat und mit ihm als Privatassistent zusammen arbeiten durfte — eine Auszeichnung, die ihn sein ganzes Leben hindurch mit berechtigtem Stolze erfüllte. Im Oktober 1870 wurde er zum Professor der Physik und Mathematik an der Realschule bestellt, deren Schüler er noch acht Jahre zuvor gewesen war. In diesem Amte ist er bis zum Jahre 1898 verblieben. Es darf hier wohl daran erinnert werden, dafs Heller das Zeug zum Hochschullehrer in sich fühlte und gerne sich als solcher bethätigt hätte; nahe genug war er diesem Ziele mehrmals, und nur eine Verkettung ungünstiger Umstände vereitelte die von ihm und von wohlmeinenden Gönnern gehegte Absicht. Die ihm von solchen zugedachte Lehrkanzel der Physik an der Universität entging ihm 1871, weil man einem Experimentator vor dem Vertreter der theoretischen Physik den Vorzug einräumte. Gerne hätte ihn dann 1872 der Kultusminister Trefort an die neu gegründete Universität Klausenburg (Kolozsvár) berufen, und zwar gleich als Ordinarius, allein für Heller war das Leben in einer Stadt ohne gröfsere Bibliothek nicht denkbar, und so lehnte er ab. Im März 1872 hatte er sich an der technischen Hochschule habilitiert und blieb Dozent bis zum Jahre 1875. Elf Jahre darauf schien ihm wieder der Übergang auf einen seinen Neigungen entsprechenden Posten zu winken, indem ernstlich daran gedacht ward, ihm die Direktion der Kgl. ungarischen Zentralstation für Meteorologie und Erdmagnetismus nach G. Schenzls — und dann wieder nach L. Grubers — Abgange anzuvertrauen.

Einigermafsen entschädigten ihn für die Zerstörung dieser gewifs wohlbegründeten Hoffnungen die ihm übertragenen bibliothekarischen Funktionen; ist er doch stets ein Bücherfreund und Bücherkenner in des Wortes bestem Sinne gewesen. Die Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft hatte ihn schon 1874 zu ihrem Bibliothekar erwählt, und in diesem Nebenamte waltete er zwanzig Jahre lang, bis ihn die Ernennung zum Oberbibliothekar der Akademie (Oktober 1894) zum Verzichte auf jenen Posten nötigte. Vier Jahre später legte er auch die Professur nieder und konnte nun seine ganze Zeit — leider war sie nur noch kurz

bemessen — auf bibliothekarische nnd bibliographische Arbeit konzentrieren. An ausgiebiger Beschäftigung fehlte es ihm wahrlich nicht. So sandte ihn die Akademie, als ihr 1895 der Advokat Elischer seine reichhaltige Goethe-Sammlung vermachte, nach Weimar und Frankfurt a. M., um daselbst Studien für die Errichtung dieser nenen Abteilung zu machen, die denn auch schon im Frühjahre 1896 zu stande kam, so dafs sie, völlig aufgestellt und katalogisiert, der Öffentlichkeit übergeben ward. Dreimal — 1896, 1898 und 1900 — vertrat er Ungarn bei den Londoner Beratungen über den viel besprochenen internationalen Katalog der naturwissenschaftlichen Schriften.[1]) Man ernannte ihn auch zum Sekretär des ungarischen Regionalbureaus. Im Jahre 1900 hatte ihn seine Akademie zur Kartellkonferenz der gelehrten Gesellschaften nach Paris delegiert, allein bald darauf machte sich jenes Leiden bei ihm geltend, das ihn zuerst zu immer weiterer Einschränkung geistiger Arbeit zwang und ihm nach und nach jeden Verkehr mit der Öffentlichkeit unmöglich machte.

Um mit den äufseren Lebensumständen Hellers abzuschliefsen, sei bemerkt, dafs er seit August 1876 in glücklichster Ehe mit Georgine von Bolberitz lebte. Seine Gattin verstand es vortrefflich, auf die geistigen Interessen ihres Mannes einzugehen, und sie war seine Stütze, als fortschreitende Krankheit es ihm nahe legte, sich bei der ihm noch vergönnten Beschäftigung mit wissenschaftlichen Dingen unterstützen zu lassen. Mit der Mutter trauern um den ihnen zu früh entrissenen Vater drei Söhne, deren zwei als Jnristen und einer als Ingenieur ihre Studien bereits vollendet haben, so dafs nach dieser Seite hin keinerlei Sorge mehr das Gemüt des Sterbenden zu belasten brauchte.

Wir wenden uns nunmehr den Veröffentlichungen Hellers zu. Dieselben bewegen sich in der späteren Zeit zum Teile auf dem geschichtlichen Boden, zum Teil auch auf dem von ihm mit besonderer Vorliebe gepflegten Grenzgebiete zwischen Philosophie und Naturlehre. Ein Aufsatz, den er als achtzehnjähriger Jüngling niederschrieb, und der den Titel „Apodiktisches und empirisches Wissen“ führte, ist ungedruckt geblieben. Im Jahre 1869 trat er mit einer ungarischen Abhandlung astronomischen Inhalts hervor[2]), der in der nämlichen Zeitschrift eine Stndie

1) Der Schreiber dieser Zeilen hat Ursache an die mit diesen Repräsentativpflichten verbnndenen Reisen des Verstorbenen mit wehmütiger Frende zu denken, weil sie dazu führten, eine auf das Jahr 1887 zurückgehende und 1896 in Budapest aufgefrischte persönliche Bekanntschaft von Zeit zu Zeit, bei der Durchreise durch München, wieder zu erneuern.

2) *A Vénus átvonulásáról*; Természettnd. Közlöny (Naturwissenschaftlicher Anzeiger) 1869.

über die deutschen Bibliotbeken und ein paar kleinere Artikel über Astronomie und Akustik folgten. Als Frucbt des Heidelberger Aufenthaltes ist anznsehen eine Bearbeitung des scbwierigen, auch jetzt noch von endgültiger Lösung weit entfernten Problems der Sonometrie[1]), der sich Bemerknngen über das Nordlicht[2]) anschlossen. Nächstdem befafste er sich mit den damals nach Gleichberechtigung mit den bereits bekannten Luftschweremessern ringenden Federbarometern.[3]) Hierauf bezieben sich einige kleinere, magyarisch abgefafste Arbeiten; auch über optiscbe und astronomiscbe Fragen, vorab über die Venusdurcbgänge von 1874 und 1882 erschienen Pnblikationen aus seiner Feder.[4]) Daneben interessierten ihn auch die mit seinem Amte znsammenhängenden pädagogischen Angelegenheiten, und der Jahrgang 1872 des wichtigsten deutscb gedruckten Tageblattes der Hanptstadt, des Pester Lloyd, brachte von ihm eine Artikelserie zur „Realschulfrage".

Die ungemein rege und intensive Produktion der nächsten Jahre erschöpfend zu verfolgen, ist leider nicht tbnnlich, weil der zur Verfügung stehende Ranm es nicht gestattet. Vielmehr müssen wir es bei einer summarischen Anfzählung bewenden lassen[5]) — umso mehr, weil die Anf-

---

1) *Über eine Intensitätsmessung des Schalles*; Ann. d. Physik u. Chemie **141**, 1870; anch T. K. 1870. Vgl. Günther, *Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im XIX. Jahrhundert* (Berlin 1901), S. 549.

2) *Az éjszaki fényről*; T K. 1870.

3) *Über ein Barometer ohne Quecksilber*; Ann. d. Physik u. Chemie **142**, 1871 (englische Übersetzung im Philosophical magazine **41**, 1871). Das erwähnte ungarische Organ enthält gleichfalls Mitteilnngen über Aneroide.

4) Das Jahr 1872 förderte in Summa 22 kleinere Noten Hellers zu Tage; damals hegann er anch der Meteorologie näher zn treten.

5) Anf das Jahr 1873 treffen 8 Aufsätze und Recensionen, auf das Jahr 1874 treffen 9 (Meteorologie, Kometen, Mechanik, Didaktik). Die Bilanz des Jahres 1875 sind deren 11, und unter diesen Abhandlungen hefindet sich auch wieder eine gröfsere üher den Vorübergang der Venns vor der Sonnenscheihe (*A Vénus átvonulás megfigyeléséről; Pótlék hozzá*; T. K. 1875). Von den 10 Nummern des nächsten Jahres, durchweg astronomischen und meteorologischen Inhaltes, sei wiederum eine, als für die atmosphärische Physik bemerkenswert, hervorgehoben, welche von den magnetischen Körperchen im Stauhe handelt (*Delejes morzsák a levegőbeli porban*; T. K. 1876). Weiterhin sind es 13 Abhandlungen, darunter zwei gröfsere üher die Nova im Sternhilde des Schwanes (*Hattyú csillag képében*; T. K. 1877) nnd üher die Erdgestalt (*Földünk alakjáról*; T. K. 1877). Sehr ergiebig war das Jahr 1878 Neben kleineren Erörterungen über das Telephon brachte es einen Leitfaden der Physik für die unteren Klassen der Mittelschulen, sowie Essays über die Bestimmung der Sonnendistanz (*A Nap távolsága*; T. K. 1878) und über die Natur des Planeten Mars (*A Mars bolygó physikai viszonyairól*; T. K. 1878). Deutsch geschriehen ist eine historische Untersuchung über die altehrwürdige *„St. Gerhardberger Sternwarte zu Ofen"* (Mathem.-Naturwissensch. Berichte aus Ungarn **2**). Von dem Ertrage

schriften der einzelnen litterarischen Beiträge der sehr grofsen Mehrzahl der Leser dieser Zeitschrift unverständlich sein würden. Sehr zu bedauern ist, dafs die Bestrebungen Hellers zur Aufklärung der Natur des Polarlichtes in anderen Ländern unbeachtet blieben, während doch die Anzahl der Mitarbeiter im allgemeinen keine so beträchtliche ist, dafs man nicht gerne von der Stellungnahme eines jeden einzelnen Akt nähme. Gegenwärtig wird diesem Mangel, wie wir erfahren werden, eben grofsenteils durch die Vermittelung unseres dahingeschiedenen Freundes, in sehr zweckentsprechender Weise nach Möglichkeit abgeholfen.

Wir stehen bei dem Jahre 1881. Dasselbe ist für Hellers Entwickelung insofern bestimmend gewesen, als ihn damals eine äufsere Veranlassung auf den Weg führte, dessen Betretung ihm zu schönen Erfolgen verhelfen sollte. Die Naturwissenschaftliche Gesellschaft[1]) schrieb nämlich eine Preiskonkurrenz für eine Geschichte der älteren Physik aus, und Hellers Arbeit wurde prämiiert. Zwar ist das Manuskript (A Physika törtenete Aristoteles töl Newtonig) nicht gedruckt worden[2]), aber es war durch dasselbe doch der Grund gelegt zu dem, was in Bälde folgen sollte. Dahin zielte auch eine deutsch abgefafste, den entgegengesetzten Pol des geschichtlichen Werdeganges übersichtlich skizzierende Einführung in das Wesen der Physik von heute.[3]) Durch seinen Freund, den Augen-

des Jahres 1879 seien genannt eine spektroskopische Bearbeitung des Sonnenfleckenproblems (*A napfolt szinképe*; T. K. 1879) und eine erneute Kritik der betreffs der Sonnenparallaxe gewonnenen Daten (*A Napparallaxisröl*; T. K. 1879). Als Verfasser eines Schulbuches hatte Heller erwähntermafsen bereits debutiert; nunmehr schrieb er auch ein Lehrbuch der physikalischen Geographie für Gymnasien (*Physikai földrajz*, Budapest 1880). Und neben den üblichen Schnitzeln aus der Arbeitsmappe sind daneben zwei gröfsere Arbeiten zu verzeichnen, deren eine es mit der einem ungarischen Astronomen vor einem Jahrhundert erwiesenen Auszeichnung zu thun hat (*Az orztrik magyar északi sarkutazók megfigyelései az északi fényröl* (T. K. 1880), während die andere (ebenda) die österreichisch-ungarischen Nordlichtbeobachtungen auf der Insel Jan Mayen bespricht.

1) Mitglied derselben war Heller schon längere Zeit. Zu ihrem korrespondierenden Mitgliede wählte ihn die kgl. ungarische Akademie 1887, zum ordentlichen 1893. Die beiden Antrittsreden, die er jeweils bei der Aufnahme hielt (Die bewegenden Ideen der physikalischen Forschungen im XIX. Jahrhundert; Über die Grundlagen der Energetik) lassen es deutlich hervortreten, dafs die Richtung des Redners eine den historisch-philosophischen Prinzipien seiner Wissenschaft zugewandte war.

2) Das Motto seiner Preisschrift suchte Heller bezeichnenderweise bei Bacon of Verulam: „Nam causarum finalium inquisitio sterilis est et tanquam virgo Deo consecrata nihil parit.“

3) *Ziele und Wege der modernen physikalischen Forschung*; Humboldt 1. Band. Es wird vorzugsweise darauf ausgegangen, zu zeigen, welch tiefgehender Unterschied in Naturanschauung und Naturergründung zwischen einst und jetzt obwaltet. — Das

arzt W. Goldzieher, kam Heller um diese Zeit in Berührung mit der — damals eben ihrem naturwissenschaftlichen Verlage einen hohen Aufschwung verleihenden — Verlagsbandlung F. Enke in Stuttgart, für die er indirekt auch als Mitarbeiter der neuen Monatsschrift Humboldt thätig war, und so kam ein Vertrag hinsichtlich einer umfassenderen Physikgeschichte in deutscher Sprache zum Abschlusse. Diesem grofs angelegten Werke galt nun selbstverständlich in den nächsten Jahren die Kraft des Autors in erster Linie, und schon nach drei Jahren lag es abgeschlossen vor.[1]) Auf diesem Arbeitsfelde herrschte in jenen Jahren eine erfreuliche Betriebsamkeit. Während man sich früher um den auch für die Naturwissenschaften wahrlich nicht gleichgültigen Prozefs der Herausbildung der Wahrheit im Kampfe mit Irrtum und vorgefafster Meinung nur recht wenig gekümmert hatte, gingen in dem kurzen Zeitraume von dreizehn Jahren vier Werke einschlägigen Inhaltes aus deutschen Pressen hervor[2]), deren keines überflüssig ist, die sich vielmehr in der mannigfaltigsten Weise ergänzen und in ihrer Gesamtheit den Erkenntnisfortschritt ihrer Epoche sehr deutlich hervortreten lassen.

So rastlos in der Hervorbringung kleinerer Arbeiten war Heller von da an nicht mehr, denn seine Produktion nahm jetzt einen gröfseren Zug an, und auch die Überhäufung mit Pflichten mufste eine gewisse Reserve nach der anderen Seite hin bedingen. Doch entzog er darum der erwähnten ungarischen Zeitschrift seine Mitarbeiterschaft nicht, und auch selbständige Aufsätze liefs er ihr zukommen. Eine Randnote soll die Jahrgänge 1882 bis 1884 zusammenfassen.[3]) Alsdann tritt eine längere

---

gleiche Jahr sah auch, wie immer, populär-wissenschaftliche Miscellen in ungarischer Sprache entstehen.

1) *Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit*, 1. Band (*Von Aristoteles bis Galilei*), Stuttgart 1882 (XII + 411 S.). 2. Band (*Von Descartes bis Robert Mayer*), Stuttgart 1884 (XV + 754 S.). Dafs eine so sehr dem Bedürfnis entgegenkommende Litteraturerscheinung in der Fachwelt freundlich und beifällig aufgenommen wurde, ist nur natürlich. Der Verfasser dieses Lebensbildes darf sich berufen auf die eingehenden Besprechungen, denen er die beiden Bände unterzogen hat (Zeitschr. für Mathem.; Hist. Abt., **28**, 1883, S. 18 ff.; **31**, 1886, S. 147 ff.)

2) Nämlich 1878 Poggendorff (nach den langjährigen, in Berlin gehaltenen Vorlesungen), 1882—1884 Heller, 1882—1890 Rosenberger, 1892 E. Gerland.

3) *A Föld közepe, sürüségének meghatározása mérleg segitségével* (Bestimmung der Erddichte mittelst der Wage; T. K. 1882); *Leonardo da Vinci és a természettudományok* (Leonardo da Vinci und die Naturwissenschaft; T. K. 1883). In zweiter Auflage erschien 1883 das Compendium der Physik, 1884 dasjenige der physikalischen Erdkunde. Die *„Gesammelten Abhandlungen"* seiner Heidelberger Lehrer G. Kirchhoff und H. von Helmholtz (Leipzig 1882) zeigte Heller im Humboldt (**2.** Band) an; diese Zeitschrift hat auch sonst noch Bücherbesprechungen von ihm zu verzeichnen,

Pause ein, wohl dadurch veranlaſst, daſs der vielseitige Schriftsteller daran ging, seinem Lande ein erstes Lehrbuch der modernen Meteorologie zu schenken. Dasselbe kam 1888 heraus[1]), und in diesem Jahre war Heller auch wieder ganz besonders thätig.[2]) Manche Stunde nahm ihm auch die Teilnahme an dem ungarischen Konversationslexikon weg, das in den Jahren 1893 bis 1900 ausgegeben worden ist. Aber trotzdem fand er noch Zeit und Kraft, um 1898, worauf wir oben schon anspielten, die Schriftleitung des schon länger bestehenden, in Jahreslieferungen erscheinenden periodischen Werkes zu übernehmen, welches den Titel führt: Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Wie kein anderer war er dazu berufen, ein solches Unternehmen in das richtige Fahrwasser zu bringen; beider Idiome gleich mächtig, von der Überzeugung durchdrungen, daſs die Kultur des eigenen Staates mit derjenigen des deutschen Nachbarlandes in innigem Kontakte verbleiben müsse, sorgte er dafür, daſs magyarische Geistesarbeit, sofern sie in der heimatlichen Sprache niedergelegt war, im Auszuge dem Westen zugänglich gemacht wurde. Wir geben der Hoffnung Ausdruck, daſs diese wertvollen Jahresreferate uns für immer erhalten bleiben möchten.

Auch aus den letzten Jahren noch liegen verschiedene Früchte von Hellers Wirksamkeit vor, die wir wieder unten vereinigen.[3]) Seine letzte ungarische Veröffentlichung bildete eine Lebensskizze der Mathematikerin Kowalewska[4]), seine letzte deutsche der Beitrag[5]), den er, von Prof. Curtze und dem Verfasser darum ersucht, zu der im Jahre 1899 von den Verehrern Moritz Cantors dem Altmeister gewidmeten Festschrift spendete. Nicht als ob er etwa von der schriftstellerischen Arbeit hätte jetzt schon Abstand nehmen müssen; allein die Vollendung älterer Entwürfe blieb ihm versagt. Er hatte sich vorgesetzt, eine „Ent-

und ebenso übergab er ihr eine dankenswerte, zumal das Wesen der Atomistik beleuchtende Betrachtung (*Aus wissenschaftlichen Grenzgebieten*; a. a. O. 4. Band).

1) *Az idöjárás*, Budapest 1888.

2) *Adalékok az anyag problémájához*, Ber. d. ungar. Akademie 1888; dasselbe deutsch: *Beiträge zum Problem der Materie*; Mathem.-Naturw. Ber. aus Ungarn 1890. Sehr lesenswert, auch für den Nichtfachmann, ist ferner die Übersicht über die Zielpunkte der exakten Wissenschaften in der Gegenwart (*Physikalische Probleme und Forschungen unserer Tage*; Beilage zur Allgem. Zeitung 1888).

3) *A természettudományok helyzete az irodalomban* (Die Stellung der Naturwissenschaften in der Litteratur; Budapesti Szemle = Budapester Revue 1892); *Ujabb áramlatok a természet philosophiában* (Naturphilosophische Zeitströmungen; Athenaeum 1893).

4) *Kowalewsky Szónya*; Budapesti Szemle 1900, S. 268 ff.

5) *Über die Aufgaben einer Geschichte der Physik*; Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. 9, 1899, S. 175 ff.

wickelungsgeschichte der Physik im XIX. Jahrhundert“ und eine teilweise analoge ungarische Schrift (*A Physika törtenete a XIX. században*), wofür bereits Materialien vorlagen, in Angriff zu nehmen. Am meisten jedoch dürfte beklagt werden, dafs mit seinem Hintritte ein Werk, für das er umfängliche Vorarbeiten unternommen hatte, ungeschrieben bleiben mufs.

Zu Beginn des siebenten Jahrzehnts des vergangenen Jahrhunderts hatte die „Historische Kommission“ in München den Plan gefafst, eine Reihe von Werken über die Geschichte der einzelnen Wissenschaften, mit besonderer Berücksichtigung Deutschlands, herstellen zu lassen. Und als das Säkulum sich neigte, waren sämtliche Bände abgeschlossen — mit einziger Ausnahme der Physik, über der ein eigenartiger Unstern waltete. Mehrere Gelehrte, denen die freilich schwierige und weitaussehende Aufgabe übertragen worden war, hatten mit ihrer Lösung nicht zu stande kommen können. Als deren letzter, G. Karsten in Kiel, langjährigem Leiden erlegen war, richtete die „Kommission“ ihr Augenmerk auf unsern Heller und erlangte im Sommer 1899 seine Einwilligung. Es wird uns mitgeteilt, dafs er mit noch nicht gebrochener Rüstigkeit sich in das Schaffen versenkte, und ungefähr bis zum Jahre 1000 sei er auch mit der Ausarbeitung gediehen. Damit ist leider auch gesagt, dafs die weithin geteilte Hoffnung, diesen unentbehrlichen Abschlufs eines nationalen Unternehmens herbeigeführt zu sehen, mindestens für lange vertagt werden mufs.

Seit 1900 liefs Hellers Spannkraft nach. Er, der unausgesetzt am Schreibtische oder unter den seiner Obsorge anvertrauten Büchern zu walten gewohnt war und nur der Musik[1]) eine vorübergehende Ablenkung von der täglichen Wirksamkeit zugestand, mufste schmerzlich ein Nachlassen seiner Leistungsfähigkeit anerkennen. Man dachte zuvörderst nur an ein nervöses, auf Überarbeitung beruhendes Leiden, und in der That schien ein Aufenthalt im Sanatorium, den er im Juni 1901 in Purkersdorf bei Wien nahm, und dem eine längere Nachkur in Waidhofen a. Y. folgte, von vorteilhaftem Einflusse auf den Kranken zu sein, so dafs er wenigstens wieder anstandslos sich der wissenschaftlichen Lektüre hinzugeben vermochte. Die Sitzungen der Akademie, der er im Januar 1901 seinen Schlufsbericht über die Londoner Beratungen überreicht hatte, besuchte er noch, ohne aber sich weiter aktiv zu beteiligen. Mehr und mehr nahm die unheilvolle Krankheit überhand, die sich als ein tiefgehendes Gehirnleiden zu erkennen gab, und obwohl der Schwerleidende selbst auf dem Krankenbette noch den geliebten Studien nicht entsagen

1) Ausübender Musiker war Heller nicht, aber eine klassische Oper pflegte er so leicht nicht zu versäumen.

konnte[1]), so gaben seine Angehörigen doch bereits vor längerer Zeit jede Hoffnung auf. Furchtbare Krämpfe begannen ihm das Bewufstsein zu rauben, freilich immer nur für Stunden, und so erschien die Auflösung als willkommenes Ende eines Dulderdaseins.

Nicht blofs in Ungarn wird Hellers Name und Gedächtnis fortleben. In dem Mafse, in dem unsere Zeit stets in der Einsicht in die Tragweite historischer Bethätigung zunimmt, werden die Zeitgenossen die Lebensarbeit solcher Männer höher zu schätzen lernen, wie August Heller einer war, und insonderheit wird seine *Geschichte der Physik*[2]) manch jüngerer Generation zum nützlichen Handweiser gereichen. Man hat ja wohl mit Recht gesagt, es sei dasselbe mehr eine Geschichte der Physiker als der Physik selbst; gerade deswegen aber wird Anfängern und solchen, die nicht Berufsgelehrte sind, diese Art der Darstellung die angenehmere sein, und für die allerdings noch höhere Etappe einer blofs die geistigen Strömungen in Betracht ziehenden Auffassung des historischen Werdens ist erstere ein kaum entbehrliches Durchgangsstadium. Und darum werden wir den Verewigten stets unter denen mit Ehren zu nennen verpflichtet sein, die der heranziehenden neuen Zeit der Wissenschaftsgeschichte die Bahn brechen halfen.

1) Das letzte Buch, das er las und erst fast im Todeskampfe weglegte, war Windelbands *Geschichte der antiken Philosophie*. Überhaupt übte auch die Philosopie als solche auf ihn sehr viel Anziehungskraft aus. Wie er über die Zulässigkeit einer blofs aus dem reinen Denken geschöpften Betrachtnng der Dinge urteilte, beweist das von ihm selbst abgelegte Glaubensbekenntnis (Naturwissenschaftliche und philosophische Weltanschauung; Athenaeum 1893).

2) Übersetzungen ins Französische und Italienische waren vorbereitet und unterblieben lediglich aus äufseren Gründen.

Gustav Wertheim.

Von G. Eneström in Stockholm.

Die kleine Gemeinde der mathematisch-historischen Forscher hat in diesem Jahre ein Mitglied verloren, das zugleich ein fleifsiger Mitarbeiter der dritten Folge der Bibliotheca Mathematica gewesen ist. Sein Name ist hier oben zu lesen, über sein Leben und Wirken wird im Folgenden kurz berichtet werden.



Geboren am 9. Juni 1843 zu Imbshausen in Hannover, besuchte Gustav Wertheim nacheinander die Volksschule seines Geburtsortes, die Jacobsohn-Schule zu Seesen am Harz, die Gymnasien zu Hildesheim und Hannover und das Obergymnasium zu Braunschweig. Nachdem er 1862 das Abiturientenexamen bestanden hatte, bezog Wertheim die Universität in Göttingen und studierte später auch in Berlin und Heidelberg. Im Jahre 1866 erwarb er in Göttingen die „facultas docendi", und war 1866—1870 in Hannover, Wiesbaden, Heidelberg, Zürich, Genf und Guntersblum als Privatlehrer thätig. Dann wurde er an der Realschule der israelitischen Gemeinde (Philanthropin) in Frankfurt am Main angestellt, absolvierte dort das Probejahr, und wurde 1872 ordentlicher Lehrer daselbst; aus Gesundheitsrücksichten trat er schon 1900 in den

Ruhestand, und erlag am 31. August 1902 zu Frankfurt am Main einem Schlaganfalle.[1])

Hinsichtlich seiner Lehrerthätigkeit wird ihm von berufener Seite nachgerühmt, dafs er eine hervorragende Fähigkeit besafs, den Schülern durch die Klarheit des Vortrages das Verständnis auch der schwierigeren Sachen zu erleichtern. Hier habe ich nur seine schriftstellerische Wirksamkeit etwas ausführlicher zu behandeln.

Auf drei Gebieten war Wertheim als Schriftsteller thätig, nämlich als Übersetzer wissenschaftlicher Werke, als Zahlentheoretiker und als mathematisch-historischer Forscher. Resultate seiner Wirksamkeit auf dem ersten Gebiete sind die Übersetzungen des wohlbekannten Handbuches der höheren Algebra von J. A. Serret[2]), des ersten Bandes des Handbuches der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait (in Gemeinschaft mit H. Helmholtz)[3]), der Vorlesungen über einige neuere Fortschritte der Physik von P. G. Tait[4]), sowie der Elemente der mathematischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus von J. J. Thomson[5]); zu allen drei Gebieten kann seine Übersetzung der Arithmetik des Diofantos[6]) gerechnet werden, die auch die Schrift über die Polygonalzahlen enthält und als Anhang die griechischen arithmetischen Epigramme und das Rinderproblem des Archimedes bringt. Seiner Thätigkeit als Übersetzer widmete sich Wertheim wohl zunächst aus materiellen Rücksichten, aber er war auch besonders dazu berufen, durch seine umfassenden Sprachkenntnisse und die Leichtigkeit, womit er die passenden Ausdrücke fand, um den Lesern einen Gegenstand verständlich darzustellen.

Für die Zahlentheorie hatte sich Wertheim sehr früh interessiert, und schon 1874 veröffentlichte er in einem Programme seiner Schule

1) Die vorangehenden biographischen Notizen sind wesentlich aus einem von Herrn H. Dobriner für die Zeitschrift für mathematischen Unterricht verfafsten Nachrufe entnommen.

2) J. A. Serret, *Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von* G. Wertheim. Band 1—2. Leipzig, Teubner 1868. VIII + 508 S.; VIII + 540 S. — Zweite Auflage. Leipzig, Teubner 1878—1879. VIII + 528 S.; VIII + 574 S. 8°.

3) W. Thomson und P. G. Tait, *Handbuch der theoretischen Physik. Autorisierte deutsche Übersetzung von* H. Helmholtz *und* G. Wertheim. Band 1. Theil 1—2. Braunschweig, Vieweg 1871—1874. XIX + 380 S.; XXVI + 453 S. 8°.

4) P. G. Tait, *Vorlesungen über einige neuere Fortschritte der Physik. Autorisierte deutsche Ausgabe von* G. Wertheim. Braunschweig, Vieweg 1877. XVII + 279 S. 8°.

5) J. J. Thomson, *Elemente der mathematischen Theorie der Elektricität und des Magnetismus. Deutsche Ausgabe von* G. Wertheim. Braunschweig, Vieweg 1897. XIII + 414 S. 8°.

6) *Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von* G. Wertheim. Leipzig, Teubner 1890. X + 346 S. 8°.

eine kurze Einführung in dieselbe.[1]) Dreizehn Jahre später erschien ein ausführliches Lehrbuch[2]), auch für Anfänger bestimmt und etwa den vier ersten Abschnitten von Dirichlets *Vorlesungen* entsprechend. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben waren beigefügt, und auf die Anwendungen der verschiedenen Theorien wurde besonderes Gewicht gelegt. Auch die oben erwähnte im Jahre 1890 erschienene Diofantos-Übersetzung, der Wertheim Erläuterungen hinzugefügt hat, verfolgt wesentlich einen pädagogischen Zweck und kann als eine Exempelsammlung zur elementaren Zahlentheorie betrachtet werden; sie enthält auch die Zusätze von Fermat mit Anmerkungen von Wertheim, die Lehre von den figurierten Zahlen und Lagranges Zerlegung einer Zahl in eine Summe von höchstens vier Quadratzahlen. Noch eine vierte Arbeit ähnlicher Art mit dem Titel *Anfangsgründe der Zahlenlehre* hatte Wertheim kurz vor seinem Tode fertig[3]), und sein Vorwort dazu vom 19. August 1902 enthält wohl die letzten Zeilen wissenschaftlichen Inhalts, die aus seiner Feder geflossen sind. Diese Anfangsgründe sind eigentlich nicht für Studierende an den Universitäten, sondern für Gebildete aller Stände bestimmt, also ein Versuch die Zahlentheorie zu popularisieren. Hier werden nach einander die Teilbarkeit der Zahlen, der Begriff der Kongruenz, Kongruenzen ersten Grades, einige unbestimmte Gleichungen höheren Grades, die Kettenbrüche, Potenzreste und Kongruenzen zweiten Grades behandelt. Unter den Aufgaben sind viele aus mathematischen Klassikern entnommen, und zahlreiche historische Notizen sind eingefügt.

Es ist natürlich, dafs Wertheim bei der Bearbeitung seiner Lehrbücher auf Fragen stiefs, die ihm zu eigenen Untersuchungen Anlafs geben konnten, und dadurch bekam er Material zu einigen zahlentheoretischen Aufsätzen, die er in Zeitschriften veröffentlichte. Besonders interessierte ihn die Berechnung der primitiven Wurzeln der Primzahlen, und auf diesem Gebiete verdankt man ihm teils Tabellen der kleinsten primitiven Wurzeln aller ungraden Primzahlen unter 5000[4]), teils einige Sätze über primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^\lambda + 1$, in welcher

1) *Einführung in die Zahlentheorie.* Frankfurt am Main 1874 (Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt am Main). 40 S. 4°.

2) *Elemente der Zahlentheorie.* Leipzig, Teubner 1887. X + 382 S. 8°.

3) *Anfangsgründe der Zahlentheorie.* Braunschweig, Vieweg 1902. XII + 427 + (1) S. 8° + 4 Porträts.

4) *Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller ungeraden Primzahlen p unter 3000.* Acta Mathem. **17**, 1893, 315—320. — *Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000.* Acta Mathem. **20**, 1896, 153—158. — *Berichtigung zur Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln der Primzahlen unter 5000.* Acta Mathem. **22**, 1898, 200.

$q=1$ oder eine ungerade Primzahl ist[1]), wobei er zuerst eine gegebene Zahl als primitive Wurzel annimmt und dann untersucht, welche Form die entsprechende Primzahl haben mufs. Andere Aufsätze beziehen sich auf Lösung[2]) der Gleichung $x^2+y^2=z^2$, auf Herleitung des Satzes, dafs jede Zahl in höchstens vier Quadratzahlen zerlegbar ist[3]), und auf Zerlegung ungerader Zahlen in Faktoren[4]) vermittelst eines von Fermat herrührenden Verfahrens, wobei die gegebene Zahl als die Differenz zweier Quadratzahlen ausgedrückt wird.

Wie man sieht, sind die zahlentheoretischen Fragen, die Wertheim behandelt hat, keineswegs von gröfserer Bedeutung, und gewifs beanspruchte er auch nicht selbst, zur Entwickelung der Zahlentheorie beigetragen zu haben, aber zur Verbreitung des Interesses für diesen wichtigen Zweig der Mathematik ist er wohl nicht ohne Erfolg thätig gewesen.

Den Anlafs sich mit mathematisch-historischen Untersuchungen zu beschäftigen, scheint Wertheim durch das Studium gewisser zahlentheoretischer Aufgaben bekommen zu haben, und als seine erste Arbeit auf historischem Gebiete könnte man vielleicht die schon zweimal erwähnte Übersetzung der Arithmetik des Diofantos ansehen, aber das historische Interesse ist hier nicht besonders hervortretend, und seine erste rein historische Schrift gehört einem wesentlich anderen Gebiete an, nämlich der Geschichte der jüdischen Mathematik. In dieser Schrift, die 1893 veröffentlicht wurde[5]), berichtet er über die im Jahre 1534 in Konstantinopel erschienene hebräische Arithmetik des Oberrabbiners Elia Misrachi (um 1455—1526). Nach einer Einleitung über Misrachi und seine Schriften sowie über die Quellen, die dieser für seine Arithmetik benutzte, giebt Wertheim ausführliche Auskunft über den Inhalt derselben; aus der dritten Abteilung, die eine Aufgabensammlung ist, wird das Wichtigste in deutscher Übersetzung mitgeteilt. In der zweiten, 1896 erschienenen

1) *Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^n q+1$, in welcher $q=1$ oder eine ungerade Primzahl ist.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **25**, 1894, 81—97. — *Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^\lambda+1$, in welcher $q=1$ oder eine ungerade Primzahl ist.* Acta Mathem. **20**, 1896, 143—152.

2) *Ermittelung aller einem bestimmten Zahlengebiet angehörenden Lösungen der Pythagoreischen Gleichung.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **18**, 1887, 418—420.

3) *Zum Beweise des Bachetschen Satzes.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **22**, 1891, 422—423.

4) *Über die Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **27**, 1896, 256—257.

5) *Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik.* Frankfurt am Main 1874 (Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt am Main). 42 S. 4°. — Zweite verbesserte Auflage. Braunschweig, Vieweg 1896. (7) + 68 S. 8°.

Auflage seiner Monographie brachte WERTHEIM viele Verbesserungen und Zusätze an; die schon in der ersten Auflage vorkommenden Verweisungen auf Werke, welche dieselben oder ähnliche Aufgaben wie MISRACHI behandeln, sind hier wesentlich vervollständigt.

Seit dem Jahre 1897 war WERTHEIMS Interesse fast ausschliefslich auf mathematisch-historische Gegenstände gerichtet, und er veröffentlichte eine ziemlich grofse Anzahl hierher gehörender Aufsätze. Zur Geschichte der Mathematik bei den Juden gehören zwei Artikel[1]) über die Werke *Porto astronomico* (1636) und *Introduzione alla geografia* (1640) des italienischen Juden und Talmudlehrers EMANUEL PORTO aus Triest (erste Hälfte des 17. Jahrhunderts); das erste Buch PORTOS enthielt u. a. eine sphärische Trigonometrie mit Tafeln, das zweite ebenso eine ebene Trigonometrie. Der Geschichte der Zahlentheorie widmete er einige Aufsätze, wovon einen über DIOFANTOS und drei über FERMAT. Zweck des ersten Aufsatzes[2]) ist, den Text der Schlufsaufgabe in DIOFANTOS' Schrift über Polygonalzahlen: „Auf wie viele Arten kann eine gegebene Zahl Polygonalzahl sein?“ zu ergänzen; bekanntlich ist der Text verstümmelt und bricht in der Mitte ab. WERTHEIM versucht zu zeigen, dafs DIOFANTOS sehr wohl zur Formel

$$2P = n[(a-2)(n-1)+2]$$

gelangt sein kann, wo P die Polygonalzahl, n die Seite und a die Zahl der Ecke ist. DIOFANTOS soll dadurch veranlafst worden sein, das Doppelte der gegebenen Zahl versuchsweise in zwei ungleiche Faktoren zu zerlegen, worauf er vermittelst der Formel untersuchte, ob die Zerlegung brauchbar ist oder nicht. Die Herleitung der Formel kann ja sehr wohl im verlornen Stücke der Schrift des DIOFANTOS enthalten gewesen sein; ob aber dieser daraus die von WERTHEIM angegebenen Schlüsse gezogen hatte, dürfte mehr als unsicher sein. Von den Aufsätzen, die sich auf FERMAT beziehen, behandelt einer[3]) ausführlich den 1657—1658 geführten zahlentheoretischen Streit mit WALLIS; während desselben stellte bekanntlich FERMAT als dritte Aufgabe die Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ auf, und diese Aufgabe wurde wirklich von BROUNCKER gelöst. Ein anderer Artikel[4]) macht darauf aufmerksam, dafs FRENICLE

1) *EMANUEL PORTO's Porto astronomico. Ein zweites mathematisches Werk EMANUEL PORTOS.* Monatsschr. für Gesch. und Wiss. des Judenthums **41**, 1897, 616—622; **42**, 1898, 375—380.

2) *Die Schlufsaufgabe in DIOPHANTS Schrift über Polygonalzahlen.* Zeitschr. für Mathem. **42**, 1897; Hist. Abt. 121—126.

3) *PIERRE FERMATS Streit mit JOHN WALLIS.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 555—576.

4) *Ein von FERMAT herrührender Satz.* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abt. 4—7.

de Bessy in seiner Schrift *Traité des triangles rectangles en nombres* ohne Zweifel eine ihm von Fermat mitgeteilte Methode auseinander gesetzt hat, um zu beweisen, dafs der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seiten keine Quadratzahl sein kann, aus welchem Satz bekanntlich unmittelbar folgt, dafs die Summe zweier Biquadrate kein Biquadrat sein kann. Ein dritter Artikel[1]) enthält die Bemerkung, dafs der Term „columna" nicht, wie von P. Tannery angenommen wurde, von Fermat selbst gebildet worden ist, sondern schon bei Maurolico vorkommt. Übrigens hat Wertheim auch durch andere kleinere Notizen oder durch Recensionen sein reges Interesse für die Geschichte der Zahlentheorie gezeigt.[2])

Wertheims übrige Aufsätze mathematisch-historischen Inhalts beziehen sich auf Gegenstände der Arithmetik und Algebra oder auf Verfasser, die sich damit beschäftigt haben. So hat er versucht[3]) vermittelst der Regel des doppelten Ansatzes die Heronischen Kubikwurzeln und den Archimedischen Wert für $\sqrt{3}$ herzuleiten, sowie die Heronische Herleitung der Formel

$$\sqrt{a^2+r} \sim \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+r}{a}\right)$$

wiederzufinden, und er hat[4]) ein paar dunkle Punkte im *Tractatus de numeris datis* des Jordanus Nemorarius aufgeklärt. Weiter hat er sich mit der Erfindung der Kettenbrüche beschäftigt.[5]) Bekanntlich war man bisher der Ansicht, dafs diese Erfindung dem italienischen Mathematiker P. A. Cataldi zuzuschreiben ist, aber Wertheim bemerkt, dafs schon Bombelli in seiner *Algebra* (1572) ein Verfahren anwandte, das thatsächlich zu Kettenbrüchen führt, und folgert daraus, dafs es angebracht ist, diesen als den ersten Erfinder solcher Brüche zu betrachten. Die an sich richtige Bemerkung ist freilich nicht ganz neu[6]), und ob dadurch das Erfinderrecht des Bombelli sichergestellt ist, kann wohl bezweifelt

1) *Fermats Observatio zum Satze des Nikomachus.* Zeitschr. für Mathem. **43**, 1898; Hist. Abt. 41—42.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 360—361; 3_3, 1902, S. 144—145, 248—251.

3) *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln.* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abt. 1—3. — *Über die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln bei Heron von Alexandria.* Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 253—254.

4) *Über die Lösungen einiger Aufgaben im „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius.* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 417—420.

5) *Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche.* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, 147—160.

6) Vgl. A. Favaro, *Notizie storiche sulle frazioni continue.* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1874, 494—498.

werden, da bei diesem eine Form für Kettenbrüche vollständig fehlt. Eine kurze Notiz[1]) über den Ursprung des Zeichens x erwähne ich nur im Vorübergehen, da WERTHEIM selbst etwas später in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht **32**, 1901, S. 201 seine Erklärung als unbefriedigend bezeichnet hat, und ebenso nenne ich nnr beiläufig, dafs WERTHEIM in der Bibliotheca Mathematica zur Abteilung: Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von CANTORS „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" Beiträge geliefert hat, und auch direkt Herrn CANTOR einige von diesem für den zweiten Band benutzte Notizen mitgeteilt hat.[2])

Drei mathematisch-historische Aufsätze von WERTHEIM habe ich noch zu nennen, nämlich über die Logistik (1559) des J. BUTEO[3]), über P. A. CATALDI[4]) und über die Algebra (1659) des J. H. RAHN.[5]) Der zweite Aufsatz bezweckt hervorzuheben, dafs CATALDIS Bedeutung für die Entwickelung der Mathematik nicht so grofs ist, als man bisher, hauptsächlich auf die Autorität von LIBRI gestützt, angenommen hat; die zwei anderen Aufsätze enthalten sorgfältige Analysen der betreffenden Schriften, wobei WERTHEIM Gelegenheit hat einige Angaben von CANTOR zu vervollständigen oder zu berichtigen; so z. B. bestätigt er die schon von H. KONEN[6]) gemachte Bemerkung, dafs J. PELL sich garnicht mit der nach ihm genannten Gleichung $a x^2 + 1 = y^2$ beschäftigt hat.

Bevor wir den Bericht über WERTHEIMS Wirksamkeit auf dem mathematisch-historischem Gebiete beenden, haben wir noch zu erwähnen, dafs in den Recensionen, welche er für die Zeitschrift für mathematischen Unterricht redigierte, Berichtigungen einzelner mathematisch-historischer Angaben zu finden sind.[7])

Aus dem Vorhergehenden dürfte ersichtlich sein, dafs WERTHEIM eine umfassende Litteraturkenntnis gehabt haben mufs, und diese verdankte er hauptsächlich dem Umstande, dafs er selbst eine reichhaltige

---

1) *Über den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben x.* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899; Hist. Abt. 48. Zeitschr. für mathem. Unterr. **30**, 1899, 310—341.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 504—505; 2_3, 1901, 143—148, 354—355, 357. — CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, 305, 399, 481, 515, 573, 613, 669, 781, 785.

3) *Die Logistik des JOHANNES BUTEO.* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 213—219.

4) *Ein Beitrag zur Beurteilung des PIETRO ANTONIO CATALDI.* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 76—83.

5) *Die Algebra des JOHANN HEINRICH RAHN (1659) und die englische Übersetzung derselben.* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 113—126.

6) H. KONEN, *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$ (Leipzig 1901), S. 34.

7) Siehe z. B. Zeitschr. für mathem. Unterr. **31**, 1900, 199—201; **32**, 1901, 109—114, 374—376.

und wertvolle mathematische Bibliothek[1]) besafs. Seine Bibliothek zu ergänzen war besonders während der letzten Jahre seines Lebens Gegenstand seiner eifrigen Anstrengungen, und in seinen Briefen an den Schreiber dieser Zeilen kommen oft Mitteilungen über von ihm erworbene seltene mathematische Bücher vor.

Wollen wir zum Schlufs Wertheims Verdienste um die mathematisch-historische Forschung zusammenfassen, so können wir sagen, dafs er sich vorzugsweise damit beschäftigt hat teils zu erklären, auf welche Weise gewisse in den Schriften älterer Mathematiker vorkommende Sätze hergeleitet worden sind, teils an einzelnen Punkten die Angaben der Geschichtsschreiber der Mathematik zu berichtigen. Eine ausführlichere Untersuchung hat er dagegen nur ausnahmsweise ausgeführt, und die Geschichte der Regel des falschen Ansatzes, die er ein paar Jahre vor seinem Tode in Angriff genommen hatte, ist unvollendet geblieben.

1) In Frankfurt am Main giebt es keine öffentliche Bibliothek, die mathematische Bücher kauft.

Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1897—1902.

Von A. von Braunmühl in München.

Dem Wunsche des Herausgebers dieser Zeitschrift entsprechend, will ich an zwei frühere Referate in ihren Spalten anknüpfend (Jahrgang 1895, 89—90 und 1897, 113—115) über die mathematisch-historischen Vorlesungen und Übungen berichten, die ich nun bereits seit einem Decennium an der Münchner technischen Hochschule abhalte. Seit dem Jahre 1897 war ich infolge der beständig wachsenden Arbeitslast an unserer Schule nur einmal im stande neben meinen mathematischen Vorlesungen eine geschichtliche zu halten, nämlich im Wintersemester 1899/1900 über Geschichte der Trigonometrie, welche die im Jahrgang 1897 erwähnte Wintervorlesung wiederholte und weiterführte. Der erste Teil dieser Vorlesungen erschien bereits 1900 bei Teubner und behandelte die Geschichte der Trigonometrie von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen, während der zweite Teil, welcher bis zur neuesten Zeit reicht, sich soeben im Druck befindet. Mufste ich in den letzten Jahren darauf verzichten, wie es mein Wunsch gewesen wäre, wenigstens in einem Semester eine Vorlesung über ein geschichtliches Thema abzuhalten, so war es mir doch gegönnt, mein mathematisch-historisches Seminar ohne Unterbrechung fortzuführen. Bis zum Wintersemester 1899/1900 verfuhr ich dabei in derselben Weise, wie ich dies im Jahrgang 1897 dieser Zeitschrift mitgeteilt habe, indem ich über verschiedenartige, teils von den Teilnehmern selbst gewählte, teils von mir gestellte Themata Vorträge abhalten liefs. Die Frucht derselben war hier und da eine kleine Arbeit, die in dieser Zeitschrift veröffentlicht wurde; so hat Herr S. Haller einen *Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphärischer Dreiecke durch stereographische Projektion* (1899, 71—80), Herr G. Heinrich eine *Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel* (1900, 90—92) und einen Aufsatz über *James Gregorys Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1901, 77—85) geliefert, und zuletzt kamen noch zwei Beiträge von Herrn A. A. Björnbo: *Hat Menelaos einen Fixsternkatalog verfafst?* (1901, 196—212) und *Über*

zwei mathematische Handschriften aus dem 14. Jahrhundert (1902, 63—75) hinzu, sowie von Herrn Kutta *Elliptische und andere Integrale bei Wallis* (1901, 230—234).

Vom Wintersemester 1899/1900 an konnte ich, da sich inzwischen meine Zuhörerschaft etwas homogener als früher gestaltet hatte, dazu übergehen, Cyklen von Vorträgen über ein bestimmtes Gebiet einzurichten, welche sich auf ein ganzes Jahr ausdehnten. Solcher Cyklen fanden bisher drei statt. Der erste behandelte die Geschichte der Quadratur des Kreises von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart (in 14 oft mehrstündigen Vorträgen), der zweite die Geschichte der Entstehung der Infinitesimalrechnung, mit der Exhaustionsmethode der Alten beginnend, mit Leibniz und Newton schliefsend (in ebenso vielen Vorträgen), der dritte bezog sich auf die Geschichte der Geometrie im 16. und 17. Jahrhundert mit besonderer Betonung der Entstehungsgeschichte der analytischen Geometrie (17 Vorträge). Er begann mit der *Geometria deutsch* und Johann Werners Arbeiten und schlofs mit Besprechung der Leistungen von Wallis und de la Hire. Das Verfahren, welches ich bei Abhaltung dieser Cyklen einschlug, bestand darin, dafs ich zu Beginn eine kurze Übersicht über den zu besprechenden Stoff gab, denselben in Abschnitte einteilte und deren Behandlung den einzelnen Studierenden zuwies, zugleich mit Angabe der hauptsächlichsten Quellen, wobei ich stets ein Studium der Originalarbeiten verlangte. Die einzelnen Vorträge wurden schriftlich ausgearbeitet und mit einer Disposition versehen. Inhalt und Form wurden einer Kritik unterzogen, auch knüpften sich mitunter an die einzelnen Vorträge sehr lebhafte Diskussionen. Übrigens mag noch bemerkt werden, dafs auch in jenen Jahren, in welchen ich diese Cyklen abhielt, gelegentlich über andere Gebiete referiert wurde, für welche sich einzelne Teilnehmer besonders interessierten.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1:15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1:190, 197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139.

1:663. Aus dem Umstande, dafs in einer lateinischen Abhandlung über die isoperimetrische Aufgabe die Form „Archimenides" vorkommt, folgert Herr Cantor noch in der 2. Auflage seiner *Vorlesungen*, dafs die Arbeiten des Zenodoros den Arabern bekannt gewesen sein müssen. Diese Schlufsweise kann wohl ohne besondere Begründung als irrig bezeichnet werden (vgl. Curtze, Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 265), und übrigens ist ja von verschiedenen Seiten die Aufmerksamkeit darauf gelenkt worden, dafs die Form „Archimenides" auch in solchen lateinischen Übersetzungen vorkommt, die ohne Zweifel direkt aus dem Griechischen gemacht worden sind. Bekanntlich hat Herr Suter schon 1884 (Zeitschr. für Mathem. **29**; Hist. Abt. S. 99—101) diesen Gegenstand ausführlich behandelt, und Herr Heiberg einige Jahre später (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1890, S. 7) darauf hingewiesen, dafs in einer Handschrift der (direkt aus dem Griechischen herstammenden) Übersetzung der „Quadratura parabolae" durch Wilhelm von Moerbek, die Form „Archimenides" sich findet. G. Eneström.

1:671, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 449—500. — **1:749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805,**

807, 808, 812, 823, 852, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503.

2:97. Die Frage über die lückenlose Ausfüllung des Raumes war schon vor Roger Bacon behandelt worden. Anknüpfend an einer Stelle in Aristoteles' *De coelo* lib. 3, cap. 8 (ed. Didot II, S. 421), hatte Averroes behauptet, dafs nicht nur 8 Würfel, sondern auch 12 an einer Ecke zusammenstofsende Tetraeder den Raum erfüllen (vgl. De Marchi, Biblioth. Mathem. 1885, Sp. 195), und wahrscheinlich hat Bacon die Arbeit des Averroes gekannt. Dagegen rührt vielleicht die Behauptung, dafs 9 an einer Ecke zusammenstofsende Oktaeder den Raum erfüllen, von Bacon selbst her.

G. Eneström.

2:98, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

2:116. Siehe oben S. 405 die Bemerkung zu **1**:663.

2:122, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504.

2:126. Dafs Johannes de Liveriis mit Johannes de Lineriis identisch ist, dürfte jetzt ziemlich sicher sein, und es ist nicht richtig, dafs Steinschneider hier zwei Persönlichkeiten unterscheidet; im Gegenteil hat Steinschneider in der Biblioth. Mathem. 1889, S. 37—38 darauf hingewiesen, dafs er von S. Günther an der von Herrn Cantor zitierten Stelle mifsverstanden worden ist.

2:127. Über Dominicus de Clavasio hat M. Curtze in der Biblioth. Mathem. 1895, S. 107—110 einige Notizen mitgeteilt. Dominicus war in Chivasso in Italien geboren, und gehörte 1349—1350 der Artistenfakultät, 1357—1359 der medizinischen Fakultät in Paris als Lehrer an. Seine wichtigste Arbeit *Practica geometriae* wurde 1346 in Paris verfafst.

2:128, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:163, 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:210, 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243,** siehe

BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2**:**253**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2**:**273**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2**:**274**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2**:**282**, **283**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2**:**284**, **286**, **287**, **289**, **290**, **291**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2**:**296**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2**:**313**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**:**328**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2**:**334**, **353**, **381**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**:**385**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81. — **2**:**386**, **395**, **401**, **405**, **425**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2**:**430**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2**:**442**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2**:**449**, **474**, **480**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2**:**481**, **482**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2**:**482**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2**:**484**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:**486**, **489**, **490**, **497**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2**:**509**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2**:**510**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2**:**512**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:**514**, **516**, **517**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2**:**530**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:**532**, **535**, **541**, **548**, **549**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2**:**550**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2**:**554**, **569**, **572**, **573**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**:**572**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:**576**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2**:**579**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2**:**582**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**:**583**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2**:**592**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:**594**, **597**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2**:**597**, **599—600**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:**602**, **603—604**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271. — **2**:**611**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2**:**612**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2**:**613**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2**:**614**, **620**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**:**621**, **623**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2**:**638**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2**:**642**, **643**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2**:**655**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2**:**659**, **660**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2**:**665**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2**:**683**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2**:**700**, **701**, **703**, **704**, **705**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2**:**719**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2**:**721**, **742**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2**:**742**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2**:**746**, **747**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2**:**766**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2**:**767**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2**:**772**, **775**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2**:**777**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2**:**783**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **2**:**784**, **820**, **825**, **840**, **856**, **865**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2**:**876**, **878**, **879**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2**:**891**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2**:**901**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2**:**VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2**:**IX**, **X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3:**9**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3**:**10**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3**:**12**, **17**, **22**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3**:**26**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3**:**45—48**, **49**, **50**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3**:**70**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3**:**100**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3**:**116**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3**:**117**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3**:**123**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513.

3:124. Der Angabe, daſs Jakob Bernoulli 1695 eine neue Ausgabe der Descartesschen Geometrie veranstaltete, kann hinzugefügt werden, daſs es sich um die lateinische Übersetzung handelt, und daſs Bernoullis Name weder auf dem Titel noch im Buche vorkommt. Der Titel giebt an, es sei die Ausgabe „a viro clariss. denuo revisa et ab innumeris mendis repurgata“ und die erste „praefatio ad lectorem“, die wahrscheinlich vom Verleger herrührt (die zweite „praefatio“ ist die alte Schootensche), spricht von einem „vir clarissimus qui excudendo huic operi suam voluit commodare operam“ und etwas weiter unten von „vir clarissimus, correctoris vicibus defunctus“. Da aber Jakob Bernoulli gewiſs Verfasser der von Herrn Cantor erwähnten Anmerkungen ist, so kann man wohl daraus schlieſsen, daſs er mit dem „cor-

rector" identisch war, obgleich dieser Umstand weder aus dem Titel, noch aus der zitierten Vorrede unzweideutig hervorzugehen scheint.

G. Eneström.

3:151, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3:174**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3:188**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3:201**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:207**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:218**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:220**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3:224**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:225, 228**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3:232**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:246**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3:303**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3:330—331**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3:447, 455**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3:473**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155. — **3:477, 479**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3:521**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3:565, 571, 578**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3:636—637**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3:652**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3:660, 667, 689, 695**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442. — **3:750, 758, 760, 766**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3:774, 798**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3:845**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447. — **3:845**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3:848, 881**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3:882**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447 — **3:892**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3:IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Über die angebliche Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer. Man trifft in mathematisch-historischen Abhandlungen immer und immer wieder auf die Klage über die Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer. Es ist an der Zeit, dafs diese irrige Anschauung einmal einer richtigen Darstellung Platz mache. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die arabischen[1]) Übersetzer des 8. und 9. Jahrh., die mit der griechischen Sprache ja wohl vertraut waren, die griechischen Eigennamen so in ihre Sprache transskribiert haben, wie sie dieselben von den damaligen Griechen aussprechen hörten; so schrieben sie also, um das für unsern Zweck geeignetste Beispiel zu wählen, Arschimides oder Arschimidis (das letzte η wurde, da es den Ton nicht hat, als kurz aufgefafst, daher im Arabischen nicht geschrieben, und konnte daher als *i* oder *e* gelesen werden); das griechische χ wurde nämlich damals schon, wie noch heutzutage, vor *e* und *i* nahezu wie *sch* ausgesprochen, hätte es sich mehr dem deutschen (alemannischen) *ch* genähert, so hätten sie dasselbe durch ihr *ḥ* oder *h* wiedergegeben; das griechische η wurde ebenfalls damals schon wie heute = *i* ausgesprochen. Woher kommt es nun, dafs dieser und andere Namen so abweichende Schreibweisen erfahren haben? Zwei Klassen von Leuten tragen daran die Schuld: in erster Linie die arabischen Abschreiber, und in zweiter die mittelalterlichen Übersetzer ins Lateinische. Jene Abschreiber, die um das tägliche Brod arbeiteten, führten infolge dessen ihre Arbeiten oft sehr flüchtig aus, sie liefsen also z. B. oft, besonders in der späteren Zeit, die sog. diakritischen Punkte weg, die in der arabischen Schrift zur Unterschei-

1) Dafs viele dieser Übersetzer christliche Syrer waren, und viele Übersetzungen aus dem Griechischen erst durch Vermittlung des Syrischen gemacht worden sind, thut hier nichts zur Sache, da die Buchstaben, um die es sich hier handelt, in beiden Sprachen identisch sind.

dung von sonst gleich aussehenden Konsonanten dienen; läfst man z. B. beim arabischen *sch* die drei Punkte über demselben weg, so lautet es *s*, läfst man beim arabischen *i (j)* die zwei Punkte unter demselben weg, so kann es gelesen werden *n* (oder auch *t* oder *b*), daraus ergeben sich dann sofort die Lesarten Arsimides (oder Ersemides), Arschimenides oder Arsimenides, Archimenides, ja sogar Arsamites. Ebenso wurde aus Menelaos, das wohl anfänglich Menelâôs transskribiert worden ist, dann auch in Menâlâôs und sogar Mânâlâôs überging, Milêus, indem das unpunktierte *n* = *i* und das *â* = *ê* (wofür die Araber keinen besondern Buchstaben besitzen) gelesen wurde. Wenn man nun jene Flüchtigkeitsfehler den um den Lohn arbeitenden arabischen Abschreibern verzeihen kann, so wird man das weniger gut den abendländischen Übersetzern gegenüber können, von denen man eine bessere Bildung erwarten sollte, von denen man voraussetzen dürfte, dafs sie schon einmal von einem griechischen Mathematiker Archimedes gehört haben sollten. Wer aber in einem arabischen Text Arsimenides liest, und dies stehen läfst, oder es etwa in Archimenides verwandelt, von dem mufs man annehmen, dafs er entweder noch gar nie etwas von einem Archimedes gehört hat, oder diesen Namen vielleicht nur dunkel in Erinnerung hat, aber seine wahre Form doch nicht kennt. Wir für unsern Teil messen also die gröfsere Schuld an diesen korrumpierten Namen den „berühmten" Übersetzern des 12. Jahrh. zu als den armen arabischen Abschreibern; die syrisch-arabischen Übersetzer des 7. bis 9. Jahrh. aber trifft sicher keine Schuld, was auch die ältesten und besten arabischen Manuskripte heute noch beweisen. Heinrich Suter.

Weierstrass über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. Weierstrass hat sein berühmtes, analytisch strenges Beispiel über die falsche Dirichletsche Schlufsweise am 14. Juli 1870 der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegt.[1]) In einer im mathematischen Lesezimmer zu Göttingen ausgestellten, handschriftlichen Ausarbeitung der Weierstrassschen Vorlesungen: „Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen" vom S. S. 1874 fand ich in einer Ergänzung am Schlufse des Bandes eine interessante Mitteilung, die wohl für alle diejenigen, die sich für das Dirichletsche Prinzip und dessen Geschichte interessieren, lehrreich sein kann. Hauptsächlich aus dem Grunde, weil die Mitteilung ein in gewöhnlichen Referaten ganz unbekanntes, besonders klares und aus dem Gesichtspunkt eines intuitiven Beweises recht treffendes geometrisches Beispiel enthält, welches wohl mit dem bekannten analytischen zu gleicher Zeit im Ideenkreis von Weierstrass entstanden ist. Dies Beispiel knüpft an den Legendreschen Beweis für den zweiten Teil seiner Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, ohne das Parallelenaxiom zu gebrauchen, an.

Die Mitteilung ist ein Referat über einen Vortrag von Weierstrass im Berliner mathematischen Seminar vom 22. Juni 1872 und der betreffende Teil soll nun im Wortlaute der Ausarbeitung im Folgenden angeführt werden:

„Das Dirichletsche Prinzip kann höchstens ein Hülfsmittel sein, um

1) Siehe Weierstrass, *Mathematische Werke*, Bd. II: „Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip", S. 49—54.

Sätze zu finden, aber keine Basis einer Theorie, wie bei Riemann[1]), und kein strenges Beweismittel bilden. Man kann zwar von jeder Funktion behaupten, daſs es für sie eine untere Grenze giebt, aber nicht, daſs diese untere Grenze erreicht wird. Hierzu mögen folgende Beispiele dienen:

Legendre hat versucht, den Satz von der Summe der Dreieckswinkel unabhängig von der Parallelentheorie zu beweisen; und zwar beweist er, daſs diese Summe 1) nicht gröſser als $2R$ sein kann; 2) auch nicht kleiner als $2R$ sein kann. Der Beweis des ersten Teiles ist richtig, der zweite Teil leidet an dem Fehler, daſs er annimmt, daſs das Maximum erreicht wird. Er sagt nämlich: unter allen Dreiecken, die man konstruieren kann, giebt es jedenfalls eins, dessen Winkelsumme ein Maximum ist. Gröſser als $2R$ kann dieses Maximum nicht sein, also ist das erreichbare Maximum $= 2R$. Erreicht aber ein Dreieck dieses Maximum, so ist leicht zu zeigen, daſs alle Dreiecke es erreichen müssen, folglich u. s. w. Hierbei bleibt aber vollständig unerwiesen, ob die Funktion das Maximum wirklich erreicht.

„Bemerkung von Weierstrass in den Vorlesungen über Variationsrechnung 1879: Daſs hier ein Fehlschluſs gemacht ist, erkennt man sofort, wenn man auf das sphärische Dreieck, bei welchem die Summe der Winkel nicht kleiner sein kann als 2 Rechte, dieselben Schlüsse anwenden wollte. Man würde finden, daſs in jedem sphärischen Dreiecke die Winkelsumme $2R$ beträgt, was doch keineswegs der Fall ist."

Als weiteres Beispiel folgt das bekannte Beispiel des Integrals:

$$I = \int_{-1}^{+1} x^2 \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

mit den Bedingungen: für $x = -1 : \varphi = a$, für $x = +1 : \varphi = b$; dabei $b > a$. Es wird, wie bekannt, gezeigt, daſs die untere Grenze aller derjenigen Werte, die dieses Integral für die verschiedenen der betrachteten Gesamtheit angehörigen Funktionen $\varphi(x)$ hat, von I nicht erreicht werden kann.

Budapest. Karl Goldziher.

Anfragen und Antworten.

102. Hermannus secundus (Dalmata). Unter den ersten lateinischen Übersetzern arabischer astronomischer Werke findet sich auch ein gewisser Hermannus, der, wohl um Verwechslung mit Hermannus Contractus zu vermeiden, zuweilen „secundus", aber auch „Dalmata" genannt wird. Von den Lebensumständen dieser Persönlichkeit scheint bis jetzt nur wenig bekannt zu sein. Er soll Lehrer von Rudolph von Brügge gewesen sein, der bekanntlich in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts lebte, und wird als „peritissimus utriusque linguae, latinae et arabicae" bezeichnet (vgl. z. B. Bubnow, *Gerberti Opera mathematica* [1899], S. CVI, 124). Unter den ihm zugeschriebenen Übersetzungen finden sich zwei astronomischen Inhalts, nämlich das *Planisphaerium Ptolemaei* (eigentlich eine arabische Bearbeitung dieser Arbeit von Mas-

1) Siehe Riemann, *Theorie der Abelschen Funktionen* (*Gesammelte mathematische Werke*, S. 81).

lama al-Madjriti, vgl. Bibliotb. Mathem. 3_3, 1902, S. 323) und die *Introductio* des Abu Maaschar (siehe Steinschneider, Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, S. 71). Die erste Übersetzung, die auch Rudolph von Brügge zugeschrieben worden ist, soll 1143 oder 1144 in Tonlouse (eine Handschrift hat Toledo) verfertigt worden sein. Ob Hermannus Dalmata wirklich die Schrift des Abu Maaschar übersetzt hat, scheint noch nicht sicher zu sein (vgl. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* [1900], S. 29).

Ist es möglich festzustellen, ob Hermannus Dalmata wirklich astronomische oder mathematische Arbeiten übersetzt hat, und welche sind diese Arbeiten? G. Eneström.

---

103. Die „Leçons de ténèbres" des Desargues. In einem Briefe von Oldenburg an Leibniz vom 6. April 1673 wird eine von Desargues verfaſste Schrift: „Leçons de ténèbres" erwähnt, die eine Theorie der Kegelschnitte enthielt und in nur 50 Exemplaren gedruckt war, sodaſs es schon damals auſserordentlich schwierig war, ein solches zu bekommen (siehe *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, herausg. von* C. I. Gerhardt, I, Berlin 1899, S. 87). In unseren Tagen hat man vergebens versucht, ein Exemplar einer Schrift mit diesem Titel wiederzufinden, und C. I. Gerhardt (*Desargues und Pascal über die Kegelschnitte*; Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. in Berlin 1892, S. 186) hat die Vermutung ausgesprochen, daſs die „Leçons de ténèbres" identisch mit dem bekannten *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan* (1639) sind, das von den Zeitgenossen des Desargues wegen seiner Dunkelheit die Benennung „Leçons de ténèbres" erhalten haben würde; in der That wendet Oldenburg selbst in dem zitierten Brief die Ausdrucksweise: „Dni. Desargues Conica, Leçons de ténèbres nuncupata" an, und über den Inhalt der Schrift giebt er eine Notiz, die möglicherweise zu dem oben erwähnten *Brouillon projet* von 1639 passen kann.

Auch in ein paar folgenden Briefen (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz* etc., S. 121, 130) thut Oldenburg der „Leçons de ténèbres" Erwähnung, aber ohne daſs man dadurch entscheiden kann, ob die Vermutung von Gerhardt begründet ist oder nicht. Auf der anderen Seite berichtet Oldenburg in dem Briefe vom 6. April 1673, ein Exemplar der „Leçons de ténèbres" befinde sich im Besitz eines gelehrten Engländers, „qui tractatum molitur de canone mathematico sive tabulam sinuum, qua ostendatur, quam difficilia problemata et aequationes solvi illius beneficio possint." Den Namen dieser Person nennt Oldenburg freilich nicht, aber aus einem Passus seines Briefes an Leibniz vom 26. Juli 1676 (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz*, etc., S. 176) scheint deutlich hervorzugehen, daſs Johannes Pell gemeint ist.

Ist es möglich unter den hinterlassenen Papieren Pells (vgl. Ball, *History of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge 1889, S. 40—41) das von Oldenburg erwähnte Exemplar der „Leçons de ténèbres" wiederzufinden und auf diese Weise die Vermutung von Gerhardt zu bestätigen oder derselben zu widerlegen? Wenn dies nicht der Fall ist, kann man auf anderem Wege zu einem bestimmten Resultate gelangen? G. Eneström.

---

104. Der Erfinder des Wilsonschen Satzes. In dem grofsen englischen biographischen Sammelwerke *National biography* finden wir Sir John Wilson (1741—1793). Er ist in Westmoreland geboren, trat 1759 in das Peterhouse in Cambridge ein, wurde 1761 B. A., 1764 M. A., im gleichen Jahre „Fellow". Im Jahre 1766 wandte er sich der praktischen Justiz, zunächst als Anwalt, zu. Noch von Cambridge aus schrieb er eine Entgegnung auf einen Angriff, den William Samuel Powell gegen Edmund Warings *Meditationes analyticae* gemacht hatte. Im Jahre 1782 wurde Sir John Wilson Mitglied der „Royal society". Da nun Waring in seinen *Meditationes algebraicae* den Wilsonschen Satz veröffentlichte und den Erfinder in der 3. Ausgabe jenes Werkes (1782) p. 380 als „Joannes Wilson, Armiger" bezeichnet, so stimmen alle diese Momente vortrefflich überein. Nun erscheint aber ein Zweifel! Nach der *National biography* wurde Sir John Wilson am 15. November 1786 zum Ritter ernannt („was knighted"). Wie kann er da 1782 „Armiger" heifsen? Ist etwa 15. November 1786 Druckfehler für 1780? Oder ist Wilson schon in der 1. Ausgabe der *Meditationes algebraicae* (1770), wo der Satz nach Lagrange (Mém. Berlin 1771, gedruckt 1773, p. 125 —126) auf Seite 218 zu finden ist, als „Armiger" bezeichnet, und wie soll in diesem Falle das Datum 15. November 1786 erklärt werden?

Moritz Cantor.

Risposta alla questione 101 su Giannantonio Rocca (1607—1656). La prima menzione che di questo matematico ricorre in opere a stampa è contenuta nel primo problema *De dimensione parabolae* di Evangelista Torricelli (in appendice all' opera *De sphaera et solidis sphaeralibus*, Florentiae, typis Amatoris Massae et Laurentii de Landis 1644), il quale esponendo a pag. 76 il Lemma: „Si figura plana super aliqua sui recta linea figuram „ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figurae, ut sunt solida „rotunda ab ipsis segmentis, circa secantem lineam revolutis, descripta", vi premette: „Authore Io. Antonio Roccha praestanti geometra." Il quale Evangelista Torricelli era col Rocca in corrispondenza, ed anzi in una sua lettera da Firenze sotto il dì 12 novembre 1649 gli scriveva: Ammiro il suo ingegno, dacchè vidi in Roma la dimostrazione sua del fuso parabolico, e feci concetto del suo valore, giudicandolo come „ex ungue leonem."

La menzione del Cavalieri (*Exercitationes geometricae sex*, Bononiae, typis Jacobi Montii 1647, pag. 230) relativa allo stesso argomento e nella quale si chiarisce la precedenza del Rocca sul Guldino, avvertita in ambedue le edizioni del Montucla e del Cantor, è posteriore a quella del Torricelli.

Intorno al Rocca, il quale non fu come si crede scolaro del Cavalieri, si hanno due scritti biografici, l' uno dell' Ab. Girolamo Tiraboschi (Biblioteca Modanese 4, 1783, pag. 357—365), l' altra in appendice alle *Lettere* menzionate dal Sign. Eneström; ma il porre in evidenza tutto ciò che queste contengono per un apprezzamento del giusto valore del Rocca eccederebbe le proporzioni d'una semplice risposta, e perciò mi riservo di occuparmene quanto prima in nna apposita monografia.

Padova. A. Favaro.

Recensionen.

R. Klimpert. Storia della geometria ad uso dei dilettanti di matematica e degli alunni delle scuole secondarie. Traduzione dal Tedesco autorizzata dall' autore con note ed aggiunte di **P. Fantasia.** Bari, Laterza 1901. (7) + 324 + (1) + X S. 8°. 4 lire.

Das Original dieser Übersetzung erschien 1888 in Stuttgart unter dem Titel: *Geschichte der Mathematik, für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt*, und enthielt zum grofsen Teil wörtliche Auszüge aus den mathematisch-historischen Arbeiten von Chasles, Arneth, Cantor, Gerhardt, Hankel und Suter. Der italienische Übersetzer hat, wie auch im Titel angedeutet wird, eine grofse Anzahl von ergänzenden Bemerkungen, zum Teil unter der Form von Noten, eingefügt, wobei er die neuesten Arbeiten von Cantor, Loria, Zeuthen u. A. henutzt hat. Ein einheitliches Werk ist das Buch also nicht, sondern vielmehr eine ziemlich bunte Sammlung von mehr oder weniger wertvollen Notizen zur Geschichte der Geometrie, aber auf der anderen Seite sucht es nicht seine Leser unter den Gelehrten oder unter denjenigen, die auf dem Wege sind, Gelehrte zu werden. Beachtet man diesen Umstand, wird man geneigt sein zuzugeben, dafs das Buch für seinen bescheidenen Zweck wohl passen kann, und es ist nicht unmöglich, dafs auch die Studenten an den Universitäten davon Nutzen haben können. Natürlich fehlt es nicht an unrichtigen oder unvollständigen Angaben; einige solche sind schon von Herrn Loria im Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1901, S. 116—118 hervorgehoben worden, und es wäre ziemlich leicht noch eine Anzahl solcher Angaben zu verzeichnen, aber in dieser kurzen Anzeige müssen wir darauf verzichten. Dagegen können wir nicht umhin zu bemerken, dafs die Namen der zitierten Mathematiker sehr oft durch Schreib- oder Druckfehler entstellt worden sind. Solche Fehler wie z. B. „Sohnke“ (S. 2) sind ja sehr unschuldig, und auch „Leotand“ (S. 196), „E. Günther“ (für E. Gunter) (S. 233), „Wan Heuret“ (S. 262), „Molweide“ (S. 296), „Lexel“ (S. 297), „Newcombe“ (S. 303), sind weniger zu beanstanden. Unangenehmer sind dagegen solche Fehler wie z. B. „van Ceilan“ (S. 164), „Mästlein“ (S. 236), „Torpoley“ (S. 280), „Thschirnausen“ (S. 293—294), „Bertrami“ (S. 300, 303), „Chifford“ (S. 303), „Schléghel“ (S. 303), „Gerarhdt“ (S. 307), „Von Staud“ (S. 311), „Graesmann“ und „Janquières“ (S. 318), besonders da sie so zahlreich auftreten. S. 213 steht „Adolf Riese“ für Adam Riese und S. 261, 284 „Biot“ für Pitot. Die meisten unrichtigen Namen siud im Register wiederholt.

Stockholm. G. Eneström.



Gino Loria. Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro III. Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci. Modena 1900. 4°, 138 p. Libro IV. Il periodo argenteo della geometria greca. Modena 1900. 4°, 80 p. + 3 Taf. Libro V. L' aritmetica dei Greci. Modena 1902. 4°, 195 p.

Herr Loria hat mit diesen drei letzten Büchern[1]) sein Werk über die exakten Wissenschaften bei den Griechen beendet, und wir können nun erst recht die Bedeutung des ganzen Werkes überblicken. Man darf nämlich erwarten, die Arbeitsmethode des Verfassers und seine Bedeutung als Gelehrter und Schriftsteller besser als früher beurteilen zu können; denn der Stoff dieser Bücher ist nicht so durchgearbeitet wie der der zwei früher erschienenen, so dafs dem Verfasser hier mehr Gelegenheit geboten worden ist, Neues und Originelles in die Darstellung einzufügen, neue Gesichtspunkte aufzustellen und aus den alten und neuen Fäden ein feineres und stärkeres Netz zu binden, als es den Vorgängern möglich war. In unserer Erwartung werden wir auch nicht getäuscht; wir finden in der That, namentlich in dem hochinteressanten 3. Buche, welches schon durch die zu Grunde liegende Idee die gröfste Anerkennung verdient, genügend zu loben, nicht wenig zu tadeln, aber vor allem das Nötige um festzustellen, wie weit der Verfasser bei seinen Studien vorgedrungen ist, inwiefern er von seinen Vorgängern abhängig ist, und wie weit er als selbständiger Forscher gelangt.

Das vorliegende Werk stellt sich den Werken von Tannery, Zeuthen und Cantor zur Seite, und wenn es auch vielleicht keinem dieser drei Werke an Originalität und wissenschaftlicher Schärfe gleichkommt, so hat es unserer Ansicht nach in Bezug auf Vollständigkeit und in Bezug auf den gut abgegrenzten Raum, welcher jedem Abschnitt der Geschichte je nach dem entsprechenden Wert eingeräumt ist, einen ganz bedeutenden Vorzug vor allen bisher erschienenen Geschichten der Mathematik im Altertum. Tannerys *La géométrie grecque* (1887), die wie die meisten Arbeiten dieses Verfassers eine wahre Fundgrube für den Geschichtsforscher ist, leidet wie bekannt darunter, dafs der Verfasser sich zu oft in die Ergebnisse seiner Spezialforschungen verliert; Zeuthen in seiner *Geschichte der Mathematik* gelingt es nur und kann es nur gelingen, die sonst vernachlässigte Entwickelungsgeschichte durch Minderbeachtung der Personalgeschichte und Aufopferung der chronologiscben Übersichtlicbkeit so trefflich darzustellen, während Cantor in seinem mit Recht berühmten und klassischen Werk der Lehre der Kegelschnitte, der Trigonometrie, Sphärik und was damit zusammenhängt zu wenig, der Mathematik der Römer dagegen unverhältnismäfsig viel Platz und Interesse eingeräumt hat. Unter derartigen Mängeln leidet Lorias Werk nicht. In der Anlage und der Disposition hat es eben seine starke Seite; die Rahmen des Buches sind so scharf aufgezogen und so gut gehalten, wie man es nur verlangen kann. Aucb der äufsere Apparat mufs gelobt werden; die Litteraturbinweisungen sind reichlich und nehmen unserer Ansicbt nach mit Recht einen breiten Raum ein, ohne irgendwo den Text zu verunstalten; die Manier, statt eines kurzen Referats, wo es geboten scheint, Auszüge aus den Klassikern einzuschalten, vermehrt die Zuverlässigkeit und Anwendbarkeit des Buches; aber viel schwerer wiegt es zu seinem Vor-

1) Recensionen der zwei ersten Bücher findet der Leser in der Bibliotheca Mathematica 1891, p. 55—60 und 1895, p. 54.

teil, dafs seine Einteilung eben so gelungen wie neu ist. Ganz besonders gefällt uns die Idee, die in den Naturwissenschaften angewandte Mathematik, d. h. die messende Geometrie, die Kugellehre und die Mechanik in einem Teil (libro 3) für sich zu behandeln. Die uns auf diesem Gebiete erhaltenen Hauptwerke stammen fast alle aus einer und derselben Periode, und zwar einer Periode, aus welcher die Geschichte der übrigen Zweige der exakten Wissenschaften so wenig bekannt ist, dafs die Absonderung sich sehr leicht bewerkstelligen läfst; aber noch mehr, durch dieses Verfahren wird es möglich, zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften eine Brücke zu schlagen, deren Notwendigkeit man erst recht aus dem vorliegenden Werk ersieht; und dadurch, dafs der Ausgangspunkt der Untersuchung anders gewählt ist als früher, erhält man einen viel klareren Überblick über die durch das naturwissenschaftliche Studium gewonnenen mathematischen Wahrheiten und ein besseres Verständnis der Entstehung derselben. Deshalb müssen wir das 3. Buch der vorliegenden Arbeit allein wegen des zu Grunde liegenden Gedankens als eine Neuerung betrachten, die dem Verfasser Ehre macht; sein Verfahren bedeutet einen Bruch mit der traditionellen Darstellungsweise, und wir hoffen, dafs dieser Bruch ein endgiltiger und für alle Zeit dauernder sein wird.

Weniger gefällt uns die Art und Weise, auf welche die mathematischen Beweise der griechischen Klassiker wiedergegeben werden; bei den grofsen formalen Verschiedenheiten der modernen und der antiken Mathematik ist es natürlich nicht so leicht auf diesem Punkt das Richtige zu treffen. Der Verfasser zieht vor, entweder eine verkürzte Übersetzung zu geben oder nur eine Verifikation in modernen Formeln, die mitunter rein analytisch ist und sehr oft keine Spur von dem Verfahren der Alten enthält. Viel besser gefallen uns deswegen Zeuthens und v. Braunmühls Darstellungsmethoden, erstere wegen ihrer Kürze, letztere wegen ihrer leichten Zugänglichkeit, beide, weil sie der ursprünglichen Form näher liegen und den Gedankengang der Alten treu wiedergeben.

Die Litteraturkenntnisse des Verfassers erstrecken sich über ein so ausgedehntes Gebiet, dafs wir in dieser Beziehung gar nichts zu kritisieren wagen; es kommt uns vor, dafs er sich mit Allem bekannt gemacht hat, was man mit Billigkeit von einem Verfasser eines so umfassenden Werkes verlangen kann. Auch scheint er in den vielleicht zu wenigen Fällen, in welchen sein eigenes Urteil in die Wagschale gelegt wird, seine Quellen meistens richtig geschätzt zu haben. Die Forscher, deren Resultate er am ergiebigsten verwertet hat, sind Allman, Cantor, Chasles, Delambre, Heiberg, Hultsch, Martin, Nesselmann, Schiaparelli, Tannery, Woepcke und Zeuthen.

Betrachten wir nun die Art und Weise, auf welche Loria das so gut angelegte Werk in den Details ausgeführt, also das von ihm selbst gestellte Problem gelöst hat, so können wir nicht umhin, das Resultat in mehr als einer Beziehung zu kritisieren. Er ist sehr nüchtern und vorsichtig, hält sich am liebsten von selbständigen Hypothesen entfernt, nennt jedoch die der Vorgänger sehr gewissenhaft, auch wenn er sie nicht genauer zu diskutieren wünscht. Obwohl öfters in den vielen Fällen, wo wir auf Vermutungen hingewiesen sind, eine kühnere Hypothese dahinter steckt, den Griechen etwas abzusprechen als es ihnen zuzuschreiben, so hat es jedoch etwas für sich, in einem zusammenfassenden Werk den zweifelhaften Fragen fern zu bleiben. Von Loria ist diese Behandlungsweise offenbar mit Absicht benutzt worden, und

es verstimmt uns gar nicht, diese Absicht zu merken — aber Hand in Hand mit dieser gewissermafsen lobenswerten Nüchternheit geht eine sonderbare Neigung die Lücken, sei es in der Darstellung, sei es in unseren Kenntnissen decken und über sie mit Phrasen hinwegkommen zu wollen, und zwar Phrasen, die entweder nichts sagen und also nur Füllsel sind oder aber Falsches aussagen, und dann um so gefährlicher werden, je mehr vertrauenerweckend und nüchtern das Werk sonst ist. Unten werden wir diesen Tadel mit bestimmten Beispielen belegen.

Viel weniger bedeutet es, dafs wir von der Entwickelungsgeschichte der Mathematik sehr wenig erfahren und namentlich sehr wenig Neues; es hängt ja dies auch mit der ganzen Anlage des Werkes als blofs referierendes und mit der Ängstlichkeit des Verfassers, sich in weitschweifigen Hypothesen zu verlieren, eng zusammen, und der Verfasser hat in dieser Beziehung das volle Recht die Grenzen so zu ziehen, wie es ihm pafst und gefällt, wenn nur sein Verfahren konsequent und das Ergebnis ein einheitliches und ganzes wird. Zu tadeln ist deswegen nur, wenn der Verfasser, was mitunter in der vorliegenden Arbeit geschieht, das weniger Bedeutende hervorhebt und das Wichtigere ohne Grund verschweigt, oder wenn er versäumt, die leicht ersichtlichen Übergänge von einem Werk oder Autor zum anderen nachzuweisen, d. h. den Faden in der Entwickelung nicht nur nicht hervorhebt, sondern geradezu verliert oder versteckt; denn im ersten Falle sehen die Leser ein verzerrtes Bild, im zweiten überhaupt nur Farben und gar kein Bild.

Von derartigen Mängeln abgesehen, denen, insofern sie mehr als äufserlich sind, durch Vergleich mit anderen Büchern leicht abgeholfen werden kann — und der Verfasser giebt uns in seinen Noten meistens selbst die Mittel dazu —, mufs zugegeben werden, dafs Loria uns ein Handbuch verschafft hat, das mit grofsem Erfolg neben Cantors Geschichte benutzt werden kann, das auf die neuesten Forschungen baut und das mit Recht auf die Zuerkennung der gröfsten bisher erreichten Vollständigkeit Anspruch machen darf. Wollen wir dagegen die kühnen Gedanken, die geniale und originelle Auffassung, die Entwickelung und ihre Geheimnisse kennen lernen, müssen wir, wie früher, zu Tannery, Chasles oder Zeuthen Zuflucht nehmen. Was wir noch vermissen, ist eine Personal- und Litterargeschichte, welche die Resultate der grossen Herausgeberthätigkeit Heibergs, Hultschs u. a. sammelt; denn diese Resultate liegen noch in Vorreden, Fufsnoten und Spezialaufsätzen zerstreut und harren einer anschaulichen Darstellung. Ob sie wohl bald kommen wird?

Die drei letzten Bücher des Werkes des Herrn Loria haben je sechs Abschnitte mit folgenden Überschriften: 3. Buch. I. *Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronomiche anteriori ad Ipparco*; II. *La Sferica*; III. *L' apogeo dell' Astronomia greca*; IV. *Gli albori della Fisica matematica*; V. *Erone d' Alessandria*; VI. *I geodeti minori*. 4. Buch. I. *Gemino da Rodi*; II. *Teone da Smirne*; III. *Pappo d' Alessandria*; IV. *Il Neo-Platonismo. Proclo, Marino, Simplicio*; V. *Eutocio*; VI. *Sereno*. 5. Buch. I. *La logistica greca*; II. *L' aritmetica nella Scuola di Pitagora*; III. *L' aritmetica nell' Accademia*; IV. *Neopitagorici e Neoplatonici*; V. *Diofanto*; VI. *Ricreazioni matematiche dei Greci*. Das Werk endet mit einem Autorenregister.

Bei dem ersten Abschnitt des dritten Buches, welcher eine sehr lesenswerte Darstellung der astronomischen (kosmologischen) Hypothesen der Griechen sowie der messenden Astronomie vor der Erfindung der Trigonometrie (Aristarch)

enthält, brauchen wir nicht zu verweilen. Dieser Abschnitt ist hauptsächlich beschreibend und muſs ganz gelesen werden. Von Einzelheiten wollen wir nur notieren, daſs der eine der von ARISTARCH benutzten Hauptsätze (siehe S. 34—35) schon in EUKLIDS *Optik* (Satz 8) bewiesen ist. S. 38 in den Noten finden sich mehrere Druckfehler: „Hanniae" statt „Hanniae", „Herberg" statt „HEIBERG", „detrnire" statt „détruire", „Poseidmios" statt „POSEIDONIOS".

Den zweiten und dritten Abschnitt, welche von der Sphärik und der Trigonometrie nebst ihren Anwendungen in der Astronomie handeln, wollen wir genauer ansehen, teils weil dem Verfasser bei der Ausarbeitung eben dieser Abschnitte, deren Gegenstand zu den meist vernachlässigten in der Geschichte der Mathematik des Altertums gehört, eine besonders gute Gelegenheit gegeben worden ist, Neues und Originelles zu leisten, um so mehr da er dank der Anlage seines Buches auf die Sache von dem richtigen Standpunkt aus losgeht, teils auch, weil Recensent eben Gelegenheit gehabt hat, das ganze in diesen Abschnitten behandelte Material durchzuarbeiten (vgl. Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **14**, 1902, p. 1—154).

Zuerst giebt der Verfasser uns die Beweise dafür, daſs THEODOSIOS' *Sphärik* nur eine Art Neuausgabe einer *voreuklidischen Sphärik* ist; er folgt hier HULTSCH, ohne auf TANNERYS irrige Ansicht (*Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 38) Rücksicht zu nehmen. Über die von mehreren Seiten (HEIBERG, TANNERY, GOW) angenommene Hypothese HULTSCHS, EUDOXOS sei der Urheber dieser Sphärik, schaltet er einige sehr beachtenswerte Bemerkungen ein (p. 43 mit Note 7). Demnächst behandelt er die Spuren der voreuklidischen *φαινόμενα* (nicht *σφαιρικά*, wie er sagt[1])), die uns in einem Papyrus aus Louvre erhalten sind. Dem darauf folgenden Referat von AUTOLYKOS' Werken und den daran angeknüpften Bemerkungen können wir vollständig beistimmen. Anders mit der gleich folgenden Darstellung von EUKLIDS *φαινόμενα* und HYPSIKLES' *ἀναφορικός*. Die Auswahl von Sätzen des ersten dieser Werke (3, 6, 11 und 16), die referiert werden, ist nicht gelungen. Schon aus PAPPOS' Kommentar (ed. HULTSCH, p. 598—602) erhellt, daſs es die Sätze 12—14 waren, die in der Weiterentwickelung eine Rolle spielten; sie behandeln das Problem der schiefen Aufsteigung, dasselbe, das den Gegenstand von HYPSIKLES' *ἀναφορικός* bildet. Aus PAPPOS' Kommentar ersieht man ferner, daſs dieses Problem von HIPPARCH *numerisch* gelöst wurde, und man hat somit alle Ursache, eben bei diesem Problem zu verweilen und es weiter zu verfolgen. LORIA läſst es indessen liegen als ein Problem von „esiguo valore" (p. 49) und verliert dadurch einen Faden, der EUKLIDS, HYPSIKLES', THEODOSIOS', HIPPARCHS und MENELAOS' Werke mit PTOLEMAIOS' *Syntaxis* zusammenknüpft. Deswegen schweben in LORIAS Darstellung alle diese Werke je für sich in der Luft, und die Kontinuität geht vollständig verloren. Als Grund seiner Nichtbeachtung des Aufsteigungsproblems giebt LORIA an, daſs es nur in der Astrologie Wert habe, und er führt MANITIUS und TANNERY als Gewährsmänner an, aber mit Unrecht; denn MANITIUS beweist nur, daſs das Problem, so wie es von HYPSIKLES gelöst wurde, in der Astrologie Anwendung fand, während TANNERY a. a. O. ausdrücklich seine Bedeutung für die Zeitbestimmung bei

1) Werke, in denen die sphärischen Sätze in astronomischer Abfassung auftraten, hieſsen *φαινόμενα*; in den *σφαιρικά* fanden dieselben Sätze sich dagegen in rein mathematischer Abfassung.

Nacht hervorhebt. Übrigens dürfte es dem Verfasser nicht unbekannt sein, dafs dasselbe Problem in HIPPARCHS *Kommentar* sogar eine Hauptrolle spielt, dafs in der *Syntaxis*, Buch 2, eine umfangreiche Aufsteigungstafel berechnet wird, und dafs solche Tafeln für den Astronomen nicht eben wertlos sind. Wir können uns indessen denken, dafs der Verfasser deswegen von diesem Problem so schnell fortzukommen sucht, weil die Untersuchung seiner Bedeutung ihn zu tief in die Entwickelungsgeschichte der Astronomie hineinführen würde, während er sich darauf beschränken will, die durch die Naturwissenschaften gewonnenen mathematischen Neuerungen hervorzuziehen; dann wird aber die Bemerkung über das Aufsteigungsproblem eine der oben angedeuteten *gefährlichen* Phrasen. Übrigens sind die Geschichten der Sphärik, der Trigonometrie und der sphärischen Astronomie miteinander so eng verknüpft, dafs sie sich nicht einzeln behandeln lassen, was LORIAS Werk uns — durch seine Mängel — nur allzu klar beweist, und worüber er wohl eigentlich selbst klar ist, wenn er p. 52 sagt: „Questo sorprendente silenzio di EUCLIDE sopra tutte le altre proprietà della sfera si spiega perfettamente ammettendo che gli antichi considerassero la teoria di questo solido come una parte, non della geometria pura, ma dell'astronomia teoretica." — Bevor wir zu THEODOSIOS' *Sphärik* übergehen, müssen wir die Druckfehler „Adtolico" statt „AUTOLICO" (p. 48 Note 2), θυρεόςν statt θυρεός und Ἀναφορκός statt Ἀναφορικός (p. 49 Zeile 14 und 30) notieren.

THEODOSIOS wird als aus Tripoli (in Bitynia) gebürtig und um das Jahr 50 v. Chr. thätig aufgeführt, und als Gewährsmann wird TANNERY zitiert, obwohl dieser a. a. O. sehr deutlich auseinandersetzt, dafs THEODOSIOS *entweder* aus Tripolis in Nordafrika (eine Stadt Tripolis lag in Syrien, eine andere in Griechenland, aber keine in Bithynien) stammt und nach PTOLEMAIOS zu setzen, *oder* aus Bithynien und dann wahrscheinlich als Zeitgenosse des HIPPARCH (ca. 150 v. Chr.) anzusehen ist. Dem Bericht über THEODOSIOS' Werke können wir beistimmen mit Ausnahme des Referates des dritten Buches der *Sphärik*. Der Verfasser hat offenbar durch Einsehen des Werkes sofort bemerkt, dafs es sich in diesem Buch, wie er sagt, in der Realität um astronomische Sätze handelt; dafs er dieselben nicht näher untersucht, lese ich dagegen aus der folgenden Phrase heraus: „Non si stupisca il lettore se noi non riferiamo nemmeno gli enunciati di proposizioni in cui la complicazione dà l'apparenza di valore, nascondendone l'insignificanza"; denn hätte er die Sätze näher untersucht, würde er gesehen haben, dafs nicht nur das Problem der schiefen Aufsteigung, sondern auch das Rektascensions-, das Deklinationsproblem und das der Morgen- und Abendweite, welche alle in PTOLEMAIOS' *Syntaxis* trigonometrisch gelöst werden, in ihnen verborgen liegen, ja dafs in den Sätzen 11 und 12 ein erster Versuch gespürt werden kann, die beiden ersten dieser Probleme *trigonometrisch* zu lösen. Als Glied in der Entwickelung, der es in diesem Fall gar nicht schwer ist nachzuspüren, bildet deswegen eben THEODOSIOS' 3. Buch eine Überlieferung von wirklicher Bedeutung.

Es kommt nun MENELAOS von Alexandria an die Reihe; dafs er (vgl. p. 54) eine Astronomie im Auftrag von DOMITIAN verfafste, ist eine Nachricht, die wahrscheinlich auf einer schlechten Übersetzung des *Fihrist* beruht; dafs die von HALLEY besorgte Ausgabe von MENELAOS' *Sphärik* auch die des THEODOSIOS enthält (siehe p. 55 Note 4), beruht auf einem Mifsverständnis. LORIAS Referat von MENELAOS' 1. Buch bildet ein Novum von wirklicher Bedeutung.

Dafs Menelaos zuerst den Begriff *sphärisches Dreieck* aufgestellt hat, dafs ein Zusammenhang zwischen dem 1. Buch der Euklidischen *Elemente* und der ersten Hälfte von Menelaos' 1. Buch besteht, wird hier zum ersten Male nachgewiesen; Lorias auf originellen Untersuchungen beruhende Darstellung bezeichnet deswegen hier einen nicht unwichtigen Fortschritt gegen Cantor u. A. Zu bemerken ist aber, dafs in die Details mehrere Fehler durch Anwendung der sehr schlechten Maurolycusausgabe hineingeraten sind. So sind Menelaos I, 1, 8, 17 und 18 sowie das Corollar zu I, 2, welche Loria (p. 55—56) erwähnt, Zusätze von Maurolycus, und ebenso der Satz, dafs die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks kleiner als 540° ist. Die Reihe der analogen Sätze im Euklid und Menelaos, die Loria S. 55 angiebt, mufs deswegen auch ersetzt werden durch: Menelaos I, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14 + 16 analog zu Euklid I, 23, 5, 6, 4 + 8, 20, 21, 19, 24 + 25, 18, 16, 32, 26.

Menelaos' 2. Buch hat der Verfasser nicht die gebührende Aufmerksamkeit gewidmet, und er sucht mit folgender Phrase darüber hinwegzukommen: „Le proposizioni esposte nel II Libro della *Sferica* di Menelao sono assai più complicate ma molto meno importanti di quelle che si leggono negli altri due. Le scarsissime applicazioni che ricevono e l'essere desse in parte corollarî delle precedenti ed in parte lemmi per le seguenti, fece sì che, mutato l'assetto della geometria sferica, esse caddero in un meritato oblio da cui noi non tenteremo di toglierle". Es wäre nicht umständlicher gewesen das Richtige zu schreiben, nämlich: In dem 2. Buche von Menelaos' *Sphärik* werden die astronomischen Sätze, die wir schon aus Euklids *φαινόμενα*, Hypsikles' *ἀναφορικός* und Theodosios' *Sphärik* III kennen, und die teilweise schon in der *voreuklidischen Sphärik* vorkamen, mit Hilfe der Dreieckssätze des 1. Buches mit neuen Beweisen versehen und erweitert, wie es Pappos im Anfang seines 6. Buches nachweist.

Menelaos' 3. Buch widmet Loria mit Recht eine eingehende Behandlung und kritisiert, ebenso mit Recht, Delambres falsche Auffassung desselben (siehe p. 60); doch bildet Lorias Darstellung kein Novum, da v. Braunmühl ihm in seiner *Geschichte der Trigonometrie* zuvorgekommen ist. An folgenden Fehlern in Lorias Darstellung hat die Maurolycusausgabe die Schuld: Menelaos III, 3, 7, 10, 20, 21 sind durch III, 2, 5, 6, 9, 10 zu ersetzen, während III, 22 (siehe p. 59) ein Zusatz von Maurolycus ist. Der p. 58—59 in extenso referierte interessante Beweis gehört irgend einem Araber; der echte Beweis des Menelaos, den Loria nicht kennen konnte, ist viel interessanter, weil er uns beweist, dafs Menelaos' Satz (III, 1) schon vor Menelaos bekannt war. Maurolycus' Behauptung des Entgegengesetzten, auf welche Loria sich stützt (p. 57 Note 1), ist deswegen auch falsch. Proklos' Bericht von Menelaos' neuem Beweis zu Euklid I, 25, den Loria p. 60 vorführt, ist bisher den Forschern entgangen. Lorias Résumé über Menelaos' Thätigkeit können wir nur beistimmen und müssen hervorheben, dafs Lorias richtiges Urteil über diesen Verfasser auf seinen eigenen Untersuchungen beruht, und dafs er sich klüglich von Delambres mifsverstandener Überlegenheit demselben gegenüber und von Tannerys und Cantors Schweigen nicht hat irre führen lassen.

Gegen das nun folgende Referat der Trigonometrie in Ptolemaios' *Syntaxis* haben wir gar nichts einzuwenden; gegen die einleitenden Bemerkungen nur, dafs sie so allgemein sind, und dafs die Diskussion der Frage von dem

Verhältnis zwischen Ptolemaios und seinen Vorgängern so vorsichtig beiseite gelassen wird; jedoch müssen wir zugeben, dafs aus Lorias vorhergehender Darstellung zur Lösung dieser Frage nicht viel zu holen ist, weil in derselben eben dasjenige fehlt, was Ptolemaios mit seinen Vorgängern verknüpft, umsomehr, da auch nicht Hipparchs *Kommentar* herangezogen wird, und von der Hauptquelle, Menelaos' *Sphärik*, dem Verfasser nur die unvollständige und überarbeitete Maurolycusausgabe zur Verfügung stand. Nur sei bemerkt, dafs es doch nicht so unmöglich ist, wie Loria meint (vgl. S. 64), die vorptolemaiische Entwickelung der Astronomie und der messenden Geometrie in ihren Hauptzügen zu rekonstruieren.

Von der ziemlich oberflächlichen Erwähnung der übrigen Schriften des Ptolemaios brauchen wir nichts hervorzuheben. Was die im *Analemma* angewandte Methode betrifft, machen wir doch den Leser aufmerksam auf eine kleine fast gleichzeitig mit Lorias 3. Buch erschienene Abhandlung von Zeuthen (siehe Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 20—27), wo von Braunmühls Auffassung, welcher Loria folgt, wesentlich korrigiert wird; und damit schliefsen wir die Kritik der zwei genannten Abschnitte, da die Behandlung von Theon und Hypatia uns zu keiner Bemerkung veranlafst. Nur ein Druckfehler sei bemerkt, nämlich p. 80 Zeile 6: 1544 statt 1144 (während nach Cod. Reg. lat. 1285 und Cod. Vat. lat. 3096 die richtige Jahreszahl nicht 1144, sondern 1143 sein dürfte).

Wir hoffen durch diese Durchmusterung von Lorias Behandlung der Sphärik und der Trigonometrie dem Leser eine Probe von den Licht- und den Schattenseiten des gegenwärtigen Werkes gegeben zu haben, sodafs das oben ausgesprochene Urteil ihm durch die gegebenen Beispiele verständlicher wird; wir haben wenigstens versucht, alles zu diesem Zweck Dienliche so ehrlich wie möglich hervorzuheben und abzuwägen.

Von den übrigen Abschnitten des 3. Buches wird wohl namentlich die Darstellung von Heron den Leser interessieren; sie enthält die neuesten Resultate der noch nicht abgeschlossenen Heronforschungen, darunter auch Aufschlüsse (p. 125—128) über die von R. Schöne neugefundene, bis jetzt unedierte Hs. der *Μετρικά*, und es werden die neuesten Quellen benutzt, wie die zwei Al-Narizi-Ausgaben, der Papyrus Ayer u. s. w. Zu diesem Teil mögen nur folgende Einzelheiten notiert werden: p. 117 Zeile 12 ist 24 durch 25 zu ersetzen; ferner ist der p. 119 erwähnten bisher allein bekannten Hs. des lateinischen Al-Narizi-Textes eine zweite bessere hinzuzufügen, nämlich Cod. Reg. 1268 (vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 72 und Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **14**, 1902, p. 138—142).

Wir gehen zum 4. Buche über; es werden hier zuerst Geminos und Theon von Smyrna besprochen, deren Anbringung offenbar und ganz natürlich dem Verfasser Schwierigkeiten bereitet. Danach kommt ein Referat von Pappos' *συναγωγή*. Ein solches zu geben, sodafs es dem Leser wirklich nützlich ist, scheint keine leichte Aufgabe zu sein. Hier ist sie in der ganz einfachen Weise gelöst, dafs dem Referate ohne Rücksicht auf die heutzutage gebräuchliche Kurzschreiberei der notwendige Platz (35 Seiten) eingeräumt wird (Cantor gebraucht nur 13). Auf das Referat können wir uns hier nicht weiter einlassen, aber wir müssen darauf aufmerksam machen, dafs hier in aller Einfachheit etwas Vorzügliches geleistet wird; sehr anziehend ist z. B. die tabellarische Übersicht über Sätze aus Pappos, die zur Proportionenlehre und der geometrischen

Algebra gehören; derartige tabellarische Übersichten finden sich öfters in Lorias Werk und bezeichnen stets einen Fortschritt von nicht geringer Bedeutung. Nach der Behandlung der Kommentatoren Proklos, Marinos, Simplikios und Eutokios schliefst Buch 4 mit einem vollständigen Novum, nämlich einer Durchmusterung von Serenos' Werken über Kegel- und Cylinderschnitte welche bisher fast gar nicht beachtet worden sind, obwohl eine neue Heibergsche Ausgabe schon seit dem Jahre 1896 vorliegt.

Ob es am vorteilhaftesten ist, die Arithmetik der Griechen zusammen mit der Geometrie zu behandeln, wie es Cantor thut, oder wie Loria (in seinem 5. Buch) sie abzusondern und für sich zu behandeln, mufs ich dahinstellen; doch möchte ich zunächst glauben, dafs Loria richtig gewählt hat. Für die Darstellung der Geometrie mit ihren vielfachen Anwendungen der Arithmetik hat Lorias Verfahren freilich gewisse Nachteile, welche namentlich bei der geteilten Behandlung der voreuklidischen Mathematik zum Vorschein kommen, aber doch weniger fühlbar werden, weil die Algebra der Griechen rein geometrisch ist, und somit nur die eigentliche Zahlenlehre abgesondert zu werden braucht. Für die Darstellung der Arithmetik hat Lorias Verfahren dagegen einen grofsen Vorteil, und ist um so bequemer, weil die wenigen Quellen auf diesem Gebiet zerstreut und zeitlich oft schwer zu bestimmen sind, und deswegen eine chronologische Geschichte der Arithmetik sehr schwer durchzuführen ist. Sicher ist, dafs der Verfasser den bei der Absonderung gewonnenen Vorteil sehr geschickt verwertet.

Er beginnt mit einer hübschen Darstellung der Zahlwörter, des Fingerrechnens, der Zahlzeichen und der Archimedischen und Apollonischen Zahlensysteme zur Darstellung sehr grofser Zahlen; danach zeigt er die Unhaltbarkeit der Hypothese Delambres, dafs schon die Griechen ein Zeichen für Null gekannt haben sollten; dann folgt eine Auseinandersetzung der Lehre von Brüchen, sowohl Stamm- wie Sexagesimalbrüchen und der 4 Spezies, überall mit guten Beispielen, wo den modernen Verdolmetschungen zur Aufklärung die Rechnungsschemata in griechischen Zahlzeichen stets zur Seite gestellt werden. In der jetzt folgenden Darstellung der Wurzelausziehung sind die Ergebnisse von Hultschs und Wertheims Untersuchungen mit den von Tannery und Curtze edierten Anszügen der Heronischen *Μετρικά* sehr übersichtlich zusammengestellt.

Nachdem somit dem Leser eine lehrreiche Übersicht der griechischen Logistik gegeben ist, folgt eine Darstellung der Geschichte der Arithmetik nach Epochen. Im Anschlufs an die Schilderung der pythagoräischen Arithmetik, die wie oben angedeutet, unter ihrer Absonderung von der Geometrie fühlbar leidet, folgt eine kurze Erwähnung von Tymarides, den Loria also mit Tannery als den alten Tymarides von Tarent ansieht und eine Übersicht der Boetiusfrage, die ja in enger Verbindung damit steht, ob das Dezimalsystem schon von den Pythagoräern angewandt wurde. Loria schliefst sich wohl hier zunächst an Woepcke und Martin an, erklärt jedoch die Frage für noch ungelöst und unlösbar, bis neue Quellen auftauchen. Neues scheint uns der Verfasser übrigens in diesem Abschnitte ebensowenig wie im folgenden, der von der Arithmetik der Akademie handelt, vorgeführt zu haben. Auf die Hypothesen in Bezug auf die Platonische Zahl scheint er uns zu viel Rücksicht genommen zu haben; eine blofse Angabe (im Umfange wie die Cantors) der Existenz dieses unfafsbaren Problems wäre eigentlich genug; doch ist das vielleicht Geschmacksache.

In Bezug auf die Abschnitte über die Neupythagoräer, Neuplatoniker und Diophant, können unsere obigen Bemerkungen zu dem Abschnitt über Pappos gelten; es wird uns ein vorzügliches Referat gegeben, dessen Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig läfst, ohne dafs neue Bahnen eingeschlagen werden.

Alles in allem ist Lorias Geschichte der griechischen Mathematik unseres Erachtens eine nützliche und verdienstvolle Arbeit, welche trotz gewisser Mängel so viel Gutes und Neues bietet, dafs es den Pflegern der Geschichte der Mathematik Freude bereiten wird, sich mit derselben näher bekannt zu machen.

København. Axel Anthon Björnbo.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, dafs die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
13 (1902). — 14 (1902). — 15 (1902).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
3_3 (1902) : 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1902 : 3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8°. [4
31 (1900) : 2—3.

Annales internationales d'histoire. Congrès de Paris 1900. 5e section. Histoire des sciences (1901). [Recension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 229—231. [5

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Recension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw Arch. 5_2, 1902, 392—393. — Vjestnik elem. matem. 28, 1902, 41—42 [6

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 2 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq. (1902). [Recension.] L'enseignement mathém. 4, 1902, 385—389. (A. Buhl.) — Mathesis 2_3, 1902, 225—226 [7

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 323—324. (A. Sturm, G. Eneström, P. Tannery.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 325. (A. Sturm, G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 326—328 (G. Eneström) [8

Loria, G., Le trasfigurazioni di una scienza. Discorso. — Donne matematiche. Lettura. — Seconda edizione accresciuta di note. Mantova, Mondovi 1902. [9
8°, 55 S.

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band. Rechnen und Algebra. Leipzig, Veit 1902. [10
8°, VIII + 332 S. — [8 M]

Isely, L., Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse française (1901). [Recension:] Revue génér. d. sc. 13, 1902, 209 [11

Carrara, B., I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. [12
Rivista di fisica (Pavia) 4, 1901, 492—510; 5, 1902, 25—33, 112—123.

***Russell, B. A.,** Essai sur les fondaments de la géométrie. Traduction par A. Cadenat, revue et annotée par l'auteur et par L. Couturat. Paris, Gauthier-Villars 1901. [13
8°, X + 274 S. — [9 francs.] — [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 140—148 (P. Stäckel.)

***Mach, E.,** Scieuce of mechanics. A critical and historical account of its development. Translated from the ger-

man by Th. J. McCormack. Second revised and enlarged edition. Chicago, The open conrt pnblishing co. 1902. [14
8°, XX + 605 S. — [2 dollars.]

*Beck, Th., Beiträge zur Geschichte des Maschinenbanes. Zweite vermehrte Auflage. Berlin, Springer 1900. [15
8°, 582 S. — [9 M.] — [Recension:] Dentsche Litteraturz. 23, 1902, 2738—2741. (W. Schmidt.)

*Musmacher, C., Kurze Biographien berühmter Physiker. Freiburg i./Br., Herder 1902. [16
8°. — [1, 80 M.]

b) **Geschichte des Altertums.**

*Eyth, M. von, Mathematik und Naturwissenschaft der Cheopspyramide. [17
Ulm, Verein für Mathem., Jahreshefte 10, 1901, 1—22.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia III (1901). [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 155—156. (M. Cantor.) [18

Tannery, P., Snr la sommation des cubes entiers dans l'antiquité. [19
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 257—258.

Björnbo, A. A., Studien über Menelaos' Spbärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. [20
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, III—VII, 1—154.

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Suter, H., Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke.“ [21
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, 155—185.

Suter, H., Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir. [22
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 259—272.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Zweiter Teil. [23
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 13, 1902, 4 S. + S. 337—628. — [14 M.] — [Recension:] Dentsche Litteraturz. 23, 1902, 2676—2677. (M. Cantor.)

Lambo, Ch., Une algèbre française de 1484. Nicolas Cbuquet. [24
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest scient. 2_3, 1902, 442—472.

d) **Geschichte der neueren Zeit.**

*Bertrand, J., Eloges académiqnes. Nonvelle série. Avec un éloge historique de Joseph Bertrand par G. Darboux. Paris, Hachette 1902. [25
16°, 51 + 411 S. — [3, 50 fr.]

Eneström, G., Über eine astronomische Schrift des A. Ricius. [26
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 328. — Anfrage

Fontès, J., Les Arithmétiques et les Algèbres du seizième siècle à la bibliothèqne commnnale de Toulonse. [II.] [27
Toulouse, Acad. d. sc., Mémoires 1_{10}, 1901, 119—124.

Hayashi, T., The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. [28
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 273—275.

Hellmann, G., Zur Bibliographie von W. Gilberts „De magnete“. [29
Terrestrial magnetism (Baltimore) 1902, 63—66.

Il processo di Galileo. Firenze, Barbera 1902. [30
4°, 159 S. — Sonderabzug in 30 Exemplaren aus dem von A. Favaro redigierten, noch nicht erschienenen Band 19 der *Opere di* Galileo Galilei.

Favaro, A., I documenti del processo di Galileo. [31
Venezia, Istituto Veneto, Atti 61:2, 1902, 757—806.

*Favaro, A., Napoleone e il processo di Galileo. [32
Revue Napoléonienne (Pinerolo) 2:4, 1902, 2—14.

Schreiber, J., Christoph Scheiner und seine Sonnenbeobachtungen. [33
Natur und Offenbarung (Münster) 48, 1902. 61 S. — [Recension:] Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 525—526. (A. Berberich.)

Eneström, G., Giannantonio Rocca (1607—1656). [34
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 328. — Anfrage.

Ricci, G., Anfänge und Entwickelnng der neuen Auffassungen der Grundlagen der Geometrie. Antrittsrede. [35
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 382—403. — Übersetzung (siehe Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 333).

Amodeo, F., Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732 (1902). [Recension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 329—330. (G. Eneström.) [36

Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome IX (1901) [Recension:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2292—2294. (E. Gerland.) — Nature 65, 1902, 74—75. [37

Bopp, K., Antoine Arnauld, der grofse Arnauld als Mathematiker. [38
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, 187—337. — Die Seiten 189—235 sind als Doktordissertation (Heidelberg) besonders herausgegeben.

*Hoyer, Andreas Gärtner, der „sächsische Archimedes“. Dresden 1902. [39
4°, 21 S. + 1 Taf. — Programm.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). Revue génér. d. sc. 13, 1902, 309. — The mathem. gazette 2, 1902, 160—181. [40

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. [41
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 15, 1902, VI + 166 S. — [8 M.]

***Joneseu, J.**, [Über das Leben nnd Wirken des Mathematikers Vito Caravelli (1724—1800).] [42
Gazeta malematica (Bnkarest) 7, 1902, 29—30. Rumänisch.

Mac Mahon, P. A., Presidential address. [43
British association, Report 71 (Glasgow (1901), 519—528. — Über den Stand der Mathematik am Anfange des 19. Jahrhunderts.

Graf, J. H., Notizen zur Geschichte der Mathematik nnd der Naturwissenschaften in der Schweiz. [44
Bern, Naturf. Gesellsch., Mitteil. 1900, 155—173.

Estanave, E., Thèses de sciences mathématiqnes soutenues devant la faculté des sciences de Paris et devant les facultés des sciences des départements dans le courant du XIXᵉ siècle. [45
Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 201—216, 232—248, 272—280.

Gauss, C. F., Werke. Band VIII (1900). [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 161—162. (E. Jahnke.) — Götting. gel. Anzeigen 1901, 528—539. [46

Gauss, K. F., General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825 (1902). [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 162. (E. Jahnke.) — Revne sem. des public. mathém. 10 : 2, 1902, 160. (G. Mannoury.) [47

Mentovich, F., [Mein Besuch bei Gauss.] [48
Mathematikai és physikai tapok 10, 1902, 90—95. — Ungarisch.

Emch, A., Steiners „lost" manuscript of 1826. [49
Science 15_2, 1902, 713.

*Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Christiania, Dybwad 1902. [50
4°, XII + 429 S. + 8 Taf — [21 *M*] — Herausgegeben von E. Holst, C. Störmer, L. Sylow. — Enthält Briefe von und an Abel, sowie Aktenstücke und Berichte über sein Leben und seine wissenschaftliche Wirksamkeit

Sylow, L., Festrede znm Abeljubiläum. [51
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 11, 1902, 377—382.

Mansion, P., Le centenaire d'Abel (4—7 septembre 1902). [52
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 2_2, 1902, 603—618.

Miller, G. A., On the history of several fundamental theorems in the theory of gronps of finite order. [53
The americ. mathem. monthly 8, 1901, 213—216.

Bonola, R., Bibliografia sni fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea. [54
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 3, 1900, 2—3, 33—60, 70—73; 5, 1902, 23—41, 65—71.

Brocard, H., [Renseignements biographiques sur J. Liouville.] [55
L'Intermed. des mathém. 9, 1902, 215—217.

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz. Erster Band. Braunschweig, Vieweg 1902. [56
8°, XI + (1) + 375 S. + 3 Bildnisse. — [8 *M*]

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen. Lieferung 2—8. Leipzig, Barth 1902. [57
8°, S. 81—216 — [6 *M*]

Wölffing, E., Abhandlungsregister 1901. [58
Zeitschr. für Mathem. 48, 1902, 152—182. — Aus dem Gebiete der angewandten Mathematik

e) Nekrologe.

Joseph L. **Bonnel** (1826?—1902). [59
L'enseignement mathém. 4, 1902, 384.

Camillo Tito **Cazzaniga** (1872—1900). [60
Boliett. di bibliogr. d. sc. matem. 1902, 87—90 (A. Viterbi.)

Hervé **Faye** (1814—1902). [61
Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 425—426. (A. Berberich.)

Riccardo **Felici** (1819—1902). [62
Periodico di matem. 5_2, 1902, 69—71. (R. Pitoni.)

Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833—1902). [63
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin. 9_2, 1902, 46—49. (E. J. Wilczynski.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [64
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 14, 1901, nr. 1 : XVII—XVIII. (N. Sonine.)

Ernest de **Jonquières** (1820—1901). [65
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 276—322 [mit Portrat]. (G. Loria.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 71—82 [nur Schriftverzeichnis]. (G. Loria.)

Ernst **Schröder** (1841—1902). [66
Revue de mathém. (Turin) 8, 1902, 54—56. (R. Haussner.)

f) Aktuelle Fragen.

Müller, Felix, Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. II (1901). [Recension:] Arch. der Mathem. 4_3, 1902, 162—163. (E. Jahnke.) [67

Schulze, E., Über einige Bezeichnungen in der Schulmathematik. [68
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 368—370.

[Die amerikanische Mathematiker-Versammlung in Pittsburg 1902.] [69
Science 15_2, 1902, 131—136. (E. S. Crawley.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1902, 94—106. (E. S. Crawley.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— J. Andrade in Besançon zum Professor der Mechanik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Dr. W. G. Cady zum Professor der Physik an der „Wesleyan university" (Winnipeg, Canada).

— Professor M. Disteli in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Strafsburg.

— Privatdocent K. Döhlemann in München zum Professor der darstellenden Geometrie an der Universität daselbst.

— Privatdocent Th. Gross in Berlin zum Professor der Physik an der technischen Hochschule daselbst.

— W. A. Hamilton in Chicago zum Professor der Astronomie und Mathematik am „Beloit college".

— Professor K. Hensel in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität in Marburg.

— Professor D. Kikuchi in Tokyo zum Kultusminister von Japan.

— Observator H. Kobold in Kiel zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor F. Koláček in Brünn zum Professor der mathematischen Physik an der böhmischen Universität in Prag.

— Professor Emil Müller in Königsberg zum Professor der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule in Wien.

— Professor H. Padé in Lille zum Professor der Mechanik an der „Faculté des sciences" in Poitiers.

— Dr. H. A. Perkins zum Professor der Physik am „Trinity college" (Durham, N. C.).

— E. Perreau zum Professor der Physik an der „Faculté des sciences" in Besançon.

— Privatdocent M. Radaković in Innsbruck zum Professor der Physik an der Univeritát daselbst.

— Privatdocent C. K. Russian in Odessa zum Professor der Mathematik an der Universität in Krakau.

— Dr. F. A. Saunders in Syracuse zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. S. Takagi zum Professor der Mathematik an der Universität in Tokyo.

— „Répétiteur" P. Vieille in Paris zum Professor der Physik an der „Ecole polytechnique" daselbst.

Todesfälle.

— W. H. Austin, Lehrer der Mathematik an der Universität in Birmingham, gestorben den 20. Mai 1902, 27 Jahre alt.

— Charles William Mc Gowan Black, Professor der Mathematik an der Universität von Oregon in Eugene, gestorben in La Grande (Oregon) den 11. August 1902.

— Joseph F. Bonnel, Professor am „Lycée Ampère" in Lyon, gestorben daselbst den 3. August 1902, 76 Jahre alt.

— Riccardo Felici, früherer Professor der Physik an der Universität in Pisa, geboren in Parma den 11. Juni 1819, gestorben in S. Alessio bei Lucca den 20. Juli 1902.

— Annibale Ferrero, Direktor der geodätischen Arbeiten in Italien, geboren in Turin den 8. Dezember 1840, gestorben in Rom den 7. August 1902.

— Max Genty, Schiffslieutnant, gestorben in Toulon den 24. Oktober 1902, 35 Jahre alt.

— August Heller, Oberbibliothekar der ungarischen Akademie der Wissenschaften, geboren in Budapest den 6. August 1843, gestorben daselbst den 4. September 1902.

— Hermann Klein emeritierter Oberlehrer des Vitzthumschen Gymnasiums in Dresden, geboren in Plauen den 24. März 1832, gestorben in Dresden den 12. Oktober 1902.

— Robert Rubenson, pensionierter Vorsteher der meteorologischen Centralanstalt in Stockholm, geboren in Stockholm den 10. April 1829, gestorben daselbst den 14. Oktober 1902.

— Vojtech Šafarik, Professor der Astronomie an der böhmischen Universität in Prag, geboren in Neusatz (Ungarn) den 26. Oktober 1829, gestorben in Prag den 2. Juli 1902.

— Gustav Wertheim, pensionierter Professor an der Realschule der israelitischen Gemeinde in Frankfurt am Main, geboren in Imbshausen den 9. Juni 1843, gestorben in Frankfurt am Main den 31. August 1902.

— Heinrich Wild, früher Direktor des physikalischen Centralobservatoriums in Pulkowa, geboren in Zürich den 17. Dezember 1833, gestorben daselbst den 6. September 1902.

— Julius Ziegler, Meteorolog in Frankfurt am Main, geboren in Frankfurt am Main den 25. Oktober 1840, gestorben daselbst den 15. September 1902.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Professor R. Sturm in Breslau hat für das Wintersemester 1902—1903 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— Professor M. Brendel in Göttingen hat für das Wintersemester 1902—1903 eine einstündige Vorlesung über Gauss' Leben und Wirken angekündigt.

— At the „Columbia university" (New York), Professor D. E. Smith will deliver also during the academic year 1902—1903 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— Privatdocent E. Rebmann in Freiburg i. Br. hat für das Wintersemester 1902—1903 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Arithmetik angekündigt.

— Professor W. F. Wislicenus in Strafsburg wird im Wintersemester 1902—1903 eine Stunde wöchentlich die neuesten litterarischen Erscheinungen auf dem Gebiete der Astronomie besprechen.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1902.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1902 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Karlsbad 22.—27. September statt, in Gemeinschaft mit der Abteilung 1 der 74. Deutschen Naturforscherversammlung; die dritte Sitzung war gemeinsam mit der Abteilung II (Physik). In der ersten Sitzung erstattete Herr G. Kowalewski einen Bericht über Lies Theorie der Transformationsgruppen. Die dritte Sitzung brachte drei Vorträge von den Herren F. S. Archenhold, W. Kaufmann und M. Abraham über Themata aus der angewandten Mathematik. In der vierten Sitzung berichteten die Herren W. Fr. Meyer und F. Klein über den Stand der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, und im Anschlufs hierzu gab Herr J. Molk Auskunft über das in Angriff genommene französische Encyklopädie-Unternehmen. In derselben Sitzung hielt Herr Felix Müller einen Vortrag über die Abkürzung der Titel mathematischer Zeitschriften, und legte ein alphabetisches Verzeichnis der abgekürzten Titel von etwa 750 Zeitschriften vor; dies Verzeichnis wird in wesentlich umgearbeiteter Form in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen. In der fünften Sitzung verlas Herr E. Jahnke zwei Briefe J. Steiners an C. G. J. Jacobi und ein offizielles Schriftstück von diesem betreffend Steiner. Weitere Vorträge wurden gehalten von den Herren E. Czuber, R. Daublensky von Sterneck, A. Grünwald, M. W. Haskell, E. Jahnke, G. Kohn, G. Kowalewski, H. Liebmann, R. Mehmke, W. Fr. Meyer, H. Müller, H. Schubert, E. Steinitz und E. Wälsch; an viele Vorträge knüpften sich Diskussionen, die zuweilen sehr lebhaft waren. — Es wurde beschlossen, den dritten internationalen Mathematiker-Kongrefs, zu dessen Vorsitzenden Herr Heinrich Weber gewählt worden ist, Anfang August 1904 in Heidelberg abzuhalten.

— *Mathematics at the British association 1902.* The British association met at Belfast 1902, September 10th—17th. In section A (mathematics) the president Mr. J. Purser gave a historical sketch of the development of the mathematics and physics in Ireland from the beginning of the 19th century.

Namenregister.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

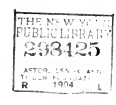
GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. VIERTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON P. G. TAIT ALS TITELBILD, DEM IN DEN TEXT GEDRUCKTEN BILDNIS VON M. CURTZE, SOWIE 28 TEXTFIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
293425
R 1904 L

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Aktuelle Fragen.

Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

In meinem Artikel: „Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik“ [1]) habe ich darauf hingewiesen, daß eine wissenschaftliche Geschichte der Mathematik in erster Linie die Entwickelung der mathematischen Ideen berücksichtigen muß. Ist der Verlauf dieser Entwickelung regelmäßig gewesen, d. h. fällt die chronologische Ordnungsfolge wesentlich mit der systematischen zusammen, so genügt selbstverständlich eine einfache Auseinandersetzung des tatsächlichen Entwickelungsganges, aber wenn dies nicht der Fall ist, muß der Geschichtsschreiber auch versuchen die scheinbare Unregelmäßigkeit zu erklären, denn sonst gewinnt man keinen wirklichen Einblick in die Entwickelungsgeschichte der Mathematik. Zuweilen liegt die Erklärung ziemlich nahe; so z. B., kann die Unregelmäßigkeit auf einem Fehler in dem Ausgangspunkte der Untersuchungen, um die es sich handelt, beruhen, oder darauf, daß gewissen Fragen eine allzu geringe Aufmerksamkeit gewidmet worden ist. Zuweilen ist der Grund einer Unregelmäßigkeit der Entwickelung auf einem besonderen Gebiete darin zu suchen, daß ein angrenzendes Gebiet zeitweilig entweder verhältnismäßig sehr wenig oder verhältnismäßig sehr viel bearbeitet worden ist. In vielen Fällen aber ist es unmöglich, solche oder ähnliche rein sachliche Gründe der Unregelmäßigkeit zu entdecken, man muß vielmehr auf andere Umstände, z. B. die eigenartige Anlage eines gewissen Mathematikers oder gewisse Zeitströmungen Rücksicht nehmen. In der Tat bilden ja die mathematischen Ideen keine Welt für sich, jede derselben verdankt ihre Entstehung einer oder mehreren Persönlichkeiten, und von einem höheren Gesichtspunkte aus kann die geistige Arbeit dieser Persönlichkeiten als ein integrierender Teil der allgemeinen Kulturarbeit

1) G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* Bibliotheca Mathematica 2_3, 1901, 1—4.

betrachtet werden. Somit wäre die kulturhistorische Behandlnng der Geschichte der Mathematik die einzige, die zu einem wahren und vollständigen Verständnisse des Entwickelungsganges der Mathematik führen könnte.

Diese Schlußfolgerung, die natürlich auch für die Geschichte jeder anderen Wissenschaft gilt, ist gewiß an sich richtig, nur darf man sich nicht dadurch verlocken lassen, den Geschichtsschreibern der Mathematik ohne weiteres eine kulturhistorische Behandlung ihres Materials zn empfehlen. Denn *die* Behandlnng, von der soeben die Rede war, muß selbstverständlich als ein Ideal betrachtet werden, das für uns, die wir jetzt leben, nnerreichbar ist, und es ist *a priori* sehr wohl möglich, daß die kulturhistorische Darstellnng, die sich tatsächlich durchführen läßt, von untergeordnetem Wert sein kann. Sehen wir also nach, was man bisher auf diesem Gebiete geleistet hat!

Unter den Versuchen, die Geschichte der Mathematik kulturhistorisch zu behandeln, hat man zwei Arten zu unterscheiden. Die erste Art bringt eine Schilderung der allgemeinen Kulturentwickelung als Hintergrund für die rein fachmäßige Darstellnng, wobei in geeigneten Fällen die Zeitumstände hervorgehoben werden, die znm Aufschwung oder zum Niedergang der Mathematik oder gewisser Abteilungen derselben beigetragen haben. Gegen eine solche kulturhistorische Behandlung ist natürlich an sich nichts auszustellen; im Gegenteil werden dadurch einige der oben angedeuteten Unregelmäßigkeiten genügend erklärt, nnd die ganze Darstellung wird auch viel interessanter. Nur soll man sich immer erinnern, daß die Geschichte der Mathematik die Hauptsache ist, und daß folglich die Schilderung der allgemeinen Kulturentwickelung nicht allzu ausführlich werden darf. Unter dieser Bedingung kann die Behandlung mit ebenso gutem Rechte rein fachmäßig genannt werden.

Aber es gibt eine andere kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik, der in eigentlicherem Sinne das Prädikat „kulturhistorisch" zukommt, auf welche ich mich im folgenden immer beziehen werde, wenn ich dies Wort benutze. Bei dieser Behandlungsweise geht man von der Voraussetzung ans, daß die verschiedenen Völker besondere Anlage zur Mathematik haben, die natürlich im Lanfe der Jahrhunderte mehr oder weniger modifiziert werden kann, und die mathematische Forschungsarbeit wird in erster Linie als eine Äußerung dieser Anlage betrachtet; die Forschungsarbeit geht in einer von der Anlage bestimmten Richtung fort, sofern nicht von außen, d. h. von einem anderen Volke, störende Einwirkungen vorkommen. Das Hauptproblem der Geschichte der Mathematik wird also sein: für ein gegebenes Volk und einen gegebenen Zeitabschnitt die besondere Anlage zur Mathematik zu bestimmen, und wenn man für alle in Betracht kommenden Fälle dies Problem gelöst hat, so ist es leicht ein

vollständiges Verständnis des Entwickelungsganges der Mathematik zu erlangen. Zugleich wird man imstande sein, die Quellen für die Geschichte der Mathematik im Bedarfsfalle zu ergänzen und zu berichtigen; wenn nämlich in der Literatur eines Volkes mathematische Sätze oder Methoden angetroffen werden, die für die besondere Anlage desselben nicht passen, so weiß man, daß eine Einwirkung von außen stattgefunden hat, wenn auch die Quellen keine Auskunft hierüber geben, und ebenso kann man im Falle streitiger oder unvollständiger Angaben entscheiden, welchem Volke eine gewisse Entdeckung zukommt.

Ich beeile mich zu bemerken, daß, so weit mir bekannt ist, kein Vertreter der kulturhistorischen Behandlungsweise versucht hat, dieselbe auf die Entwickelung der modernen Mathematik anzuwenden, und es ist wohl kaum wahrscheinlich, daß künftighin ein ernster Versuch in dieser Richtung gemacht werden wird. In der Tat wäre es fast zu kühn z. B. durch eine Untersuchung der Leistungen der norwegischen Mathematiker bestimmen zu wollen, welche mathematische Begabung die Norweger haben, und das so gewonnene Resultat zu benutzen, um ausfindig zu machen, in wie weit Abel die Theorie der elliptischen Funktionen selbständig entdeckt hat. Wenn aber die kulturhistorische Behandlung nicht für die Geschichte der modernen Mathematik, die ja für den Mathematiker vom größten Interesse sein muß, angewendet werden kann, so wird natürlich schon dadurch der Wert dieser Behandlung wesentlich vermindert. Eine nähere Untersuchung wird zeigen, daß auch in den Fällen, wo die Möglichkeit einer kulturhistorischen Behandlung nicht von vorne herein ausgeschlossen ist, der Wert dieser Behandlung sehr problematisch sein muß.

Wie ich oben bemerkt habe, setzt man bei der kulturhistorischen Behandlung voraus, daß einem bestimmten Volke eine besondere Anlage zur Mathematik zukommt, aber schon die theoretische Richtigkeit dieser Voraussetzung dürfte aus guten Gründen bezweifelt werden können. Daß die geographischen und wirtschaftlichen Verhältnisse eines Volkes einen gewissen Einfluß auf die Ausbildung der rein volkstümlichen Mathematik haben kann, soll natürlich nicht in Abrede gestellt werden, daß aber dieser Einfluß auch auf das wissenschaftliche Studium der Mathematik fortgepflanzt werden muß, ist meiner Ansicht nach eine bisher unbestätigte Hypothese, deren Richtigkeit ich höchstens in Bezug auf ein sehr kleines Volk zugeben möchte. Aber angenommen, daß die Voraussetzung wirklich an sich richtig wäre, so ist dennoch ihr praktischer Wert fast gleich Null oder sogar negativ, weil eben in den Fällen, wo sie für den Geschichtsschreiber von Nutzen sein würde, das vorhandene Quellenmaterial nicht genügt, um die betreffende Anlage zur Mathematik nach Quantität und Qualität genau festzustellen. Je geistreicher nun ein Vertreter der kulturhistorischen

Behandlungsweise ist, um so leichter wird er verlockt werden, die Anlage zur Mathematik bei den verschiedenen Völkern aus der Tiefe seines Bewußtseins zu konstruieren, und mit Bezugnahme hierauf eine Schilderung der Entwickelung der Mathematik zu bieten, die vielleicht recht bald wegen Auffindung neuen Quellenmaterials wesentlich berichtigt werden muß. Man vergleiche nur unsere jetzige Auffassung der Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter mit der Hankelschen, deren Hauptzüge auf folgende Weise dargestellt werden können.[1])

> Die Geschichte der Mathematik fängt mit einer vorgriechischen Periode an, in welcher aus handgreiflicher Empirie gewisse Regeln entstanden, die dem Inhalt nach mit einfachen mathematischen Sätzen zusammenfallen. Dieser Rohstoff wurde teils von den Griechen, teils von den Indern wissenschaftlich behandelt, und zwar so, daß die Griechen den geometrischen, die Inder dagegen den arithmetischen Stoff bearbeiteten. Jedes dieser Völker hatte seine spezielle mathematische Begabung, was indessen nicht verhinderte, daß ausnahmsweise auf griechischem Boden ein Arithmetiker entstand. Dieser war Diofantos, der aber kaum als Grieche anzusehen ist, und er muß notwendigerweise äußerem Einflusse unterworfen worden sein; wären seine Schriften nicht in griechischer Sprache geschrieben, so wäre Niemand auf den Gedanken gekommen, dieselben aus griechischer Kultur entsprossen anzusehen. — Was die Griechen und die Inder auf verschiedenen Gebieten geleistet hatten, wurde von den Arabern übernommen und zum Teil weiter entwickelt, indessen macht sich bei diesen eine entschiedene Anlage zur Astronomie ersichtlich.

Wie wesentliche Berichtigungen dieser Darstellungsweise sind nicht jetzt auf Grund neuen Quellenmaterials nötig geworden![2])

Wie leicht ein geistreicher Vertreter der kulturhistorischen Richtung auch inbetreff einzelner Tatsachen zu bestimmten Behauptungen verleitet werden kann, die kaum mehr als bloße Vermutungen sind, dürfte deutlich aus einer Stelle der Cantorschen Arbeit über die römischen Agrimensoren hervorgehen, wo über gewisse im Codex Arcerianus vorkommende arithmetische Aufgaben, darunter auch die Summierung der Reihe der Kubikzahlen, berichtet wird[3].) Am Ende des Berichtes stellt Cantor die Frage: „Wem gehören diese Aufgaben an?“ und beantwortet unmittelbar diese Frage auf folgende Weise: „Natürlich keinem Römer. Die Stellung der

1) Vgl. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* (Leipzig 1874), 88—89, 157, 227—228.

2) Vgl. P. Tannery, *La géométrie grecque* (Paris 1887), 4—5.

3) M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig 1875), 128.

„Römer in der Geschichte der Mathematik ist eine erhaltende, keine „fördernde gewesen. Daß sie selbst nichts schufen, ist allgemein anerkannt, „wenn aber, was Römer Mathematisches lehrten, nur von ihnen Aufbewahrtes „ist, so haben wir keinerlei Auswahl für die Herknnft des so Aufbewahrten. „Zur Zeit, in der die Römer mathematische Dinge sich aneigneten, waren „es nur die Alexandriner, welche ihre Lehrer sein konnten. Alexandrinisch „war die römische Feldmeßwissenschaft, alexandrinisch war anch dieser „arithmetische Teil.“ Es ist wohl ziemlich überflüssig zu bemerken, daß es bei der rein fachmäßigen Behandlung gewiß nicht erlaubt ist zu behaupten, daß die fraglichen arithmetischen Sätze, von denen einige leicht empirisch entdeckt werden konnten, *natürlich* keinem Römer angehören, und daß es ebensowenig erlaubt ist, den alexandrinischen Ursprung der Sätze als etwas selbstverständliches zu bezeichnen. Meiner Ansicht nach könnte man mit ebenso gutem Recht die Cantorsche Folgerungsweise anwenden um zu beweisen, daß Johann Bolyai nicht die nichteuklidische Geometrie selbständig erfunden hat; es wäre nnr nötig Ungarn statt Rom nnd Deutschland statt Alexandria zu setzen, sowie die Schlußworte ein wenig zu ändern, die Schlußfolgerung würde dann meines Erachtens ebensosehr oder ebensowenig stichhaltig sein.

Im vorhergehenden habe ich aus prinzipiellen Gründen mein Bedenken ausgesprochen gegen die kulturhistorische Behandlnng der Geschichte der Mathematik, sofern es sich nicht lediglich um die volkstümliche Mathematik handelt. Ich füge noch hinzu, daß bei dieser Behandlung gewisse Fragen in den Vordergrund treten müssen, die für die Geschichte der mathematischen Ideen von sehr untergeordneter Bedeutnng sind.[1] So z. B. muß es für den Knlturhistoriker wichtig sein zu ermitteln, ob die deutschen Cossisten des 15. Jahrhunderts ihre Kenntnisse aus italienischen oder aus arabischen Quellen entnommen haben, und im letzteren Falle ob ans lateinischen Übersetzungen oder direkt aus den Originalschriften, während für die rein fachmäßige Behandlung die Hauptfrage ist, welche Kenntnisse diese Cossisten anderswo bekommen haben, und die Nationalität der Vermittler der fraglichen Kenntnisse nur eine Nebenfrage und zwar hauptsächllch literarischen Interesses ist.

Ich habe sowohl im Titel als auch im Texte dieses Artikels den Ausdruck „rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik“ benutzt; aus dem Zusammenhange dürfte es klar sein, daß ich darunter eine zweckmäßige Darstellung der Entwickelung der mathematischen Ideen verstehe, und von einer solchen Darstellung fordere, daß sie auch versuchen

1) Vgl. G. Eneström, *Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik*; Bibliotheca Mathematica 3_3, 1902, 4.

soll, die scheinbaren Unregelmäßigkeiten der Entwickelung zn erklären. Aber, wie ich schon bemerkt babe, ist der Grund dieser Unregelmäßigkeiten nicht immer auf dem Gebiete der Mathematik, sondern anderweitig zu suchen, und die Frage wird dann, ob es in solchen Fällen angezeigt ist, eine möglichst vollständige Erklärung zu geben oder nur den betreffenden Grnnd im Vorübergehen anzudeuten. Handelt es sich nm eine ausführliche Spezialuntersuchung, dürfte es wohl im allgemeinen nützlich sein, daß die Erklärung möglicbst vollständig wird, aucb wenn es für diesen Zweck nötig ist, anf die Lebensumstände und die persönlichen Beziehnngen der Mathematiker näher einzugehen; soll dagegen eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik gegeben werden, scheint es mir dringend zu empfehlen, eher zu knapp als zu ausführlich zn sein, sobald man Gegenstände in die Schilderung hereinzieben muß, die gar nicht mathematisch sind.

Ich braucbe wohl kaum zu bemerken, daß ich in diesem ganzen Artikel nur eine solche Darstellnng der Geschicbte der Mathematik, deren Zweck rein wissenschaftlicb ist, vor Augen gehabt habe. In einer populären Darstellung kann man zuweilen gezwungen werden, nicht eine Geschichte der mathematischen Ideen sondern eine Geschichte der Matbematiker zu bieten, nnd aucb bei Universitätsvorlesungen, deren Aufgabe zum Teil sein muß, in das Stndinm der Geschicbte der Mathematik einzufübren, kann es unter Umständen nützlich sein etwas mehr Gewicht auf das biographische Element zn legen.

Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertume.

Von Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Herons Schrift „über eine Dioptra" ist im allgemeinen bekannt[1]), weniger vielleicht die Einrichtung des Instrumentes selber. Zum Verständnis des letzteren hat der sachkundige Venturi, auf den Vincent meist zurück-

1) Vgl. Cantor, *Agrimensoren* S. 20 ff.; Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1², 356; G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* III, Modena 1900, 111 ff.; Venturi, *Commentarj sopra la storia e le teorie dell'ottica*, Bologna 1814, I, S. 77 ff.; Vincent, Notices et extraits des manuscrits de la bibl. impériale XIX, Paris 1858, 2 p. 157 ff. Vincents Figur ist von Gerland und Traumüller, *Geschichte der physikalischen Experimentierkunst*, Leipzig 1899, S. 52 übernommen, wo dessen Rekonstruktion als „modernisiert" bezeichnet wird, während Cantor (*Agrimensoren* S. 20) meint, die Gestalt der Dioptra ließe sich mit voller Gewißheit nicht wieder herstellen. Die unseren Notizen beigefügten Figuren sind der neuen, im 3. Bande außer den neuentdeckten *Metrika* (Vermessungslehre) auch die Dioptra enthaltenden Heron-Ausgabe (Bd. 3 griechisch und deutsch von H. Schöne, Leipzig 1903) entnommen. Ich halte die Figuren für wohlgelungen und dem jetzt zuverlässig edierten und nach Möglichkeit verbesserten Texte entsprechend. Obwohl die Heronische Beschreibung eine von Venturi erkannte, von Vincent mit Unrecht bestrittene, von H. Schöne auf 4 Blätter der Hs. bemessene Lücke bietet, so läßt sich dennoch das Fehlende im wesentlichen aus anderen einschlägigen Stellen der Heronischen Schrift mit einiger Sicherheit ergänzen, wie H. Schöne treffend im Jahrbuch des archäologischen Instituts 14, 1899, S. 91—103 *(Die Dioptra des Heron)* gezeigt hat. Vielleicht war schon in der Vorlage der allein maßgebenden Pariser Hs. noch eine andere Lücke. Denn man vermißt trotz einiger Andeutungen (262, 12; 270, 15) eine *genauere* Angabe über die Art des Streckenmessens, ob mit Meßbändern, Meßketten u. dgl., und über die Beschaffenheit, insbesondere die Länge derselben sowie die Art ihres Gebrauches. Besonders möchten wir wissen, wie Heron in geneigtem Gelände die horizontale Entfernung gewann. Unsere Feldmesser ermitteln nach Messung der geneigten Strecke a ihre horizontale Projektion b durch Messung des Neigungswinkels α und Berechnung der Formel $b = a . \cos \alpha$. Winkelmessungen hat Heron nicht vorgenommen; er hatte ja auch, wie wir jetzt wissen, keine trigonometrischen Formeln und Tabellen. Er nennt die horizontale Strecke oft den „Abstand nach einer Setzwage" (218, 21; 230, 1, 7: διάστημα τὸ πρὸς διαβήτην). Sollte Heron seine Strecke allemal nur auf kurze Entfernungen unter Anspannung eines Seiles (vgl. *Dioptra* 270, 15 f.; 254, 13), dessen horizontale Lage eben die Setzwage gewährleistete, ausgeführt haben? Gewiß ein umständliches Verfahren, das aber zur bekannten ägyptischen Seilspannung wohl passen würde.

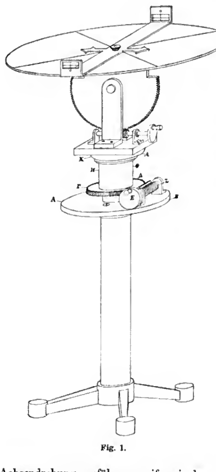


Fig. 1.

geht, uns zuerst den Weg geebnet, aber genaue, sich dem Texte auch in den Details anpassende Rekonstruktionen verdanken wir erst der eindringenden Interpretation von H. SCHÖNE und der technischen Beihilfe des Ingenieurs J. NEUMANN. Danach ist die keineswegs „modernisierte“, wenngleich teils einer modernen Kanalwage teils einem Theodolite gleichende Einrichtung folgende:

Auf einem Ständer (Fig. 1) ist eine kreisrunde Bronzescheibe AB befestigt; in Höhe von AB stellt ein im Innern vorspringender Zapfen des Ständers die Verbindnng mit den oberen Teilen her. Um den Zapfen legt sich zunächst ein Ring, auf dem das horizontale Zahnrad $\Gamma\Delta$ ruht. Dessen Zähne greifen in die Schnecke EZ, deren Gewinde aber durch eine horizontale Nute (Fig. 2) unterbrochen ist. Werden nämlich die Zähne des Rädchens $\Gamma\Delta$ in diese Nute gestellt, so läßt sich zunächst bequem die grobe Achsendrehung ausführen, greifen sie dann in die Schnecke ein, so erfolgt die feine Drehung. Vielleicht ist das noch gar nicht so unpraktisch im Vergleich mit dem ziemlich komplizierten modernen Mechanismus, der dem gleichen Zwecke dient, dem geschlossenen Ringe, der Brems- und der Mikrometerschraube.[1]) Jedenfalls verbindet HERON Einfachheit mit Zweckmäßigkeit. $H\Theta$ ferner ist eine um das obere Ende jenes Zapfens gelagerte

Fig. 2.



1) Vgl. A. BAULE, *Lehrbuch der Vermessungskunde*, 2. Aufl., Leipzig 1901, S. 57 f.

zylindrische Büchse mit dem dorischen Kapitäl KL und darauf liegender quadratischer Plinthe. Zwei 7,8 cm hohe Lagerböcke, welche auf dieser befestigt sind, halten ein halbkreisförmiges Zahnrad, dessen grobe und feine Achsendrehung, d. h. dessen Höhenrichtung von einer ähnlichen Schnecke wie oben abhängig ist. Der Apparat gestattet sogar eine vertikale Stellung zum Horizonte. Auf dem halbkreisförmigen Zahnrade sitzt, wenn es sich nur um das Visieren handelt, eine kreisrunde, in der Normalstellung horizontale Platte, mit zwei aufeinander senkrecht stehenden, eingegrabenen Durchmessern und abnehmbarem *Diopterlineal* (Fig. 1), welches wie Hipparchs Dioptra[1]) 4 Ellen (= 1,85 m) lang und an beiden Enden mit Objektiv und Okular sowie mit zwei Zeigern versehen war. Die Durchmesser ermöglichen die Einvisierung eines rechten Winkels. (Heron, *Dioptra* 214, 22; 226, 16).[2])

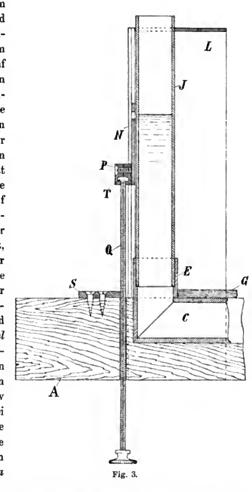


Fig. 3.

Von dem Diopter- oder Visierlineal ist das *Nivellierlineal* zu unterscheiden. Zum Nivellieren waren die kreisförmige Platte und das halb-

1) Theon (= Pappus), *In Ptolem. Magn. constr.* S. 262; Proklos, *Hypotyp. astron. hypothes.* S. 109 ed. Halma. Vgl. F. Hultsch, *Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra;* Abh. z. Gesch. d. Mathem. 9, 1899, 200, 201.

2) Die von Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I², S. 356 aufgestellte Behauptung, daß zu diesem Zwecke zwei Zäpfchen auf der Scheibe verwandt seien, findet im Texte keinen Rückhalt.

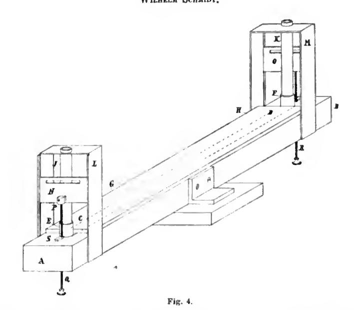


Fig. 4.

kreisförmige Zahnrad nebst Zubehör nicht erforderlich. Das Nivellierlineal mit Kanalwage, auf einer besonderen Plinthe befestigt, wird wohl unmittelbar auf das Kapitäl *KL* gesetzt sein, nachdem die in Fig. 1 gezeichnete Plinthe abgenommen war. Im Nivellierlineale *AB* (Fig. 4 linkes Ende im Durchschnitt Fig. 3) ist in die Oberfläche eine 1,62 m lange Vertiefung von rundem oder quadratischem Querschnitte eingeschnitten, in welche die bronzene Röhre *CD* gebettet war. Diese ist an den Enden *E*, *E* nach oben um höchstens 38 mm gebogen. In diese Umbiegungen werden beiderseits kleine, 23,2 cm hohe Glaszylinder *J* eingekittet. Sie durchbrechen oben die Riegel der sie umschließenden Gehäuse *L* und *M*. An deren Außenseiten lassen sich die bronzenen Schieber *N* und *O* in Falzen auf- und abschieben. Diese Plättchen *N* und *O* enthalten Visiereinschnitte. Ihre Auf- und Abwärtsbewegung vermittelt der Schraubenstift *Q*.

Die 4,62 m lange, 9,6 cm breite, 5,8 cm dicke Schiebelatte *AB* (Fig. 5) ließ eine kreisrunde, halb schwarze, halb weiße, auf der Rückseite durch ein Bleigewicht beschwerte Zielscheibe *EF* mit einem Durchmesser von ca. 20 cm in einer beil- oder, wie wir sagen, schwalbenschwanzförmigen Nute *C* auf- und abwärtsgehen, nachdem die lotrechte Stellung durch das Einspielen eines seitlichen Senkels[1]) *KL* in den 5,8 cm langen Stift

1) Dies ist vielleicht auch für den obigen Apparat vorauszusetzen. Vgl. Vincent, a. a. O.

festgestellt war. Die KL gegenüberliegende Schmalseite (bei A) war mit einer Skala versehen, über welche ein auf der Rückseite von EF befestigter Zeiger lief.[1]

Praktisch ist das Nivellement, wie Heron wiederholt hervorhebt, unter anderem zur Anlegung von Wasserleitungen verwendet. Hierzu sind, wohl schon zur Zeit des Polykrates (6. Jahrh. vor Chr.) auch Bergtunnel angelegt. Bekannt ist des Eupalinos aus Megara Durchstich des 228 m hohen Berges Kastro (Kalkstein) auf Samos,[2] ein im wesentlichen geradliniger Tunnel, der etwa 1000 m lang und durchschnittlich 2,30 m hoch und breit ist. Durch den Tunnel war noch ein tiefer Graben (am Südende 8,30 m tief) zur Einbettung der Leitungsröhren gezogen. Eupalinos muß also auf Grund seiner geodätischen Kenntnisse imstande gewesen sein, das Niveau der in Betracht kommenden Strecken und die Richtungslinie des Stollens zu bestimmen, wenn vielleicht auch mit Hilfe einfacherer Instrumente als Heron in einer entsprechenden Aufgabe (*Dioptra* 15) tut, die lautet: „Einen Berg in gerader Linie zu durchstechen, wenn die Mündungspunkte des Tunnels an dem Berge gegeben sind."

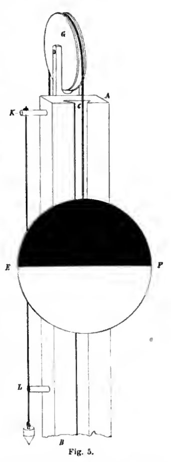


Fig. 5.

Heron benutzt dazu *eine Art* rechtwinkliger Koordinaten und findet durch

1) Der „Stern", d. h. das Winkelkreuz, wurde nach Heron, *Opera* III, 288, 20 nur ganz wenig gebraucht. Über die Einrichtung des (römischen) Sterns (groma) sind wir neuerdings durch einen im Limes zu Pfünz bei Eichstädt gemachten, gut erhaltenen Fund unterrichtet. Vgl. die Abbildungen und die Erläuterung des Verfahrens bei H. Schöne, *Das Visierinstrument der römischen Feldmesser;* Jahrb. d. D. Archäol. Instit. 16, 1901, S. 127—132 (mit 1 Tafel, die den Grabstein des agrimensor aus dem Museo civico von Ivrea darstellt).

2) Vgl. den Ausgrabungsbericht von E. Fabricius, *Altertümer auf der Insel Samos* in den Mitteil. des D. Archäol. Instit. in Athen 1884, S. 163—192 (mit 2 Tafeln). Auch bei den Römern finden wir schon lange vor Heron Stollen, z. B. den Ablaßstollen des Albanerseees (1900 m) aus dem Jahre 396 vor Chr. Gleichzeitig mit Heron ist vielleicht der unter Claudius hergerichtete Ablaßstollen des Fucinerseees (3700 m).

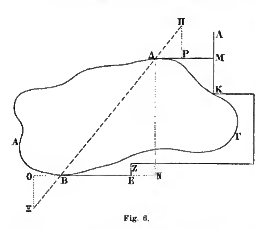


Fig. 6.

Messung BN (Fig. 6) $= BE + ZH - \Theta K - \Delta M$[1]), ferner $\Delta N = EZ + H\Theta + KM$[1]). Dadurch ist das Verhältnis von BN zu ΔN gegeben. Nennen wir nun in den ähnlichen Dreiecken die homologen Seiten BN, ΔP, BO a, a_1, a_2 und ΔN, ΠP, $O\Xi$ b, b_1, b_2, so ist $a : b = a_1 : b_1 = a_2 : b_2$. Es ist $a : b$ gegeben, also auch die Verhältnisse der übrigen homologen Dreiecksseiten. Heron setzt sie beispielsweise alle wie 5 : 1. Damit ist aber die Richtung der Hypotenusen $B\Xi$ und $\Delta\Pi$ und somit auch die des Tunnels $B\Delta$ bestimmt, der von beiden Mündungspunkten her in Angriff genommen werden kann. Alsdann werden die Arbeiter einander treffen, wie Heron siegesgewiß hinzusetzt.

Ganz so glücklich ist freilich trotz tüchtiger Fachkenntnis Eupalinos nicht gewesen. Zwar ist nachweislich der samische Tunnel von beiden Seiten in Arbeit genommen (Nordtunnel etwa 575 m lang, Südtunnel 425 m), aber der Nordtunnel weicht beim Zusammenstoße mit dem Südtunnel von dessen Richtungslinie um 5—10 m nach Westen ab, und es war deshalb hier eine kleine Ausbiegung nach Osten erforderlich. Es scheinen des Eupalinos Messungen, wie übrigens auch sein Nivellement, nicht ganz exakt gewesen zu sein.

Sehen wir aber von den für jene Zeit entschuldbaren Ungenauigkeiten ab, so begreifen wir das Erstaunen des Herodot (III, 60), der diesen Tunnel mit „unter die drei größten Werke aller Hellenen“[2]) rechnet.

1) So lese ich 240,9 statt des hsl. ΔM, aber 240,6 mit der Hs. KM.

2) Das zweite Wunder hellenischer Welt war für ihn der Hafendamm von Samos (beinahe 400 m lang), der wohl aus der gleichen Zeit wie der Tunnel stammt. Über eine derartige Anlage belehrt uns Heron, *Dioptra* 17, S. 244 ff.

Zur Rehabilitation des Simplicius.

Von Ferdinand Rudio in Zürich.

Die Besprechung, die Tannery in der Biblioth. Mathem. (3_3, 1902, p. 342—349) meiner Abhandlnng über Simplicius (ebendas. p. 7—62) gewidmet hat, veranlaßt mich zu einigen Bemerkungen, znmal ich an einer bestimmten Stelle direkt zu einer weiteren Erklärung aufgefordert werde. Ich will mich aber auf das notwendigste beschränken.

1. Hippokrates hat bewiesen, daß sich zwei Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Wie er es bewiesen hat, wissen wir nicht. Ich stimme nun vollständig mit Tannery darin überein, daß höchst wahrscheinlich der Beweis mit Hilfe der Exhaustion geführt worden sei. Aber trotz des hohen Wahrscheinlichkeitsgrades ist und bleibt dies eben doch nur eine Vermutung. Und so lange bleibt nun eben auch einmal Antiphon der erste, dessen Name mit der Exhaustionsmethode auf Grund bestimmter historischer Dokumente zu verbinden ist. Geht man von Archimedes zurück über Euklid, so hört in dieser Frage der Weg der Überlieferung mit Antiphon auf. Anders sind weder meine noch Hankels Worte gemeint. Ob Antiphon mit der Exhaustion ein Sophisma verbnnden hat, wie Aristoteles behauptet, geht aus den Überlieferungen (Simplicius, Themistius) nicht mit Sicherheit hervor und ist für die vorliegende Frage von untergeordneter Bedeutung.

2. In den Absätzen 3—5 seines Artikels bespricht Tannery die Frage, ob wohl meine Arbeit das landläufige Urteil über Simplicius wesentlich modifizieren werde, und er kommt zn dem Resultate, daß sie eigentlich an dem Stande der Dinge nicht viel ändere.

Um dies richtig zu verstehen, muß man sich aber genau vergegenwärtigen, worin das bisherige Urteil über den Bericht des Simplicius bestand. „Ignorance", „maladresse" u. dergl. waren bisher die typischen Merkmale des Autors. Kam man an irgend einer Stelle (und wie viele solcher gab es!) nicht beim ersten Anlauf zu einem guten Sinn, so war das immer wieder ein Beweis mehr für die Ungeschicklichkeit und die



Unwissenheit des SIMPLICIUS, und man konnte beruhigt über die Sache hinweggehen.

Ich will offen gestehen: Als ich zuerst anfing, mich mit SIMPLICIUS zu beschäftigen, habe ich, unter dem Einflusse von BRETSCHNEIDER und TANNERY, ganz dieselbe Meinung gehabt, und ich mußte mich immer nur wundern, wie man den Bericht eines so traurigen Tölpels als ein wichtiges historisches Dokument konnte gelten lassen. Mein Vorurteil ging so weit, daß ich mich anfangs sogar dagegen sträubte, als sich erst leise und dann immer stärker der Verdacht zu regen begann, es könnte sich am Ende alles ganz anders verhalten, es könnte am Ende hier ein gründlicher Irrtum vorliegen. Je mehr ich mich aber bemühte, die richtige Interpretation zu finden, um so mehr wurde aus dem früheren „Ignoranten" ein Gelehrter von umfassendem, gründlichem, sicherem Wissen, aus dem ungeschickten Schwätzer und Tölpel ein vorsichtig abwägender, scharf unterscheidender, ganz feiner Kopf. Ich habe mir in meiner Abhandlung die redlichste Mühe gegeben, dieser, wie mir scheinen möchte, doch einigermaßen veränderten Auffassung zu ihrem Rechte zu verhelfen, und ich habe an jeder nur passenden Stelle immer wieder gefragt: „Wo steckt denn hier eigentlich die berüchtigte Unwissenheit und Ungeschicklichkeit des SIMPLICIUS?" — und nun kommt TANNERY und erklärt, die Sachlage habe sich eigentlich durch meine Interpretation nicht wesentlich geändert!

Ich verzichte darauf, nochmals auf eine Besprechung der einzelnen Stellen (DIELS 55, 16; 67, 3—6; 69, 31—32) einzutreten, an denen TANNERY doch wenigstens noch technische Ungeschicklichkeiten des Ausdrucks glaubt nachweisen zu können. Ich verzichte darauf, weil diese Ungeschicklichkeiten, selbst wenn sie bestünden (was aber ganz und gar nicht der Fall ist), von geringem Gewichte wären gegenüber der Hauptsache, nämlich gegenüber der von SIMPLICIUS durchgeführten ganz vortrefflichen, vollständigen und fein durchdachten kritischen Untersuchung der Frage: „Welche Quadratur des Kreises meinte ARISTOTELES, als er von der ‚vermittels der Segmente' sprach?" Wer der Meinung ist, diese Gedankenarbeit sei im wesentlichen noch so zu beurteilen wie früher, wer also im großen und ganzen festhalten will an der „ignorance de SIMPLICIUS", an seiner „maladresse en géométrie" (womit aber viel kompromittierenderes gemeint war, als nur die „maladresse technique", auf die sich jene nunmehr zu reduzieren scheint), der muß Argumente von ganz anderem Range vorbringen, als die Äußerlichkeiten, auf die sich TANNERY jetzt noch stützt.

Wenn ich auf den Nachweis verzichte, daß auch nicht einmal die von TANNERY wiederholt hervorgehobenen technischen Ungeschicklichkeiten zugegeben werden können, so geschieht dies noch ganz besonders im Hinblick auf eine demnächst erscheinende Abhandlung von WILHELM

Schmidt, in der diese und andere den Simpliciusschen Bericht betreffende Fragen besprochen werden sollen. Aus der eingehenden Korrespondenz, die ich mit diesem Gelehrten geführt habe, habe ich die Überzeugung gewonnen, daß die Zahl der zweifelhaften Stellen, über die man in Zuknnft noch wird streiten können, bald eine sehr bescheidene sein dürfte.

3. Tannery fordert mich (p. 345, Anm.) direkt auf, etwas gründlicher das in dem Berichte wiedergegebene Zwiegespräch zu diskutieren, das Simplicius mit seinem Lehrer Ammonius geführt hat. Nach Tannerys Meinung hat Simplicius die Frage nicht gut angefaßt. In einer früheren Abhandlung (1878) hatte Tannery die Antwort, die Simplicius seinem Lehrer gibt, als „une objection" bezeichnet „qui ne fait guère honneur au disciple".

Obwohl ich mich nun darauf beschränken könnte, einfach auf meine Übersetzung zu verweisen, der ich inhaltlich nicht viel hinzufügen kann und in der die Sache auch mit hinreichender Deutlichkeit wiedergegeben ist, so komme ich doch der Aufforderung Tannerys, das Gespräch etwas weiter auszuführen, mit Vergnügen nach. Ich erblicke darin eine willkommene Gelegenheit, an einem bestimmten Beispiele von neuem zu zeigen, wie unbegründet die Vorwürfe gegen Simplicius sind, denn gerade an dieser, von Bretschneider allerdings ganz mißverstandenen und in einem traurigen Kauderwelsch wiedergegebenen Stelle zeigt sich Simplicius in einem besonders günstigen Lichte. Ich kann daher höchstens bedauern, daß Tannery mir die Verteidigung meines Klienten auch wirklich gar zu leicht macht.

Ammonius hatte gesagt: „Daß der Kreis bisher nicht hat quadriert werden können, selbst nicht einmal von Archimedes, wird seinen Grund darin haben, daß gerade Linien und Kreislinien ungleichartige Größen sind. Es ist also durchaus nicht zu verwundern, wenn bisher niemals der Kreis seinem Inhalte nach gleich einer geradlinigen Figur hat gefunden werden können. Machen wir doch auch dieselbe Beobachtung bei den Winkeln, nämlich dem des Halbkreises und seiner Ergänzung zum Rechten, dem sogenannten hornförmigen Winkel. In der Tat kann man, und gewiß doch wohl nur wegen jener Ungleichartigkeit, keinen geradlinigen Winkel angeben, der gleich einem der beiden genannten gemischtlinigen Winkel wäre." (Vergl. Anm. 54 meiner Abhandlung.)

Hierauf antwortete Simplicius: „Was Du da, verehrter Lehrer und Meister, Gleichartigkeit und Ungleichartigkeit nennst, das kann unmöglich den Ausschlag geben bei der Frage nach der Quadrierbarkeit des Kreises, wie eine einfache logische Überlegnng zeigen wird. Halten wir nämlich znnächst einmal die untrüglich bewiesene Tatsache fest, daß das Möndchen über der Quadratseite quadrierbar ist. Sagt man nun, Möndchen und Kreis seien verwandt, seien gleichartige Figuren, so wird dies von Deinem Stand-

punkte aus gewiß nicht unberechtigt sein, denn beide sind aus Kreislinien zusammengesetzt. Dann ist nun aber doch schlechterdings gar nicht einzusehen, warum das Möndchen quadrierbar sein soll und der Kreis nicht — wohlbemerkt, sofern nämlich die Verwandtschaft bei der ganzen Frage eine entscheidende Rolle spielen sollte (*ὅσον ἐπὶ τούτῳ*). Sagt man mir aber: ‚da ist ja gerade der Haken, Möndchen und Kreis sind eben gar nicht verwandt, denn das Möndchen hat Hörner und der Kreis keine!‘ — so soll mir das auch recht sein, ich kann mich auch damit einverstanden erklären. Aber dann wird man doch wohl noch weniger behaupten wollen, Möndchen und geradlinige Figur seien verwandt und doch ist, trotz der jetzt vorliegenden Nichtverwandtschaft, das Möndchen quadrierbar. Verwandtschaft oder Nichtverwandtschaft können folglich nicht maßgebend sein.“

Welcher moderne Mathematiker könnte sich wohl (mit den damaligen Mitteln natürlich) geschickter, ich meine zutreffender, schlichter und anmutiger ausdrücken, als jener schwer verkannte Philosoph! Wo in aller Welt bleibt die Ungeschicklichkeit des Simplicius?

Simplicius fügt seinen Ausführungen noch treffend hinzu: „Der Hinweis auf das scheinbar analoge Verhalten der Winkel ist nicht berechtigt, denn bei den Winkeln liegt die Sache ganz anders. Da hat ja schon Euklid strenge bewiesen, daß „der Winkel des Halbkreises größer ist als jeder spitze geradlinige Winkel, seine Ergänzung aber kleiner“. Jene gemischtlinigen Winkel sind also mit den geradlinigen überhaupt gar nicht vergleichbar, es ist a priori ausgeschlossen, daß man jene durch diese ausdrücken könne“. (Vergl. Anm. 54 und 55 meiner Abhandlung.)

4. Mit am wichtigsten bei der ganzen Interpretation des Simpliciusschen Berichtes ist die Frage nach der Abgrenzung und der Deutung des darin enthaltenen Referates des Eudemus, jenes ältesten Geschichtsschreibers der Geometrie. Hierfür ist nun die Interpretation der Stelle *ὡς γὰρ* (Diels, 61, 11) . . . *τριτημορίῳ* (61, 14) von größter Bedeutung. Ich habe in meiner Abhandlung (Anm. 67) den Beweis zu führen versucht, daß an dieser Stelle *τμήματα* mit Sektoren zu übersetzen sei, und ich muß daran festhalten. Die Einwände Tannerys haben meine Überzeugung nicht im allergeringsten zu erschüttern vermocht. Tannery macht u. a. geltend, daß meiner Auffassung der ganzen Stelle der Singular *δειχθέντος* . . . *τούτου* widerspreche. Wenn, wie ich behauptet hatte, auf zwei vorbereitende Sätze des Hippokrates (was hätte sonst auch *πρῶτον* für einen Zweck?) hingewiesen werden sollte, so hätte der Plural *δειχθέντων* . . . *τούτων* gesetzt werden müssen. Dieses Argument steht aber auf sehr schwachen Füßen. Wie in anderen Sprachen, so kann auch im Griechischen das Demonstrativum, auch wenn es im Singular steht, ebensogut auf eine Gruppe von Erscheinungen, wie auf eine Einzelerscheinung hinweisen. Be-

lege dafür könnte man nach Dutzenden aus den verschiedensten Sprachen beibringen. Der Singular δειχθέντος ... τούτου kann sich also sehr wohl auf eine ganze Gruppe von vorbereitenden Sätzen beziehen, so gut wie „cela démontré“, oder „nachdem dies bewiesen war“. Der Singular beweist hier gar nichts, aber auch wirklich rein gar nichts.

Tannery erklärt sodann, Simplicius hätte die Amphibologie im Gebrauche des Wortes τμῆμα nicht zugeben können. Nun hat aber Simplicius tatsächlich sogar ein Möndchen als ein τμῆμα gelten lassen (Diels 55, 27), warum sollte er also nicht erst recht bei einem Sektor diese Bezeichnung zulassen? Die von Tannery geforderte ausdrückliche Erklärung war für ihn überflüssig, denn diese war bereits vollständig ausreichend in dem erklärenden Zusatze οἷον ... τριτημορίῳ enthalten. An ein Mißverständnis war bei der in τριτημόριον enthaltenen eindeutigen Erklärung gar nicht zu denken. Tannery kann doch unmöglich im Ernste glauben, daß sich im Altertume jemals irgend ein Mensch den Drittelkreis als Segment, statt als Sektor, vorgestellt habe!

Zu alledem kommt nun aber noch, daß bei allen bisherigen Deutungen das Referat des Eudemus mit einem mehr oder weniger großen Unsinn beginnt — der dann natürlich wieder zur Illustration der Ungeschicklichkeit des Simplicius herhalten muß — während nach meiner Interpretation die Stelle einen ganz vortrefflichen und zugleich historisch sehr bemerkenswerten Sinn erhält. Ja, nicht nur einen Sinn, sondern geradezu den Sinn, den Sinn nämlich, den jeder Mathematiker hier verlangt und den auch Eudemus unzweifelhaft damit verbunden hat.

5. Es wäre nun insbesondere noch auf das zu antworten, was Tannery gegen meine Interpretation der beiden Stellen 65, 7—23 und 66, 14 bis 67, 2 der Dielsschen Ausgabe einwendet. Da ich mich aber gerade über diese beiden Stellen sehr eingehend mit Wilhelm Schmidt besprochen habe, so will ich seinen Mitteilungen nicht vorgreifen und hier nur noch die Gelegenheit benutzen, um ein Versehen wieder gut zu machen, das ich in Anm. 95 meiner Abhandlung begangen habe und auf das mich Wilhelm Schmidt aufmerksam zu machen die Güte hatte. An der Stelle 66, 18 hatte nämlich Usener die Lesart BE der Handschriften in BK verwandelt, wodurch in den Text eine Unzulässigkeit geraten war. Ich hatte nun die in den Dielsschen Anmerkungen zwei Zeilen später folgende Notiz „unde δυνάμει Eudemo dedit Usener“ übersehen und infolgedessen jene Unzulässigkeit ganz mit Unrecht Usener zum Vorwurfe gemacht, was ich natürlich sehr bedauere. —

Ich komme zum Schlusse. Daß mit meiner Interpretation des Simpliciusschen Berichtes noch nicht das letzte Wort gesprochen ist, weiß

ich selbst sehr wohl. Noch sind nicht alle Schwierigkeiten gehoben, noch immer bietet der Text Unsicherheiten dar, die erst durch erneute Bemühungen werden beseitigt werden können. Das aber glaube ich jetzt schon sagen zu dürfen: Wenn einmal dieses ehrwürdige, für die Geschichte der voreuklidischen Geometrie so äußerst wertvolle historische Doknment in völlig einwandfreier Interpretation vorliegen wird, dann wird die Leistnng des Simplicius in nur noch günstigerem Lichte erscheinen, als ich sie zu schildern vermochte, und die Haltlosigkeit der früheren Auffassung nur noch deutlicher zu Tage treten.

Zürich, Februar 1903.

Über einige noch nicht sicher gestellte Autorennamen in den Übersetzungen des Gerhard von Cremona.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

In der Bibliotheca Mathematica 3_3, 1902, p. 350—354, habe ich einen Artikel veröffentlicht über die im *Liber augmenti et diminutionis* genannten Autoren, ABRAHAM und JOB filius SALOMONIS; die von mir bei diesem Anlaß angestellten Nachforschungen führten mich zufällig noch auf einige andere dunkle Namen, die in den Übersetzungen des GERHARD VON CREMONA, sowie in den schon oft zitierten und besprochenen Pariser Mss. 7266, 7377 A und 9335 auftreten.[1]) Im folgenden gebe ich nun eine Darlegung der allerdings zum größern Teile nur hypothetischen Resultate meiner diesbezüglichen Untersuchungen.

1. Über ABHABUCHR *qui dicebatur* HEUS (oder DEUS), den Verfasser des von GERHARD übersetzten Buches über die *terrarum corporumque mensurationes* (Par. Ms. 9335, fol. 116v—125v) habe ich in der Bibliotheca Mathematica 11_2, 1897, p. 84—85, und nachher in meiner Abhandlung *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*[2]), p. 216, Anm. 58, berichtet und ihn als identisch mit MUḤ. B. AĠLAB B. ABÎ'L-DAUS, ABÛ BEKR, aus Murcia, gest 511 (1117/18), vermutet. Ich verwerfe diese Konjektur auch jetzt noch nicht[3]), will aber

1) Vergl. die Abhandlungen: P. TANNERY, *Sur le „liber augmenti et diminutionis" compilé par ABRAHAM*, in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 45—47, und A. A. BJÖRNBO, *Über zwei mathematische Handschriften aus dem 14. Jahrhundert*, ibid. 3_3, 1902, p. 63—75.

2) Wird im folgenden zitiert mit „SUTER, *Araber*"; die *„Nachträge und Berichtigungen"* hierzu, veröffentlicht in den Abhandlungen zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 14 (1902), werden zitiert mit „SUTER, *Nachträge*".

3) In dieser Frage dürfte nun einmal der Hinweis auf ABÛ BEKR RASIS *qui dicitur Almansorius* dahinfallen (vergl. auch BJÖRNBO, l. c. p. 72); der *almansorius* (dieser Name wurde irrtümlich als Beiname des Autors aufgefaßt) und der *liber divisionum* sind zwei medizinische Werke des berühmten ostarabischen Arztes MUḤ. B. ZAKARÎJÂ EL-RÂZÎ (SUTER, *Araber*, p. 47).

nicht verschweigen, daß in der Zwischenzeit auch noch zwei andere für mich einige Wahrscheinlichkeit gewonnen haben: 1) Heus könnte das latinisierte Ḥaij (Haijus) sein, nnd der Abhabuchr *qui dicebatur* Heus könnte sein: el-Ḥosein b. Aḥmed (oder Muḥ.) b. Ḥaij, ein Schüler von Ibn el-Burġût (Suter, *Araber*, p. 104 u. 101), ein bedeutender Geometer und Astronom, bekannt unter dem Namen Ibn Ḥaij; wir kennen allerdings die *Kunje* von Ibn Ḥaij nicht, sie kann aber sehr wohl Abû Bekr gewesen sein. Diese Konjektnr gewinnt dadurch noch an Wahrscheinlichkeit, daß Ibn Ḥaij auch ein Schüler von ʿAmr b. ʿAbderraḥmân b. Aḥmed el-Karmânî war (s. unten No. 3). 2) Abhabuchr *qui dicebatur* Heus könnte sein: Jaḥjâ b. Aḥmed Abû Bekr, bekannt nnter dem Namen Ibn el-Chaijât, ein Schüler von Maslama b. Aḥmed el-Maġrîṭî in der Rechenkunst und Geometrie, Astrolog und Arzt von Soleimân, dem Sohne Ḥakems II., gest. 1055/56 (Suter, *Araber*, p. 101); Heus könnte entstanden sein aus Chaijâṭ oder aus Jaḥjâ, beide Herleitungen sind allerdings etwas gewagt, aber nicht unmöglich.[1])

2. *Liber* Saydi Abuothmi. Dies ist der Titel des ersten Anhangs zur vorigen Abhandlung (Par. Ms. 9335, fol. 125^v—126^r). Dieser Autor ist nicht, wie Steinschneider in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft 25, p. 401, und Eneström in der Note zu der eben zitierten Abhandlnng von P. Tannery (p. 47) vermuten, der ostarabische Arzt und Übersetzer aus dem Griechischen, Saʿîd b. Jaʿqûb el-Dimišqî Abû ʿOṯmân (Suter, *Araber*, p. 49), sondern sehr wahrscheinlich der Westaraber Saʿîd b. Muḥ. b. el-Baġûnis, Abû ʿOṯmân (ibid. p. 101), ein Schüler von Maslama b. Aḥmed el-Maġrîṭî und ein bedeutender Geometer, gest. am 1. Rageb 444 (1052); denn der Ostaraber war in erster Linie Arzt, dann Übersetzer aus dem Griechischen (einige Bücher der Elemente des Euklides und den Kommentar des Pappus zum 10. Buche); daß er über Flächen- und Körperberechnung geschrieben habe, wird nirgends bemerkt und ist sehr unwahrscheinlich, deutet doch seine Übersetzung des Kommentars des Pappus darauf hin, daß er sich mit Vorliebe der philosophischen Richtung in der Mathematik zugewandt hat; auch wird er, wo er zitiert wird (z. B. in der lateinischen Übersetzung des Pappusschen Kommentars im Pariser Ms. 7377 A, s. auch unten No. 5), nur genannt Abû ʿOṯmân el-Dimišqî, Saʿîd kommt nirgends vor, vor allem auch nicht in dem Pariser Ms. 2457, 5° und 6° (früher Suppl. 952, 2), das den ara-

1) Die zweite hat mehr Wahrscheinlichkeit für sich: fällt nämlich das arabische j im Anfang des Wortes „Jaḥjâ" weg, so kann es genau wie Ḥaij (latinisiert Haijus = Heus) gelesen werden; auch ist zu bemerken, daß der Name „Jaḥjâ" sehr häufig in Verbindung mit der *Kunje* „Abû Bekr" auftritt.



bischen Text des genannten Kommentars enthält. — Es könnten allerdings auch in Frage kommen: SA'ÎD B. AḤMED EL-FARAḌÎ, ABÛ 'OṮMÂN, aus Cordova, gest. 950 (SUTER, *Araber*, p. 54) und SA'ÎD B. FATḤÛN B. MOKRAM, ABÛ 'OṮMÂN, der c. 960—1000 geleht hat (ibid. p. 73), allein der erstgenannte steht bedeutend im Vorzug, da er allein von den dreien als bewandert in der Geometrie und sogar als Lehrer in dieser Wissenschaft genannt wird.

3. *Liber Aderameti.* So wird meistens der Titel zum zweiten Anhang (Par. Ms. 9335, fol. 126r—126v) der Abhandlung des ABHABUCHR gelesen, P. TANNERY aber liest *Aderamen.* Dieser Autor könnte identisch sein mit 'ABDERRAḤMÂN B. CHALAF B. 'ASÂKIR EL-DÂREMI oder EL-DÂRAMÎ, ABÛ'L-ḤASAN (SUTER, *Araber*, p. 107), einem in Geometrie und Logik sehr bewanderten Arzt, Schüler von dem unter No. 2 genannten SA'ÎD B. MUḤ. B. EL-BAĠÛNIŠ. Liest man mit P. TANNERY *Aderamen*, so könnte dies wohl aus 'ABDERRAḤMÂN entstanden sein; A. BJÖRNBO aber verwirft diese Lesart und zieht die des alten Inhaltsverzeichnisses *Aderameti* vor, dies könnte dann vielleicht aus EL-DÂRAMÎ, das ED-DÂRAMÎ oder AD-DÂRAMÎ gesprochen wird, hervorgegangen sein; berücksichtigt man noch, daß im Westen schon damals wie noch heutzutage in Marokko das lange arabische *a* (*â*) wie *ê* oder *ä* ausgesprochen wurde (daher auch MILÊUS statt MILÂUS), so kommt man mit AD-DÊRAMÎ dem Worte *Aderameti* sehr nahe; über die Richtigkeit des *t* scheinen ja die Gelehrten, die das Pariser Ms. geprüft haben, in Zweifel zu sein. Daß dieser Gelehrte ein Schüler von ABÛ 'OṮMÂN SA'ÎD B. EL-BAĠÛNIŠ war, bestärkt uns in der Vermutung, daß er der Verfasser eines ähnlichen Buches über Flächen- und Körperberechnung, wie das seines Lehrers, gewesen sein möchte. — Ist das korrumpierte Wort *Aderameti* aus 'ABDERRAḤMÂN hervorgegangen, so könnten noch in Frage kommen: 'ABDERRAḤMÂN B. ISMÂ'ÎL B. BEDR, der EUKLIDES von Andalusien, gest. c. 1000 (SUTER, *Araber*, p. 73), 'ABDERRAḤMÂN B. 'ABDALLÂH B. SEJJID EL-KELBÎ, gelehrt in Rechenkunst und Geometrie, gest. 1064 (ibid. p. 104) und vielleicht auch 'ABDERRAḤMÂN B. 'ABDALLÂH B. 'IJÂḌ EL-JAḤṢABÎ, ABÛ ZEID (ibid. p. 108). — Es wäre aber auch möglich, daß *Aderameti* entstanden sein könnte aus EL-ḤAḌRAMÎ und dann käme in Frage 'OMAR B. AḤMED B. CHALDÛN EL-ḤAḌRAMÎ, gest. 1057/58 (ibid. p. 102), ein Schüler vom MASLAMA EL-MAĠRÎṬÎ. Und noch eine dritte Konjektur über *Aderameti* oder *Aderamen!* Es könnte entstanden sein aus EL-KARMÂNÎ, indem der nach aufwärts gehende Haken des arabischen *k* (ك) abgefallen und dann gelesen worden wäre AD-DARMÂNÎ, oder, da nach dem *r* ein kurzer Vokal gelesen werden kann, und wie ich früher schon angeführt habe, *â* auch in *ê* übergeht, AD-DERAMÊNÎ; dann hätten wir den Gelehrten 'AMR B. 'ABDERRAḤMÂN B. AḤMED EL-KARMÂNÎ (ibid.

p. 105), einen der bedeutendsten Geometer Spaniens im 11. Jahrhundert (gest. 1066), den Lehrer des unter 1 genannten Ibn Ḥaij; übrigens haben wir nicht nötig, wie wir es getan haben, *Aderamen* aus el-Karmânî herzuleiten, die Wortgruppe ʿAmr b. ʿAbderraḥmân b. Aḥmed könnte auch zu *Aderametus* hinführen. — Es kommt auch noch in Frage Aḥmed b. Naṣr aus Cordova, der einzige der bis jetzt genannten Gelehrten, dem ein Buch über die Ausmessung der Figuren zugeschrieben wird (ibid. p. 52); seine Lebenszeit ist unsicher, das Todesjahr wird von Casiri auf 944 angegeben, in den arabischen Quellen aber findet sich keine Angabe hierüber; Aḥmed b. Naṣr ist allerdings nicht gut mit *Aderametus* in Übereinstimmung zu bringen, dagegen fällt die Angabe, daß er ein solches Buch geschrieben habe, schwer in die Wagschale.

Alle die genannten Konjekturen haben ihre Berechtigung und sie könnten leicht noch um einige andere vermehrt werden, ich will aber den Leser nicht weiter mit solchen hemühen; wenn Gleichzeitigkeit und Gleichartigkeit des Wirkens und das Studium unter demselben Lehrer maßgebend für die Entscheidung in diesen Autorenfragen sein dürften, so kämen als Verfasser der drei Abhandlungen über die Ausmessung der Flächen und Körper in erster Linie in Frage: Jaḥjâ b. Aḥmed Abû Bekr Ibn el-Chaijâṭ, Abû ʿOtmân Saʿîd b. Muḥ. b. el-Baǵûniš und ʿOmar b. Aḥmed b. Chaldûn el-Ḥadramî, alle drei Ärzte, die sich zugleich eifrig mit Geometrie beschäftigt haben, alle drei Schüler von Maslama el-Maǵrîṭî.

4. *Abbacus.* Kommentar zum 10. Buche der Elemente Euklids (Par. Ms. 9335, fol. 92v—110v).[1]) Wenn in den vorhergehenden Nummern, besonders in 1 und 3, der Vermutung ein großes Feld offen gelassen war, so befinden wir uns hier dagegen auf viel sicherer Führte. Daß dieser Titel mit einem *Abacus* = Rechenbrett nichts zu tun habe, scheint mir gewiß, also wird es höchst wahrscheinlich der Name des Verfassers sein. Da das arabische *s* scharf gesprochen wurde, so gaben es die in Spanien lebenden Übersetzer meist durch *c* oder *z* wieder, ich erinnere an Avicenna für Ibn Sînâ, und Hacen oder Hazen für Hasan, die Vermutung lag daher nahe, daß *Abbacus* das latinisierte ʿAbbâs sei[2]) und daß dieser Kommentar von ʿAbbâs b. Saʿîd el Ǵauharî herrühre, einem der Astronomen el-Mâmûns, der sich hauptsächlich der Geometrie zugewandt und einen Kommentar zu den Elementen des Euklides geschrieben hat (vergl.

1) Diese Abhandlung stimmt nach Björnbo (l. c. p. 71) mit p. 252—386 der Curtzeschen Ausgabe des Kommentars des Anaritius zu den zehn ersten Büchern des Euklides überein, ist aber nicht von el-Nairîzî.

2) Steinschneider (*Hebr. Übers.* p. 533) hält dieses nicht für möglich, was ich sehr bezweifeln möchte.

Suter, *Araber*, p. 12). Da dieser Autor aber nicht speziell als Kommentator des 10. Buches genannt ist, so forschte ich weiter und kam auf den Gedanken, es könnte mit *Abbacus* gemeint sein Aḥmed b. el-Ḥosein el-Ahwâzî (das letztere Relativum könnte in „*Abbaci*" übergegangen sein), der das 10. Buch des Euklides kommentiert hat (ibid. p. 57); ich verglich daher die Anfangs- und Schlußworte des in Berlin noch vorhandenen Bruchstückes des Kommentars des Ahwâzî (No. 5923 des Katalogs der arabischen Mss. von Ahlwardt) mit der Curtzeschen Ausgabe des Kommentars von Anaritius (p. 252—386), fand aber keine Übereinstimmung. Erst nachträglich erinnerte ich mich, daß Ibn el-Qifṭî (nach Casiri, Biblioth. arab.-hispana I, 342) und wahrscheinlich nach ihm Ḥâǵî Chalfa (I, 382) einen Abû Muḥammed b.[1] ʿAbdelbâqî el-Baǵdâdî[2]) erwähnen, der das 10. Buch des Euklides kommentiert hat und in seinem Kommentar Zahlenbeispiele zu den Sätzen jenes Buches gegeben hat; Ibn el-Qifṭî fügt hinzu, daß er selbst ein vom Verfasser geschriebenes Ms. dieses Kommentars besitze (vergl. Suter, *Nachträge*, p. 181: zu Art. 517). Dies stimmt nun ausgezeichnet: Der „*Abbacus*" betitelte Kommentar enthält wirklich solche Zahlenbeispiele zu den Sätzen des 10. Buches, und *Abbacus* selbst kann leicht korrumpiert sein aus ʿAbdelbâqî (latinisiert mit Weglassung des Artikels: *Abdbâcus* und hieraus *Abbacus*); für mich besteht also kein Zweifel, daß der Verfasser dieses wahrscheinlich auch von Gerhard von Cremona (s. unten No. 5) übersetzten und von diesem oder von spätern Abschreibern dem Kommentar des Nairîzî (Anaritius) angehängten Kommentars Abû Muḥ b. ʿAbdelbâqî el-Baǵdâdî sei. Sein Kommentar war, wie Ḥâǵî Chalfa hinzufügt, klar, eben infolge seiner Zahlenbeispiele, und daher wohl geschätzt und verbreitet.

5. *Liber judei super decimum Euclidis.* Was diesen im Verzeichnis der Übersetzungen des Gerhard von Cremona genannten Kommentar anbetrifft, so sind über den Autor desselben schon verschiedene Vermutungen

---

1) Bei Ḥâǵî Chalfa fehlt das b. (= ben).

2) Über diesen Gelehrten habe ich noch die folgenden Notizen gefunden: Bei Ibn Challikân (Ausgabe von Bulak, II. p. 226, Übers. von de Slane IV, p. 58) heißt es im Artikel über Abû Bekr Jaḥjâ b. Saʿdûn el-Qorṭubî, daß dieser im Jahre 517 (1123/24, in der Bulaker-Ausgabe fehlerhaft 527) in Bagdad die Traditionen gehört habe bei Abû Bekr Muḥ b. ʿAbdelbâqî el-Bazzâz bekannt unter dem Namen Qâḍî des Mâristân (d. h. des Hospitals). Wenn dieser Autor derselbe ist, wie der Abû Muḥ. b. Abdelbâqî bei Ibn el-Qifṭî, woran kaum zu zweifeln ist, so wäre also der Kommentar zum 10. Buche des Euklides wohl etwa in den Jahren 1100—1120 geschrieben worden. Ob Abû Bekr Muḥ. oder Abû Muḥ. das richtige sei, können wir jetzt noch nicht entscheiden, vielleicht bringt uns die sehnlichst erwartete Ausgabe des Ibn el-Qifṭî hierüber Aufklärung. Der Zuname Qâḍî des Mâristân findet sich auch bei Ḥâǵî Chalfa (I, 382).

aufgestellt worden: Leclerc *(Hist. de la médecine arabe*, I, p. 507) sieht in dem *judeus* den znm Islam übergetretenen Juden Sind (richtig Sened) b. 'Alî (vergl. Suter, *Araber*, p. 13), Steinschneider (Zeitschrift d. deutschen morgenl. Gesellsch. 25, p. 400 und *Hebr. Übers.* II, p. 533) neigt sich zu Sa'îd b. Ja'qûb el Dimišqî Abû 'Otmân hin, indem er „*judeus*" aus „*saidus*" entstanden glaubt; er wird hierin bestärkt durch den Umstand, daß im Pariser Ms. 7377 A fol. 68—70^v ein Bruchstück einer lateinischen Übersetzung des Kommentars des Pappus zum 10. Buche des Euklides aus dem Arabischen des Abû 'Otmân el-Dimišqî vorhanden ist; Sa'îd Abû 'Otmân war aber nur der Übersetzer, nnd es kommt mir deshalb unwahrscheinlich vor, daß der Übersetzer ins Lateinische die Schrift nach dem arabischen Übersetzer Sa'îd statt nach dem griechischen Autor Pappus benannt haben sollte, zumal im arabischen Ms. (herausgeg. von Woepcke, Paris, s. a. [1855?]) deutlich steht: „der erste Teil des Buches von Babus (es kann auch Balus gelesen werden) über die rationalen und irrationalen Größen, die erwähnt werden im 10. Buche des Euklides über die Elemente, übersetzt von Abû 'Otmân el-Dimišqî". Es ist auch zu bemerken, was oben (unter No. 2) schon angedeutet wurde, daß das arabische Ms. nirgends den Namen Sa'îd hat, der Übersetzer ist stets nur Abû 'Otmân el-Dimišqî genannt, warum sollte nun das Sa'îd auf einmal in der lateinischen Übersetznng auftreten? Ich will nun eine andere Vermutung anssprechen: Abû Muh. b. 'Abdelbâqî war, wie gesagt worden ist, bekannt unter dem Namen Qâḍî des Mâristân, d. h. Richter *(judex)* des Hospitals; könnte nicht „*judei*" aus „*judicis*" entstanden sein und also der Kommentar des *judei* zum 10. Buche des Euklides der *Abbacus*, d. h. der Kommentar des Ibn 'Abdelbâqî sein? Mir scheint dies nm so wahrscheinlicher, als, wie ich oben angedentet habe, der Kommentar des Ibn 'Abdelbâqî ein geschätzter nnd verbreiteter gewesen sein muß, während derjenige des Pappus, übersetzt von Abû 'Otmân el-Dimišqî, sehr schwer zu verstehen ist nnd deshalb wohl kaum ganz übersetzt worden ist. Ich fasse meine unter No. 5 gemachten Untersuchungen zu folgenden Schlußworten zusammen:

Der *Liber judei super decimum Euclidis*, aus dem Arabischen übersetzt von Gerhard von Cremona, ist der noch zur Zeit des Ibn el-Qifṭî (c. 1200) wegen seiner zu den Lehrsätzen gegebenen Zahlenbeispiele sehr geschätzte und verbreitete Kommentar des Abû (Bekr) Muh. b. 'Abdelbâqî el-Baġdâdî, Qâḍî (= *judex*) des Mâristân, dessen Lebenszeit um das Jahr 1100 liegt. Der Kommentar wird unter drei verschiedenen Namen angeführt: 1) *Liber judei (= judicis)* im Verzeichnis der Übersetzungen des Gerhard von Cremona (siehe u. a. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* etc., Roma, 1851, p. 4—7);

2) *Abbacus* (= 'Abdelbâqî) in den Pariser Mss. 7377 A, 1° u. 9335, 16°;[1]) 3) *De numeris et lineis* (wegen der Zahlenbeispiele zu den Sätzen über die Linien so genannt) in Cambridge *(Catal. mss. Angl. et Hibern.* II, 363, No. 9260, 2°); hier wird Gerhard von Cremona geradezu als Übersetzer genannt. Er ist schon zweimal herausgegeben worden: das erste Mal von B. Boncompagni, in einem Fascikel von 66 Seiten (gr. 4°), ohne Angabe des Druckortes [1863/64][2]), betitelt *De numeris et lineis*, und fol. 49—62 des Cambridger Ms. umfassend; das zweite Mal von M. Curtze, *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii*, etc. Lips. 1899 (*Euclidis opera omnia, edid.* J. L. Heiberg *et* H. Menge: *Supplementum*); er umfaßt hierin p. 252—386 und wird in dem von Curtze benutzten Ms. ebenfalls dem Nairîzî zugeschrieben, wie der erste Teil des Kommentars zum 10. Buche, p. 211—252 umfassend.

Der Kommentar des Pappus zum 10. Buche, übersetzt ins Arabische von Abû 'Otmân el-Dimišqî, wurde wegen seiner Schwierigkeiten wahrscheinlich nicht vollständig ins Lateinische übersetzt, der Name des Übersetzers ist nicht bekannt, vielleicht ist es auch Gerhard von Cremona, ein Bruchstück dieser Übersetzung befindet sich im Pariser Ms. 7377 A fol. 68—70ᵛ (vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 532, und Zeitsch. d. deutschen morgenl. Gesellsch. 25, p. 399), es umfaßt p. 1—12 (Z. 3 v. o.) des von Woepcke veröffentlichten arabischen Textes (Paris 1855?).

6. *Liber alfadhol i. est arab de bachi.* Die Mss. dieses von Gerhard von Cremona übersetzten astrologischen Loosbuches *(kitâb el-fâl)* scheinen verschiedenen Autoren zugeschrieben zu werden: das arabische Ms. 35 der Bibliothek Vittorio Emmanuele in Rom ist anonym; die arabischen Mss. des Brit. Mus. No. 1006 und der Aja Sofia No. 2685 nennen als Verfasser den Astrologen el-Hârûn, 'Abdallâh b. 'Obeid el-Asnî (vergl. Suter, *Araber*, p. 7); die lateinischen Mss. zu Florenz (Bandini, *Catal.* II, Col. 7) und Paris 7323 schreiben es einem Alfodhol de Merengi oder Meregi zu; das Verzeichnis der Übersetzungen Gerhards hat je nach den Handschriften (von Oxford, Leipzig, Paris) etwas abweichende Lesarten, ich habe diejenige gewählt, die Wüstenfeld in seinen *Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrh.* (p. 75) gegeben hat: *Liber Alfadhol i. est arab de bachi.* Mir macht es den Eindruck, als ob dieses Loosbuch jüngern Datums wäre, und um ihm Berühmtheit und Zugkraft zu geben, fälschlich den ältesten arabischen Astrologen zugeschrieben worden sei, also von den einen dem oben schon genannten

1) Daß diese Abhandlung der *Liber judei super X. Euclidis* sein könnte, wurde schon von A. A. Björnbo in seinem oben zitierten Artikel in der Biblioth. Mathem. (l. c. p. 71) vermutet.

2) Diese Zeitangabe mache ich nach Steinschneider (*Hebr. Übers.* p. 533).

'Abdallâh b. 'Obeid, dem Astrologen Hârûn el-Rašîds, von andern dem Faḍl b. Naubabht, Abû Sahl, Astrolog desselben Chalifen und Verwalter der Bibliothek (Suter, *Araber*, p. 5), oder endlich dem Faḍl b. Sahl el-Sarachsî, dem Wezir und Astrologen el-Mâmûns (ibid. p. 7). Ich halte nämlich das *„de bachi“* für entstanden aus Naubacht [1]), und ebenso das *„Merengi“* oder *„Meregi“* aus Sarachsî, was mir leichter möglich scheint, als die Konjektur Steinschneiders in der Orientalist. Literatur-Zeitung, der *„de bachi“* aus Bagdad und *„de Merengi“* aus *almoneǧǧim* (der Astrolog) ableiten möchte; es wäre allerdings auch möglich, daß mit *Alfadhol i. est arab de bachi* und *Alfadhol de Merengi* dieselbe Persönlichkeit gemeint wäre, also vielleicht *de bachi* auch aus el-Sarachsi entstanden sein könnte. Doch ist die Frage über den Verfasser dieses Loosbuches von zu untergeordneter Bedeutung, als daß wir uns länger dabei aufhalten möchten.

Nachtrag.

Meine weitern Nachforschungen über Abû Bekr Muḥ. b. 'Abdelbâqî haben noch folgendes ergeben: In Jâqûts geographischem Wörterbuch (herausgeg. von F. Wüstenfeld, 6 Bde., Leipzig 1866—73) ist er an verschiedenen Stellen genannt, teils als Gewährsmann, teils als Lehrer oder Schüler anderer Gelehrter, diese sind alle Juristen und Traditionisten; II, 474 heißt er Qâḍî von Ardistân, IV, 786 Qâḍî von Aristân; beides sind wohl Fehler der von Wüstenfeld benutzten Codices, oder sogar Druckfehler seiner Ausgabe, obwohl Qâḍî des Māristân (Hospitals) etwas eigentümlich klingt, ich habe nie von Hospitalrichtern bei den Arabern gehört, vielleicht war Mâristân der Name eines Quartiers in Bagdad, in welchem das Hospital lag; ich gewärtige hierüber von berufenen Kennern arabischer Verhältnisse weitere Aufschlüsse. Der Beiname el-Bazzâz (der Tuchhändler) steht nur bei Ibn Challikân (Übers. von de Slane, IV, 58) und bei Maqqarî (Ausg. von Kairo, II, 226), wahrscheinlich nach diesem, bei Ibn Challikân (III, 536) und überall sonst steht an Stelle dieses Wortes el-Anṣârî (d. h. ein Nachkomme der *Anṣâr* = Helfer); bei Jâqût (IV, 786) heißt es ferner noch von ihm, er sei gebürtig gewesen aus Nasrîje, einem Quartier im Westen von Bagdad, das den Namen von Naṣr, einem Genossen des Chalifen el-Manṣûr, erhalten habe; darnach sollte er den Beinamen el-Naṣrî tragen, vielleicht ist hieraus el-Anṣârî

1) Dieser Ansicht war auch Steinschneider in seinem Artikel *Euclid bei den Arabern* (Zeitschr. f. Mathem. **31**, 1886; Hist. Abt. p. 87), ist aber wieder davon abgegangen in seiner Arbeit *Arab. Mathem. u. Astron.* (Orientalistische Literatur-Zeitung **4**, 1901, Sp. 347); vergl. auch Suter, *Nachträge*, p. 158: zu Art. 7 und 11.

durch Verschreibung hervorgegangen. Die Hauptnotiz über ihn, auf die ich durch das Register zu Jâqûts Wörterbuch (p. 673) aufmerksam gemacht wurde, findet sich in der Chronik des Ibn el-Aṯîr (gest. 1232/33), herausgeg. von C. J. Tornberg, Leiden 1851—76, Bd. XI, p. 52, wo es heißt: „Und in demselben (d. h. im Jahr 535) im Monat *Raǧeb* (also Ende Februar oder Anfang März 1141) starb der Qâḍî Abû Bekr[1]) Muḥ. b. ʿAbdelbâqî el-Anṣârî, Qâḍî des Mâristân, etwas über 70 Jahre alt, eine Autorität in der Tradition, gelehrt in der Logik, Rechenkunst, Astronomie und in andern Wissenschaften der Alten; er war der letzte derjenigen, die die Traditionen noch lehrten nach Abû Isḥâq el-Barmekî, nach dem Qâḍî Abû Bekr el-Ṭabarî, nach Abû Ṭâlib el-ʿAšârî, nach Abû Muḥ. el-Ǧauharî, u. a.“ Werke werden ihm hier keine zugeschrieben, dagegen bei Ḥâǧî Chalfa I, 382 (wohl nach Ibn el-Qifṭî) der Kommentar zum 10. Buche des Euklides, ebenda I, 432 *Amâlî* (= Diktate) über die Traditionen, und ebenda V, 563 *Mašjacha* (= Versammlung der Scheiche).[2]) Es ist also unser Abû Bekr Muḥ. b. ʿAbdelbâqî wohl einer der bedeutenderen Kenner der Mathematik am Ende des 11. und Anfang des 12. Jahrhunderts, und ich glaube, daß die Vermutung, es möchte dieser Autor auch der Verfasser der Bearbeitung des Euklidischen Buches *„Über die Teilung der Flächen“* sein, die von John Dee und F. Commandinus i. J. 1570 in Pesaro in lateinischer Übersetzung herausgegeben wurde und einem Muḥ. Bagdadinus zugeschrieben wird, eine große Wahrscheinlichkeit für sich habe; meine Bemerkung in Art. 517 meines Buches *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* wäre also in diesem Sinne zu ändern; mit dem dort behandelten Muḥ. b. Muḥ. el-Bagdâdî halte ich unsern Autor nicht mehr für identisch.

1) Im Text steht nach „Bekr“ noch „ben“, in den *Variae Lectiones* (Suppl.. Leiden 1871) ist aber bemerkt, in andern Codices fehle das „ben“, und dies ist jedenfalls das richtige.

2) Ḥâǧî Chalfa nennt ihn I, 382 Abû Muḥ. ʿAbdelbâqî el-Baǧdâdî, V, 536 steht el-Anṣârî, was an den übrigen Stellen fehlt, deshalb hat Flügel im Index sogar drei Autoren ans ihm gemacht, ans diesem Grunde hatte ich vorher die andern Stellen übersehen.

Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis.

Von C. R. Wallner in München.

Der Begriff der Gleichheit zweier Raumgrößen ist, wenn lediglich diejenigen Axiome zur Anwendung gelangen sollen, die unsern geometrischen Anschauungen überhaupt zu Grunde liegen, nur für solche Gebilde definiert, die sich in eine endliche Anzahl gegenseitig kongruenter Stücke zerlegen lassen. Will man allgemein beliebige Gebilde derselben Dimension vergleichen, so bedarf es notwendig einer Erweiterung des einfachen Gleichheitsbegriffes, und in diesem Umstande sind auch alle die logischen Schwierigkeiten begründet, die der Infinitesimalrechnung anscheinend innewohnen. Wir leisten diese Erweiterung durch Einführung des Grenzbegriffes, an seiner Stelle benutzte man früher den minder exakten Begriff des Unendlichkleinen und vor Erfindung der Infinitesimalrechnung den Indivisibilienbegriff, mit dem wir uns hier zu beschäftigen haben.

Der Indivisibilienbegriff wurde zuerst von Cavalieri systematisch in die Geometrie eingeführt in seiner *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635; neue Aufflage 1653)[1]). Bekannt ist dieses Werk durch seine ermüdende Breite und Schwerfälligkeit, ein Umstand, der dem Verständnis der darin neu auftretenden Gedanken, insbesondere des Indivisibilienbegriffes selbst, sehr hinderlich ist. Dazu kommt, daß bis jetzt keine einzige Stelle aufgefunden war, an der Cavalieri diesen Begriff wirklich erklärt. Man hat daher verschiedene Vermutungen über das Wesen dieser Indivisibilien angestellt; so dachte man daran, dieselben seien eine Art unendlichkleiner Größen, wie sie vor Cavalieri schon Kepler in seiner *Stereometria doliorum* (1615)[2]) benutzt hatte. Diese Behauptung ist aber sehr leicht zu widerlegen. Denn einerseits folgt doch

1) In Anmerkungen wird dieses Werk immer kurzweg mit *Geometr. indivisib.* bezeichnet werden.

2) Näheres darüber siehe Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* II², S. 822, und C. I. Gerhardt, *Die Entdeckung der höheren Analysis*, S. 15—18.

aus dem Titel von Cavalieris genanntem Werk, daß in demselben jedenfalls Indivisibilien praktisch verwertet sind. Wie nun ein tatsächliches Studium desselben zeigt, ist darin nirgends von unendlichkleinen Größen Gebrauch gemacht, und daraus folgt, daß die Indivisibilien nicht unendlichkleine Größen bedeuten können.

Eine zweite Hypothese, und die ist die allgemein verbreitete, schließt aus dem Faktum, daß der Indivisibilienbegriff nirgends näher erläutert ist, Cavalieri habe selbst nicht gewußt, was damit gemeint sei. Nun ist aber zu bedenken, daß Cavalieri den Ausdruck Indivisibel überhaupt vollständig hätte vermeiden können, da er seiner bei der Ableitung von Gesetzmäßigkeiten nie bedarf. Wenn er ihn also trotzdem ohne jeden Zwang einführt, so muß er ihm offenbar vollständig geläufig sein; wenn er ihn einführt ohne jede Erklärung, so muß er auch seinen Zeitgenossen bekannt sein; wenn er ihn endlich gerade dann anwendet, wenn er seine Methode besonders kurz und treffend bezeichnen will, so muß diesem Ausdruck Indivisibel noch eine ganz besondere Prägnanz innewohnen.

Die Richtigkeit dieser Folgerungen soll ein kleiner Exkurs auf die Anschauungen des Mittelalters über das Wesen des Continuums zeigen. Die alte Schule der Atomistiker, die eine Zusammensetzung der Materie aus gewissen kleinsten, letzten und unteilbaren Körperchen annahmen, die alle noch die sonstigen Eigenschaften der Materie selbst besitzen, kommt hier nicht in Betracht, denn ihre Auffassung war so gut wie verdrängt durch die der Scholastiker, die ja das ganze Mittelalter hindurch die ausschließlich herrschende philosophische Schule bildeten. Die letzteren unterschieden zunächst zwischen einem „continuum permanens" (z. B. jedes Raumgebilde), dessen einzelne Teile fortbestehen und daher auch alle gleichzeitig existieren [1]), und einem „continuum successivorum" (Zeit), dessen einzelne Teile früher oder später als die andern sind. [2]) Hinsichtlich der Zusammensetzung eines Continuums gilt als oberstes Prinzip die Ansicht, daß jedes Continuum, speziell z. B. jede Linie, *in infinitum* teilbar ist, *potentialiter* (d. h. der Anlage nach, wenn auch der Teilungsprozeß praktisch nicht in infinitum fortgesetzt werden kann) [3]). Daraus folgt, daß es keine kleinste

1) Thomas von Aquin, *Opuscula omnia* (Lugduni apud haeredes Jacobi Juntae 1562), o. 36, c. 2, l. 6: „Linea est quantitas positionem habens et manens, nec cum puncto moto transiens."

2) Ebenda o. 44, c. 1. p. 319, l. 73: „Esse successiuorum consistit in hoc, quod existant secundum aliquid indiuisibile sui." Ebenda o. 44, c. 1, p. 320, l. 1: „Existit tempus secundum aliquid sui indiuisibile: illud autem est nunc."

3) Ebenda o. 52, p. 369, l. 80: „quodlibet totum continuum diuisibile est in infinitum." Ebenda o. 36, c. 2, l. 14: „ipsa (linea) est in infinitum diuisibilis potentialiter."

Linie gibt[1]), sondern jeder noch so kleine Teil einer Linie wieder die Wesenseigenschaften der Linie besitzt.[2]) Für das Verhältnis des Punktes znr Linie ergibt sich daraus, daß der Punkt nicht ein Bestandteil der Linie ist, nicht ein Etwas, das die Wesenseigenschaften (z. B. nnbeschränkte Teilbarkeit) der Linie besitzt. Denn diese ist ein permanentes Continuum, ihre Teile bestehen im nämlichen Moment und bestehen fort. Ein Punkt aber ist ein einziges, identisches, völlig unteilbares Objekt, weshalb er nicht gleichzeitig verschiedenen Stellen eines permanenten Continunms angehören kann.[3]) Es läßt sich also auch eine Linie nicht aus Punkten zusammensetzen.[4]) Doch hat der Punkt eine gewisse Befähigung in sich, durch Bewegung die Linie zu erzengen.[5]) Wesentlich sind hierbei die Anschauungen, daß es keine kleinsten letzten Teile des Continnnms gibt, daß also das Indivisibel ein demselben heterogenes Gebilde von einer Dimension weniger sein muß (so ist der Punkt das Indivisibel der Linie, die Linie das der Fläche, diese das Indivisibel des Körpers). Wesentlich ist auch der dem Indivisibel eigentümliche Bewegungscharakter.

Genau in diesem Sinne tritt der Indivisibilienbegriff vorübergehend auch in der Geometrie auf, so bei Jordanus Nemorarius[6]), Thomas Bradwardinus[7]), Nicolaus Cusanus.[8]). Doch sind die betreffenden Stellen immer nur kurz, oder sie sind überhanpt nicht weiter bekannt geworden, wie es bei Bradwardin der Fall sein dürfte, von dem uns Stetigkeitsbetrachtungen in einer nnr handschriftlich vorhandenen Arbeit überliefert sind. Es bestand anch gar keine innere Notwendigkeit, diese

1) Ebenda o. 44, c. 2, l. 20: „minimum tempus secundum magnitudinem non est dare, eo quòd omne tempus diuisibile est in infinitum, sicut & quodlibet continuum.“ Ebenda o. 44, c. 1, l. 17: „Secundum magnitudinem non est dare minimam lineam, eo quòd omnis linea diuisibilis est in alias lineas.“

2) Ebenda o. 44, c. 2, l. 41: „quaelibet pars temporis est tempus.“

3) Ebenda o. 36, c. 2, l. 77: „Ille tamen punctus nihil est de ipsius lineae essentia, quia nihil vnum et idem realiter omnibus modis indiuisibile potest simul in diuersis partibus eiusdem continui permanentis esse.“ Ebenda o. 44, c. 1, l. 49: „Vnde manifestum est, quòd nunc non est pars temporis.“

4) Ebenda o. 44, c. 1, l. 41: „Ex indiuisibilibus non potest componi aliquod continuum.“

5) Ebenda o. 32, c. 4, p. 280, l. 64: „Punctus est principium lineae.“ Ebenda o. 36, c. 2, l. 7: „Punctus ergo, mathematicè imaginatus qui motu suo causat lineam necessariò nihil lineae erit, sed erit vnum secundum rem & diuersum secundum rationem, & haec diuersitas quae consistit in motu suo, realiter est linea, non identitas sua secundum rem.“ Vergl. damit den Satz „Tempus numerus motus est“, ebenda o. 44, c. 1, l. 5 und c. 3, l. 23.

6) Cantor, a. a. O. II², S. 73.

7) Cantor, a. a. O. II², S. 118.

8) Cantor, a. a. O. II², S. 191.

Anschauungen in die elementare Geometrie einzuführen, doch zeigen derartige Versuche immerhin die allgemeine Kenntnis des Indivisibilienbegriffes.

Daß Cavalieri, der erste, der allgemeine Prinzipien der Flächen- und Raumvergleichung aufstellte, notwendig neuartige Vorstellungen und Begriffe, wie den des Indivisibels benutzen mußte, wurde bereits eingangs erwähnt. Wir haben jetzt zu zeigen, daß das Cavalierische Indivisibel mit dem der Scholastiker identisch ist und von diesen einfach übernommen wurde. Die letztere Behauptung macht den Nachweis erforderlich, daß Cavalieri die Schriften der Scholastiker überhaupt gekannt hat; das ist aber mehr als wahrscheinlich, nachdem er Ordensgeistlicher war und als solcher sicher über die ganze philosophische Bildung seiner Zeit, die vornehmlich auf Thomas von Aquin basierte, verfügte. Das oben erwähnte Indivisibel der Scholastiker ist unschwer wiederzuerkennen in der Art und Weise, wie Cavalieri durch Parallelbewegung einer Ebene oder Geraden körperliche oder ebene Figuren erzeugt. Übrigens bestätigt er selbst die Identität der Indivisibilien mit den einzelnen bei dieser Bewegung nacheinander entstehenden Parallelschnitten ausdrücklich mit den Worten: „ipsa indivisibilia, s. omnes lineas figurae A"[1]), denn durch dieses „seu" werden die Bezeichnungen „indivisibilia" und „omnes lineae" (das sind eben jene Parallelschnitte) als völlig gleichbedeutend hingestellt. Auf Grund dieser Erklärung des Indivisibilienbegriffes, gegen die keine Stelle spricht, läßt sich überdies mancher dunkle Punkt aufhellen. Ich erinnere zum Beispiel an folgende zwei Sätze: „Ist das Continuum noch etwas anderes außer der Gesamtheit der Indivisibilien, so muß jenes andere zwischen den Indivisibilien liegen. . . . Zwischen je zwei Indivisibilien muß etwas von jenem andern liegen, welches außer den Indivisibeln zum Continuum gehört."[2]) Diese Stelle gibt einen ganz guten Sinn, sobald unter den Indivisibeln heterogene, unter dem „aliud aliquid" aber, das zwischen den Indivisibeln liegt, homogene Bestandteile des Continuums verstanden werden. Sollen hingegen die Indivisibilien eine Art Differentiale sein, so läßt sich mit dem Ausdruck „aliud aliquid" kein präziser Sinn verbinden. Cavalieri macht ferner ausdrücklich darauf aufmerksam, daß seine Methode von der Frage nach der Zusammensetzung des Continuums gar nicht beeinflußt werde, ja an einer Stelle verwahrt er sich sogar direkt dagegen, daß er das Continuum aus Indivisibilien zusammensetze.[3]) Wären nun diese unendlichkleine Größen, so wäre eine solche Verwahrung zwecklos, denn er hätte von

1) *Geometr. indivisib.*, p. 114.

2) *Geometr. indivisib.*, p. 111 Scholium.

3) *Exercitationes geometricae*, p. 200 nach Cantor, a. a. O. II², S. 843; noch deutlicher *Geometr. indivisib.*, S. 483.

einer Zusammensetzung aus Unendlichkleinem ruhig sprechen können, da gegen eine solche einerseits von den Philosophen nicht der geringste Einspruch zu erwarten war[1]), andrerseits ein Mann von der Bedeutung Keplers dieselbe bereits praktisch geübt hatte.

Der Begriff des Indivisibels konnte, wie diese Ausführungen zeigen, Cavalieri keinerlei Schwierigkeiten bereiten; um so mehr machte ihm dafür der vollständig neue Begriff der Gesamtheit, d. i. des Inbegriffs sämtlicher Indivisibilien eines Raumgebildes, zu schaffen. Das Wort Gesamtheit ist meistens durch „omnis" gegeben; man vergleiche die Definition: „singula plana, quae in toto motu concipiuntur in proposito solido, simul collecta, vocentur: Omnia plana propositi solidi, sumpta regula eorundem vno".[2]) Da jedoch „omnis" die beiden Bedeutungen „jeder einzelne" und „alle zusammen" besitzt, und bei Cavalieri auch in beiden Bedeutungen vorkommt, so läßt die Klarheit der Darstellnng oft zu wünschen übrig. Leicht hat man es natürlich, sobald Ausdrücke wie „congeries" (Znsammenfassung)[3]) oder „aggregatnm" (Häufung)[4]) gebraucht sind. Zur Erzeugung einer solchen Gesamtheit gelangt nun Cavalieri auf zweierlei Weise, einmal durch Bewegung: eine bewegte Ebene schneidet der Reihe nach sämtliche Indivisibilien einer Fläche oder eines Körpers aus, das andere Mal durch Definition: durch die negative Forderung, daß in Gedanken keine einzige Linie oder Ebene ausgelassen werde.[5]) Auf ersterem Wege entsteht die Gesamtheit selbst recht anschaulich vor unseren Augen, auf dem andern erhalten wir eine abstrakte Festlegung des Begriffs der fertigen Gesamtheit, mit der sich logisch weiter operieren läßt. Außer diesen exakten Festlegungen nimmt Cavalieri auch Bilder zu Hilfe, die natürlich auch alle die Mängel und Nachteile von Bildern besitzen. So wird die Gesamtheit der Linien einer Ebene mit einem Gewebe, der Inbegriff aller Ebenen eines Körpers mit einem Buche verglichen.[6]) Die Fäden des Gewebes, die Blätter des Buches seien aber in begrenzter Anzahl vorhanden und besäßen eine gewiße Dicke, die Indivisibilien seien hingegen unteilhaft jeder Dicke und unbegrenzt an Zahl. Es kann nns nicht wundern, wenn Cavalieri dabei den naheligenden Fehler begeht, Ausdrücke und Bezeichnungen, die für das Bild gelten, auch auf das abgebildete Objekt zu über-

1) Die Scholastiker wandten sich ja nnr gegen die Zusammensetzung aus Unteilbarem und gegen die Auffassung unendlichkleiner Elemente als solcher unteilbarer Größen.

2) *Geometr. indivisib.*, p. 100, def. 2.

3) *Geometr. indivisib.*, p. 111, Scholium.

4) *Geometr. indivisib.*, p. 493.

5) *Geometr. indivisib.*, p. 483.

6) *Exercitationes geometricae*, p. 3.

tragen, obwohl sie bei diesem völlig unberechtigt sind. Er weist nämlich ausdrücklich darauf hin, daß die Indivisibilien ein- und derselben Figur untereinander nicht gleiche gegenseitige Entfernung zu besitzen brauchen [1]), austatt zu bedenken, daß von einer Entfernung der Indivisibilien überhaupt nicht die Rede sein kann. Es ist indessen dieser letzte Vorwurf etwas einzuschränken, da eine bereits zitierte Stelle beweist, daß CAVALIERI sich durchaus nicht klar war, ob zwischen den einzelnen Indivisibilien sich noch ein „aliud aliquid" befände oder nicht; vielleicht hielt er die Existenz eines solchen „aliud aliquid" für möglich auf Grund einer Bekanntschaft mit dem Paradoxon vom Rade des ARISTOTELES, über das ihm gar nicht unwahrscheinlich sein Lehrer GALILEI schon vor Herausgabe der Indivisibiliengeometrie Mitteilungen gemacht haben kann [2]), wenn er auch allerdings erst 1638 etwas darüber publiziert hat. Dieses Paradoxon läuft nämlich nach GALILEIS Auffassung darauf hinaus, daß eine stetig erscheinende gerade Linie aus einzelnen Punkten, die durch Zwischenräume von Punktdimension getrennt sind, zusammengesetzt sein kann.[3]) Ganz abgesehen davon ist es sehr verzeihlich, wenn CAVALIERI versucht, sich seinen Gesamtheitsbegriff anschaulich zu machen oder sich vorzustellen, wie ein Konglomerat von immateriellen Linien imstande ist eine Fläche auszufüllen. Denn zu seiner Zeit ist das mathematische Denken noch zu sehr mit der Anschauung verknüpft, als daß man ein rein abstraktes Vorgehen erwarten könnte; hat man doch fast zwei Jahrhunderte hindurch den Differentialbegriff, der eine selbständige geometrische Bedeutung nicht besitzt, eine solche mit Gewalt aufnötigen wollen.

Um nun mit seinem Gesamtheitsbegriff operieren zu können, leitet CAVALIERI eine Reihe von Eigenschaften desselben ab [4]), die er selbst als die Grundlagen seiner Methode bezeichnet.[5]) Man sieht natürlich ohne weiteres, daß die Definition der Gesamtheit, wie sie CAVALIERI gegeben hat, nicht ausreicht, um derartige Eigenschaften daraus zu folgern; daraus ergibt sich aber, daß die mathematischen Beweise für diese Eigenschaften unbewußt von denselben bereits Gebrauch machen müssen. Und in der Tat, gleich der erste Satz, der aussagt, daß Gesamtheiten ein Verhältnis im Sinne EUKLIDS besitzen, beruht auf dem Gedanken, daß Gesamtheiten überhaupt Größen sind, die einer Vermehrung oder Verminderung fähig sind und daß eine solche durch Änderung der Größe der einzelnen Indi-

1) *Exercitationes geometricae*, p. 17, No. XV.

2) Vergl. E. GOLDBECK, *Über Galileis Atomistik und ihre Quellen;* Biblioth Mathem. 3_3, 1902, p. 107.

3) Vergl. darüber CANTOR, a. a. O., II², p. 697.

4) *Geometr. indivisib.*, p. 108—115.

5) *Geometr. indivisib.*, p. 501.

visibilien erzielt wird. Cavalieri findet es allerdings selbst einigermaßen bedenklich von dem Verhältnis zweier Gesamtheiten zu sprechen; aber nicht etwa deshalb, weil dem Gesamtheitsbegriff an sich noch kein Größenbegriff innewohnt, denn er ist im Gegenteil der Ansicht, mit ihm sei von vorn herein auch ein gewisser Größen- und ein gewisser Zahlbegriff verbunden; er sieht vielmehr die Schwierigkeit in dem vermeintlichen gleichzeitigen Vorhandensein dieses Zahlcharakters, und hält deshalb auch folgende Erklärung für notwendig: „Wenn ich die Gesamtheiten der Geraden, der Ebenen eines Gebildes betrachte, vergleiche ich nicht deren (jener Geraden) uns unbekannte Anzahl, sondern nur die Größe, welche dem von eben diesen Geraden eingenommenen Raume zukommt, und weil dieser Raum in Grenzen eingeschlossen ist, so ist auch jene Größe in denselben Grenzen eingeschlossen und man kann sie zuzählen, abzählen, ohne ihre eigne Anzahl zu kennen.“[1]) Denselben Sinn hat die Stelle: „Ich habe besagte Aggregate von Indivisibilien nicht so sehr nach ihrem Verhältnis zum Unendlichen, das sie infolge ihrer unendlichen Anzahl von Linien beziehungsweise Ebenen einzugehen scheinen, betrachtet, als vielmehr, insofern sie eine gewisse Beziehung zum Endlichen, eine gewisse Wesenheit und deshalb die Fähigkeit erlangen, eine Vermehrung oder Verminderung zu erfahren, wenn man sie ihrer Begrenzung nach nimmt.“[2]) Aus diesen Worten geht hervor, was für Größen Cavalieri unter seinen Gesamtheiten versteht. Er sagt nämlich ausdrücklich, daß er nicht daran denke, das Continuum aus Indivisibilien zusammenzusetzen, ist also weit davon entfernt, Gebilde selbst und Gesamtheit zu identifizieren. Wohl aber ist ihm letztere eine Repräsentantin des Raums, den ihre Indivisibeln ausfüllen, ein Symbol von ihm, nicht hinsichtlich seiner metaphysischen und geometrischen Eigenschaften, sondern nur nach Größe und Maßzahl. Von der Anzahl der Indivisibilien sieht er dabei ab, ähnlich wie der Mathematiker die physikalischen und chemischen Eigenschaften eines Körpers unberücksichtigt läßt.

Doch hält es Cavalieri für notwendig, sich wegen dieser durch Definition bewirkten Trennung noch eigens zu rechtfertigen. So verweist er auf die Algebraiker, „die Wurzelausdrücke durch Addition und Multiplikation verbinden, obwohl diese ‚ineffabiles, surdae ac ignotae‘ sind. Mit demselben Recht könne er sich seiner Indivisibilien bedienen, die an Zahl ‚innominabilia, surda, ignota‘ seien, insofern sie dennoch eine von deutlichen Grenzen eingeschlossene Größe besäßen.“[3]) Auch mit philo-

1) *Geometr. indivisib.*, p. 111, Scholium.
2) *Geometr. indivisib.*, p. 483.
3) *Geometr. indivisib.*, praefatio.

sophischen Gründen verteidigt er sich gegen den Einwand, ein Verhältnis zweier Gesamtheiten sei undenkbar, weil man zwei Größenkomplexe von unbekannter und unbestimmter Individuenzahl nicht vergleichen könne, indem er nämlich den Gegeneinwand bringt, daß dann überhaupt jede Raumvergleichung unmöglich sei. Zum Nachweis dieser Behauptung[1]) stellt er sich zuerst auf die Seite derer, die das Continuum aus Indivisibilien in seinem Sinne zusammensetzen (also nicht unendlichkleinen Größen im Sinne KEPLERS, auch nicht letzten Größen im Sinne der Atomistiker). Da dann die Gesamtheit von Indivisibilien mit dem Continuum identisch ist, dem Einwurf nach aber Gesamtheiten sich nicht vergleichen lassen, so sind die Continuen selbst der Vergleichung unfähig. Ist man hingegen der Ansicht, daß das Continuum noch etwas anderes außer den Indivisibilen ist, so muß dieses andere zwischen den Indivisibilien liegen, und zwar muß zwischen je zwei Indivisibilien etwas von jenem andern liegen, denn derselbe Grund, welcher es zwischen irgend zwei Indivisibilien aufhebt, hebt es zwischen allen andern auf. Man bekommt also Elementarbestandteile zwischen den Indivisibilen und von gleicher, also ebenfalls unbestimmter Anzahl wie diese. Das Continuum ist also auch in diesem Falle eine Gesamtheit einer unbestimmten Zahl von Elementen, ist also wiederum, dem Einwurf gemäß, der Vergleichung mit einem andern unfähig.

Wie steht es endlich mit der mathematischen Berechtigung, zwei Gesamtheiten zu vergleichen? CAVALIERI hat instinktiv erfaßt, daß er die Anzahl der Indivisibilien jedenfalls dann außer Acht lassen dürfe, wenn entsprechende Indivisibilien immer gleichen Abstand von der Anfangslage des das Gebilde erzeugenden Indivisibels besäßen, denn dann wird in Figuren gleicher Höhe die Zahl der Indivisibilien dieselbe.[2]) Diese Forderung hat den Charakter einer allerdings noch nicht ausreichenden Definition, in der die erste Grundlage einer mathematischen Formulierung und Verwertung des Gesamtheitbegriffes enthalten ist.

Zur Körpermessung endlich wird derselbe tauglich durch den Satz, daß die Inhalte zweier geometrischer Gebilde sich wie ihre Gesamtheiten verhalten. Auch beim Beweis dieses Satzes macht CAVALIERI natürlich unbewußt von ihm schon Gebrauch, da ja durch ihn erst eine allgemeine Definition des Körperinhalts geschaffen wird. Es handelt sich also jetzt darum, das Verhältnis zweier Gesamtheiten zu finden. Da diese hierzu nicht genügend definiert sind, so ist es wiederum selbstverständlich, daß unvermerkt irgend ein weiteres Prinzip der Körpermessung verwertet werden

1) *Geometr. indivisib.*, p. 111, Scholium.

2) *Geometr. indivisib.*, p. 116: „indefinitus nempe numerus omnium antecedentium [Indivisibilien] et consequentium, qui pro utrisque [Gesamtheiten] hic idem est, quicunque sit."

muß, und dieses besteht in der stillschweigenden Voraussetzung, zwei Gesamtheiten haben ein bestimmtes, festes Verhältnis, wenn alle einzelnen entsprechenden Indivisibilien dieses Verhältnis besitzen. Bewiesen ist dieser Satz nirgends, aber erst durch ihn ist der Begriff des Verhältnisses zweier Gesamtheiten völlig bestimmt.

Damit kommen wir zu einem wichtigen Punkt. In dem Gefühl nämlich, seine Methode möge nicht überall Anklang finden, verbreitet sich Cavalieri über ein zweites Verfahren, das durch Vermeidung des schwierigen Gesamtheitbegriffes die Vorteile der Indivisibilien mit geometrischer Strenge vereinigen sollte. Diese zweite Methode wird in den *Exercitiationes geometricae* die „posterior methodus indivisibilium“ genannt aus dem ganz äußerlichen Grund, weil sie im Buche örtlich später als die Gesamtheitsmethode kommt. Nun stimmt diese „posterior methodus“ inhaltlich mit einem bereits im 7. Buch der Indivisibiliengeometrie ausgeführten Verfahren überein, das auf folgendem Hauptsatz beruht: Zwei Gebilde haben gleichen Inhalt, wenn alle ihre entsprechenden Parallelschnitte gleich sind; entsprechend heißen auch hier wieder die Schnitte mit gleichem Abstand von einer gewissen Basis. Dieser Satz ist aber seinem Wesen nach völlig identisch mit dem eben erwähnten Definitionsprinzip für die Vergleichung von Gesamtheiten; er bildet daher auch die Grundlage für die Methode der Gesamtheiten, nur daß bei ihr eben dieser Begriff eine durchaus kürzere gedrängtere Fassung gestattet.

In dieser Forderung der Gleichheit sämtlicher entsprechender Parallelschnitte liegt aber implizit eine Verwendung des Koordinatenbegriffs, schon allein insofern, als man in jeder Gesetzmäßigkeit, die sich nicht auf Form und ähnliche Eigenschaften eines Gebildes, sondern lediglich auf die wechselseitige Entfernung d. i. die Lage der einzelnen Punkte dieses Gebildes bezieht, eine Koordinatenbeziehung im weiteren Sinn erblicken kann. Der gewöhnliche Koordinatenbegriff liegt bei der Darstellung Cavalieris allerdings ziemlich versteckt. Es sind nämlich z. B.[1]) (Fig. 1) die Figuren BZv und $c\beta A$ nach Art der Zeichnung von vornherein schon zwischen die Parallelen AD und $Y4$ hineingestellt und eine beliebige Anzahl von weiteren Parallelen ($E6$, $L\Sigma$) gezogen. Die Figuren heißen dann gleich,

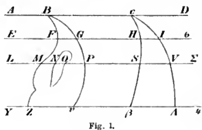


Fig. 1.

1) *Geometr. indivisib.*, p. 484.

wenn $FG = HI$, MN und OP zusammen $= SV$, und analog für sämtliche Parallelen, die gezogen werden können. Dadurch nun, daß die beiden Figuren schon von allem Anfang an in eine passende Lage gebracht sind, ist es nicht mehr nötig eigens zu erwähnen, daß die Abstände der Stücke FG, MN, OP und HI, SV, von Zv und βA d. i. die y-Koordinaten der Punkte F, G, H, I usw., beziehungsweise gleich sein müssen; daß ferner die Koordinaten parallel zu $Y4$, d. i. der X-Axe fehlen, hat seinen Grund darin, daß gerade hier durch Einführung der Schnitte FG, HI usw. die Darstellung wesentlich einfacher wird als durch Zählung der Punkte F, G, H, I usw. von einer besonderen Y-Axe aus. Viel deutlicher als hier tritt der Koordinatencharakter der Parallelschnitte, der auch durch den öfteren Gebrauch der Ausdrücke Abscisse[1]) und „ordinatim applicata“ [2]) bestätigt wird, im 1. Buch hervor, in dem CAVALIERI eingehend die Ähnlichkeit zweier ganz willkürlicher Gebilde untersucht.

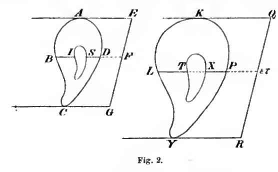


Fig. 2.

Soll z. B. (Fig. 2) die Ähnlichkeit der beiden Figuren $ABCD$ und $KLYP$ nachgewiesen worden, so verschafft er sich zunächst an jede der Figuren zwei parallele Tangenten AE und CG bezw. KQ und YR derart, daß sämtliche Punkte einer jeden Figur innerhalb ihrer zwei Tangenten (regulae) liegen. Des weiteren zieht er die Geraden EG und QR unter beliebiger aber gleicher Neigung gegen diese Tangenten, und teilt sie durch eine Anzahl Punkte (gezeichnet sind nur F, $\varepsilon\tau$) derart, daß entsprechende Stücke EF, $Q\varepsilon\tau$ sich wie die Geraden EG, QR selbst verhalten. Durch diese Teilpunkte werden jetzt zu den Tangenten Parallele gezogen, aus denen die Konturen der gegebenen Figuren und die Geraden

1) *Geometr. indivisib.*, p. 101. CANTOR gibt (a. a. O. II², p. 898) 1659 als das Jahr der ersten Benutzung dieses Wortes an.

2) *Geometr. indivisib.*, p. 97, cor. I. Diese Wortverbindung kommt nach CANTOR (a. a. O. II², p. 812) zum erstenmal 1615 vor; sie findet sich aber schon 1604 bei LUCAS VALERIUS, *De centro gravitatis libri tres*, I. III pr. 4.

$E\,G$, $Q\,R$ gewisse Stücke $F\,B$, $F\,I\ldots$ bezw. $\varepsilon\tau L$, $\varepsilon\tau T\ldots$ ausschneiden. Gelingt es nun diese Konstruktionen so auszuführen, daß alle entsprechenden von diesen Stücken sich wie die Geraden $E\,G$, $Q\,R$ selbst verhalten, so heißen die gegebenen Figuren ähnlich. Die ganze Untersuchung läuft also nach moderner Auffassung daranf hinaus, für jede der beiden Figuren ein Koordinatensystem zu finden; dabei bildet die eine Axe die Tangente $A\,E$ bezw. $K\,Q$, die andre Axe die Gerade $E\,G$ bezw. $Q\,R$. Die Bedingung für die Ähnlichkeit besteht dann in dem festen Verhältnis sämtlicher entsprechender Koordinaten; bei der Cavalierischen Formulierung dieser Bedingung tritt von selbst ganz zufällig die Wortverbindung „omnes lineae" auf, ohne daß ihr eine spezielle Bedeutung zukommt.

Erst durch den Begriff des Parallelschnitts, in dem wir soeben eine Art von Koordinatenbegriff erkannt haben, wird es möglich den Zusammenhang zwischen dem ersten und den folgenden Büchern der Indivisibiliengeometrie zu erklären. Während nämlich Cavalieri im 1. Buch zeigt, wie man den Begriff des Parallelschnittes mit Hilfe von dessen Koordinatencharakter zur Untersuchung der Ähnlichkeit gegebener Fignren und verwandter Probleme praktisch verwerten kann, nimmt er in den folgenden Büchern auch noch die Fähigkeit des Parallelschnittes, durch Bewegung das Gebilde selbst zu erzeugen, hinzu. Dadurch erhält jetzt dieser Begriff noch den Nebenbegriff des Indivisibels, der bloße Ausdruck „omnes lineae" verdichtet sich gewissermaßen zu einem begrifflich neuen Objekt, denn jetzt treten nicht mehr einzelne Parallelschnitte auf, die betrachtet werden müssen, sondern ein ganzes stetiges Gebilde von solchen. Um jedoch mit dem neuen Begriff operieren zu können, muß, wie gezeigt wurde, wieder der Koordinatencharakter des Parallelschnitts in Form des erwähnten Definitionsprinzipes für die Vergleichung von Gesamtheiten herbeigezogen werden.

Damit ist also folgendes gewonnen: Die ganze Cavalierische Geometrie beruht auf der planmäßigen Verwendung des Parallelschnitts, der die Rolle unserer Koordinaten spielt. Insofern als dieser Parallelschnitt seiner Anlage nach Gebilde nächst höherer Dimension zu erzeugen vermag, gewinnt er außerdem noch die Bedeutung des Indivisibels der Scholastiker. Unter der Gesamtheit eines Gebildes ist der Inbegriff aller seiner Indivisibilien zu verstehen, insofern diese durch die Begrenzung des Gebildes gegen den Raum selbst begrenzt sind. Es kommt aber dem Gesamtheitsbegriff außer dieser einen Natur oder Wesenheit noch eine zweite in der Hinsicht zu, als die konstituierenden Indivisibilien in einer gewissen (allerdings unbestimmten und unendlich großen) Anzahl vorhanden sind. Doch werden die Gesamtheiten nur ihrer ersten endlichen Natur nach betrachtet, die sie zu Repräsentanten des erfüllten Raumes stempelt.

Fragen wir endlich nach der Entstehung der CAVALIERIschen Methode, so liegen nur wenig Andeutnngen darüber vor. So finden sich in der Indivisibiliengeometrie KEPLER und LUCAS VALERIUS zitiert.[1]) Von dem ersten kann CAVALIERI sein Verfahren nicht hahen, weil KEPLERS Methode durchweg auf den verschiedensten, dem jeweiligen Bedürfnis angepaßten Kunstgriffen mit unendlichkleinen Größen beruht, während sich bei CAVALIERI nirgends ähnliches findet. Auch nach VALERIUS kann er seine Methode nicht gebildet haben, da dieser lediglich eine Abänderung des ARCHIMEDischen Verfahrens besitzt, ebenso wie auch GREGORIUS A ST. VINCENTIO, von dessen Untersuchnngen CAVALIERI allenfalls erfahren hahen mag. Die ARCHIMEDische Methode nämlich und ihre Nachbildnngen sind durchaus von der seinen verschieden, denn sie sind indirekte Beweisverfahren, setzen die Kenntnis des Resultats bereits voraus, operieren nirgends mit Indivisibilien oder Koordinaten, sondern ausschließlich mit ein- und umschriebenen Figuren; kurz, der Unterschied heider Methoden ist so groß, daß ich eine Entwicklnng der einen aus der andern für vollkommen ansgeschlossen halte. Ich glaube vielmehr, daß CAVALIERIS Verfahren auf ein bestimmtes Vorhild überhaupt nicht zurückführhar, sondern in folgender Weise entstanden ist. Zn seinen ersten Untersuchungen wurde er nach eigner Aussage[2]) durch die Wahrnehmung geführt, daß zwischen den Maßzahlen eines Umdrehungskörpers und der erzeugenden Figur eine auffällige Verwandtschaft hesteht. So ist ein Rechteck das doppelte eines Dreiecks, dessen Basis mit einer Seite des Rechtecks und dessen Spitze mit der Mitte der betreffenden Gegenseite zusammenfällt, während der entsprechende Rotationszylinder zu seinem Kegel sich wie 3 zn 1 verhält. Er habe, fährt CAVALIERI fort, nm den Grund dieser Tatsache zu finden, ursprünglich die erzeugende Figur in allen ihren Einzellagen betrachtet erst später sei er auf Anwendung von Parallelschnitten gekommen. Bezüglich des letzten Pnnktes ist es möglich, daß er durch das hloße Betrachten der Figuren hei LUCAS VALERIUS[3]) zum Gehrauch derselben angeregt wurde. Weiter mag er dann hei den Körpern, die er zuerst behandelte, auf gewisse Gesetzmäßigkeiten unter diesen Parallelschnitten gekommen sein, mag anch ähnlich, wie er vorher die erzeugende Figur in allen ihren Lagen betrachtete, jetzt den Parallelschnitt in allen seinen Lagen betrachtet und schließlich durch den Einfluß der scholastischen Stetigkeitsanschanungen als erzeugendes Element aufgefaßt haben. Den Hanptsatz üher die Gleichheit zweier Gebilde kann er durch bloße An-

1) *Geometr. indivisib.*, praefatio.

2) *Geometr. indivisib.*, praefatio.

3) *De centro gravitatis solidorum libri tres* (Rom 1604).

schauung gefunden haben, denn auch Descartes hat ihn selbständig[1]) auf diesem Weg entdeckt und vielleicht auch Roberval. Cavalieri muß übrigens diesen Satz bereits vor der praktischen Verwertung des Gesamtheitsbegriffes besessen oder doch dunkel gefühlt haben, da er der ganzen Gesamtheitstheorie zugrunde liegt. Weiter läßt sich über die Entstehung der Indivisibiliengeometrie nichts mit Sicherheit aussagen; eine prinzipielle Beeinflussung von Seiten Galileis, der zwar ebenfalls einen Indivisibilienbegriff besaß (eine Tatsache, die Cavalieri bekannt war)[2]), scheint mir deshalb unwahrscheinlich, weil seine Ansichten über Stetigkeit und Indivisibel so sehr von denen der Scholastiker und damit auch Cavalieris abwichen,[3]) daß letzterer sie unmöglich verwerten konnte.

Daß Cavalieris Geometrie nicht ungeteilten Beifall fand, ist bekannt. Hier sei nur erwähnt, daß Tacquet in seinem Werk *Cylindricorum et annularium libri IV* (1651) einen Einwurf macht[4]), den Cavalieri selbst schon 1647 in seinen *Exercitationes geometricae* zurückgewiesen hatte.[5]) Tacquet scheint nämlich nicht zu wissen, daß Cavalieri ausdrücklich verlangt, daß nur Indivisibilien, die gleichen Abstand von einer festen Axe aus besitzen, verglichen werden dürfen, und kommt so zu den wunderlichsten Paradoxien. Barrow, der Cavalieris Werke und die darin enthaltene Verteidigung nicht kennt, weist den Fehler Tacquets nach; er verwendet auch gekrümmte Indivisibilien zur Quadratur von Kreis und Kugelfläche,[6]) während Cavalieri sie nur bei der Quadratur der Spirale benutzt.

Der nächste Schriftsteller nach Cavalieri, bei dem wir den Gebrauch von Indivisibilien antreffen, ist Roberval. Bei ihm tritt uns die mißliche Tatsache entgegen, daß zwischen seinen Entdeckungen und deren Darstellung bezw. Veröffentlichung eine große Zwischenzeit liegt. Denn seine Werke sind erstmalig 1693 erschienen, hernach noch einmal herausgegeben

1) Eine Art Gesamtheit heterogener Elemente benutzt Descartes bereits 1629 zur Untersuchung des freien Falls (13. November, Brief an Mersenne); der Cavalierische Hauptsatz findet sich 1638 angewandt zur Quadratur der Zycloide (27. Juli). Von Cavalieris Leistungen scheint Descartes erst viel später genaue Kenntnis erhalten zu haben (Brief an Mersenne, 20. April 1646); dann ist allerdings unerklärt, wie er seine Quadraturen und Schwerpunktsbestimmungen allgemeiner Parabeln gefunden hat (13. Juli 1638). Siehe *Oeuvres de Descartes, publiées par Adam et Tannery*, Bd. 2 und 3.

2) Cantor, a. a. O. II², p. 831.

3) Vgl. E. Goldbeck, *Galileis Atomistik und ihre Quellen;* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 106—108.

4) L. II, pars I, schol. ad. pr. 2, p. 38.

5) *Exercitationes geometricae*, p. 238—239.

6) *Lectio in qua theoremata Archimedis de sphaera et cylindro per methodum indivisibilium investigata exhibentur, ac breviter demonstrata* (London 1678), p. 15 u. f.

von der Pariser Akademie der Wissenschaften 1730; die erste Nachricht über seine Indivisibilien erhalten wir 1647, obwohl ROBERVAL sie bereits 1636 oder 1637 zur Quadratur der Zycloide verwertet hatte.

Wenn hier von der gewöhnlichen Angabe 1634 abgewichen ist[1]), so sind mir dabei folgende Gründe maßgebend: Für die Zahl 1634 sind von authentischen Belegen nur diese drei vorhanden: 1) ein Brief ROBERVALS an TORICELLI, wahrscheinlich vom Frühjahr 1647, gedruckt 1693 mit seinen übrigen Schriften; 2) die *Histoire de la roulette* von PASCAL; 3) ein mir nicht näher bekanntes Schriftstück MERSENNES vom Jahr 1647.[2]) Da keine der drei Nachrichten vor 1647 abgefaßt ist, so dürfen zunächst die darin enthaltenen Daten wegen des damals bereits ausgebrochenen Streites zwischen ROBERVAL und TORICELLI nur mit höchster Vorsicht aufgenommen werden; denn ROBERVAL und PASCAL können als die Hauptbeteiligten an jenem Streit nicht als unparteiisch gelten, und MERSENNES Zeugnis hat deshalb keine Bedeutung, weil er nach so langer Zeit hinsichtlich des Datums leicht unsicher und schwankend geworden sein kann, so daß eine Beeinflussung von Seiten ROBERVALS leicht möglich war. Nun fällt bei PASCAL folgende Stelle auf: ROBERVAL habe 1634 die Zycloidenquadratur gefunden und das Resultat MERSENNE unter der Bedingung gezeigt, daß er es ein Jahr lang für sich behalte. Nach Ablauf desselben, also 1635, habe MERSENNE verschiedenen Mathematikern den betreffenden Satz mitgeteilt, worauf FERMAT und DESCARTES sofort Beweise dafür gefunden hätten. Bemerkenswert ist, daß die beiden Zahlen 1634 und 1635 ausdrücklich angeführt werden, ein Druckfehler also ausgeschlossen ist. PASCALS Darstellung verträgt sich aber nicht mit dem Datum eines Briefes von DESCARTES an MERSENNE vom 27. Juli 1638, in dem ersterer für die Vermittlung von ROBERVALS Entdeckung dankt und auch einen Beweis für sie beigibt. Zwei Angaben PASCALS sind also sicher falsch: entweder beide Jahreszahlen oder die Zahl 1635 und die Behauptnng, MERSENNE habe ROBERVALS Ergebnis ein Jahr lang für sich behalten. Da nicht einzusehen ist, warum PASCAL diese letztere Behauptung erfunden haben soll, so wird man sie wohl gelten lassen und dafür die beiden Jahreszahlen für falsch erklären. Dann ist aber für die Mitteilung der Zycloidenquadratur an MERSENNE das Jahr 1637 anzunehmen. Diese Datierung wird gestützt durch folgenden Tatbestand. MERSENNE hat 1637 in seiner *Harmonie universelle* (t. II, Nouvelles obs. phys., obs. 11)[3])

1) Vgl. auch die Bemerkung von TANNERY in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 511.

2) MONTUCLA, *Histoire des mathématiques* (éd. 2), t. 2, p. 54: „Le P. MERSENNE, écrivant en 1647, donne à la solution du problème de l'aire de la cycloïde, la date de l'année 1634.“

3) MONTUCLA, a. a. O., t. 2, p. 54.

das Verhältnis der Zycloide zum erzeugenden Kreis veröffentlicht. Doch ist hierbei zu beachten, daß diese Notiz nur die Korrektur einer im 1. Band geäußerten falschen Ansicht über die Zycloide ist.[1]) Es muß also der 1. Band jedenfalls schon gedruckt gewesen sein, sonst hätte Mersenne gleich die betreffende Stelle selbst verbessern können. Nun wurde aber der Druck der *Harmonie* 1636 begonnen; vor diesem Jahre hatte also Mersenne sicher keine Kenntnis von Robervals Entdecknng. Nach Pascals Bericht darf man annehmen, daß letztere nicht sehr viel früher als die Mitteilung an Mersenne erfolgt ist; damit ergibt sich als Datum der Entdeckung selbst etwa Ende 1636 oder Anfang 1637.

Die erwähnten großen Zeiträume zwischen seinen Entdeckungen und Veröffentlichungen ermöglichten es Roberval, seinen ursprünglichen Gedankengang zu ändern und fremde, jüngere Ideen sich zu nutze zu machen. Nun wird man es allerdings begreiflich finden, daß ein Autor in seinen Werken nachträglich noch Verbesserungen anbringt, unhaltbare Anschauungen durch modernere ersetzt; aber wenn die Darstellung grundlegender Vorstellungen durch solche Zusätze und Änderungen unklarer wird, wenn sie jeden Zusammenhang mit den Methoden selbst dadurch verliert, wenn die wichtigsten Begriffe gar nicht oder nur vorübergehend erwähnt werden, dann läßt sich nur zweierlei schließen: entweder war sich der Verfasser selbst nicht klar oder er hatte irgend einen Grund, seinen Gedankengang zu verschleiern. Für Roberval kann man wohl beide Motive in Anspruch nehmen; ich stelle mir etwa vor, daß er Cavalieris Werke kennen gelernt und sich von der Zweckmäßigkeit der darin beschriebenen Methoden überzeugt hat, während ihm der nur philosophisch Gebildeten bekannte Indivisibilienbegriff unverständlich blieb und ihn, den Praktiker, auch nicht weiter interessierte. Für eine Benutzung Cavalieris spricht nämlich einmal die Identität der beiden Methoden, dann der gleichzeitige Gebrauch von Ausdrücken wie „regula“, „genitrix“, „simul sumpti“, „omnes lineae“ in seinen beiden Bedeutungen, ferner die Tatsache, daß Robervals Untersuchungen sich von vornherein auf viel schwierigere Probleme erstrecken als die Cavalieris, überhaupt die Methoden praktisch mit der größten Eleganz und Sicherheit, oft sogar Kühnheit[2]) gehandhabt werden, wie sie bei einem Ersterfinder in der Regel nicht anzutreffen ist. Hätte weiterhin Roberval als erster für sich allein sein Verfahren erfunden, so hätte er

1) Montucla, a. a. O., t. 2, p. 59: „Car Mersenne, à la fin de son Harmonie universelle qui parut en 1637, corrige, d'après la découverte de Roberval, ce qu'il avoit dit dans le premier volume, sur la cycloïde qu'il prenoit alors pour une ellipse.“

2) Der Vergleich zwischen Spiralen und Parabelbogen bei Mersenne, *Cogitata physico-mathematica* (Paris 1644), *Hydraulica* p. 113. Diese Untersuchung wird in *Oeuvres de* B. Pascal (A la Haye, 1779, t. V, p. 427) Roberval zugeschrieben.



sich doch jedenfalls zuerst über dessen Berechtigung und Zuverlässigkeit vergewissert, was ihn zu klareren Anschauungen über die Indivisibilien hätte führen müssen; er muß also schon von anderer Seite her erfahren haben, daß die von ihm benutzte Methode richtig und sicher sei.

Allerdings lassen sich gegen diese Ansicht auch verschiedene Bedenken vorbringen; ohne aber auf dieselben näher einzugehen, seien jetzt ROBERVALS Grundlagen seiner Indivisibilienmethode besprochen. Er habe sich, so sagt er in dem bereits erwähnten Brief an TORRICELLI von 1647, davor gehütet, ähnlich wie CAVALIERI Ungleichartiges mit einander in Vergleich zu bringen. Für ihn bestehe die Linie aus unendlichvielen, oder der Zahl nach unbegrenzt vielen Linien („ex infinitis seu (!) indefinitis numero lineis"), die Oberfläche, der Körper, der Winkel aus unendlichvielen Flächen, Körpern, Winkeln. In seinem *Traité des indivisibles* zerlegt („diviser")[1] er ebenso eine Linie in unendlichviele Teile oder Linien („des petites lignes"), die untereinander alle gleich sein oder auch nach einem bestimmten Gesetz fortschreiten können. „Wie nun jede dieser kleinen Linien von Punkten begrenzt ist, wird man an ihrer Stelle Punkte benutzen, und wird dann anstatt eines Verhältnisses von allen den kleinen Linien zusammen von einem Verhältnis aller dieser Punkte sprechen." Man beachte hierbei die strenge Trennung zwischen den homogenen und den sie begrenzenden heterogenen Größen; welches von beiden aber die Indivisibeln seien, wird nirgends gesagt. Man sieht leicht, daß es nur eine leere Ausrede ist, wenn er die Anwendung der Bezeichnung „tous ces points" statt des angeblich exakteren „toutes les lignes" als eine bloße Redeweise ohne weitere Bedeutung hinstellt. Im Gegenteil, seine Methode beruht auf dem CAVALIERIschen Hauptsatz, d. h. gerade auf der Verwendung heterogener Größen. Warum betont er aber dann so entschieden die Homogeneität der Elementarteile, wenn er von diesen doch keinen Gebrauch macht? Einen Grund dafür sehe ich in seinem Bestreben, in bewußten Gegensatz zu CAVALIERI zu treten; ferner glaube ich auch, daß ROBERVAL selbst keine klare Ansicht in diesen Fragen besessen hat. Ein weiterer Grund liegt darin, daß er in der konsequenten Anwendung des Gesamtheitbegriffs viel weiter geht als CAVALIERI. Dieser unterscheidet noch streng zwischen Gebilde und Gesamtheit, bei jenem dagegen sind diese Begriffe kaum mehr getrennt. Denn nach der aus dem angeführten Briefe ROBERVALS zitierten Stelle ergibt sich doch, daß er eigentlich nur Gesamtheiten homogener Teilchen im Auge hat. Die Art und Weise ferner, wie er mit dem Gesamtheitsbegriff umspringt, erinnert uns Moderne völlig an eine in Worte

1) Memoires de l'académie royales des sciences [de Paris] 1666—1699, VI Ausgabe von 1730), p. 207.

umgesetzte Rechnung; da mag denn Roberval beobachtet oder wenigstens unklar gefühlt haben, daß die Operationen mit dem Gesamtheitsbegriff ganz analog wie das Rechnen mit algebraischen Summen vor sich gehen. Nimmt man jetzt dazu die halb und halb entwickelte Vorstellung der Gesamtheit als des Inbegriffs aller homogenen Teile eines Gebildes, so ist kein weiter Schritt mehr bis zur Auffassung der Gesamtheit als einer Summe und in der Tat findet sich bei Roberval bereits ab und zu dafür das Wort „summa“ [1]) gebraucht.

Dieser Zwiespalt, über den Roberval nicht hinweg gekommen ist, ist bei dessen Schüler Pascal in der schönsten Weise gelöst. Ein glücklicher Zufall wollte nämlich, daß dieser das *Opus geometricum* des Gregorius a St. Vincentio kennen lernte, der von dem Archimedischen Verfahren ausgehend eine neue Methode der Flächen- und Körpervergleichung sich gebildet hatte. Bei diesem Verfahren handelt es sich nun darum z. B. einer Fläche Rechtecke derart einzuschreiben, daß der Unterschied zwischen gegebener und eingeschriebener Figur kleiner als ein gegebenes Flächenstück ist. Gregorius nimmt nun gewöhnlich das letztere von vornherein schon sehr klein an, und das brachte Pascal auf den Gedanken, daß man dann praktisch von der Gleichheit der beiden Gebilde sprechen könne. [2]) So wurde er darauf geführt, jede beliebige Fläche durch die Summe von unbegrenzt kleinen (eigentlich hinlänglich kleinen) Rechtecken zu ersetzen, „was nichts ausmacht, da die Summe der substituierten Stücke von der der eigentlichen nur weniger differiert als irgend eine gegebene Größe.“ [3]) Man bemerke wohl, daß Pascal nicht etwa von der Vorstellung ausgeht, daß mit fortwährend abnehmendem Unterschied die gegebene und eingeschriebene Figur schließlich zusammenfallen, sondern daß er den Unterschied wegen seiner Kleinheit einfach vernachlässigt. Das erstere wäre Verwendung des Grenzbegriffes, das zweite ist eine geometrische Eigenschaft der sogenannten unendlichkleinen Größen. Zu dieser selbständigen Überlegung Pascals kommen jetzt die Vorarbeiten Robervals, der bereits nahe daran war, den Gesamtheitsbegriff als Summe von homogenen Stücken aufzufassen; prinzipiell hatte er das ja bereits getan, nur operierte er faktisch noch immer mit heterogenen Größen. Es war demnach für Pascal ein leichtes, die Begriffe der Summe von unbegrenzt kleinen Rechtecken

---

1) Mém. de l'acad. des sc. [de Paris] 1666—1699, VI (Ausg. von 1730), p. 319.

2) Damit ist die eingangs geforderte Aufstellung eines erweiterten Gleichheitsbegriffs vollzogen. Es ist übrigens beachtenswert, daß Tacquet, den nicht die Frage nach der Zusammensetzung des Continuums, sondern die Methode des Gregorius selbst interessierte, von dieser ausgehend zum Grenzbegriff gelangte, worüber ich bei späterer Gelegenheit berichten werde.

3) Pascal, a. a. O., V., p. 246.

und der Gesamtheit von Indivisibilien zu vereinigen, und so die Methoden der Flächen- und Körpermessung theoretisch neu zu begründen. Übrigens hat PASCAL vielfach die Ausdrucksweise ROBERVALS, die von Gesamtheiten heterogener Größen spricht, belassen; doch definiert er ausdrücklich[1]), er verstehe z. B. unter der „Summe der Ordinaten eines Kreises" („la somme des ordonnées") die Summe einer unbegrenzten Zahl von Rechtecken, die von jeder Ordinate mit jedem (ihr anliegenden) von den gleichen Stückchen gebildet werden, in die der Durchmesser geteilt ist.

PASCAL unterscheidet ebenso wie ROBERVAL zwischen homogenen und heterogenen Teilen eines Gebildes, denn er denkt sich beispielshalber eine Kurve ebenfalls durch Punkte Z in eine unbegrenzte Zahl von gleichen[2]) Stücken geteilt; aber er hat im Gegensatz zu seinem Lehrer wieder eine klare Vorstellung vom Indivisibel und versteht darunter heterogene Größen genau so wie CAVALIERI, nur fehlt dabei jetzt ihr Bewegungscharakter vollständig. Diese Auffassung beweist z. B. eine Stelle[3]), an der gesagt ist, eine gewisse Größe verhalte sich zu einer andern wie ein Indivisibel, da sie eine Dimension weniger habe. Der gleiche Sinn liegt auch folgenden Stellen[4]) aus der Abhandlung *Réflexions sur la géométrie* zugrunde. Die Null ist ein wirkliches Zahlenindivisibel, gerade wie das Indivisibel eine wirkliche Null des Raumes ist. Ein Indivisibel wird, beliebig vermehrt, nie ein Ausgedehntes ausmachen. Null kann, unendlich vermehrt („infiniment multiplié"), immer wieder nur ein Indivisibel geben. Denn ein Ausgedehntes ist bis ins Unendliche teilbar, ohne daß die Teile zu Null werden. PASCAL macht übrigens die Verwandtschaft zwischen fortgesetzter Teilung und Multiplikation durch ein sehr hübsches Bild anschaulich[5]), das einigermaßen an DESARGUES erinnert. Er denkt sich nämlich ein Schiff, das sich vom Strande entfernt. Ein Beobachter wird (selbstverständlich unter der Annahme, daß das Meer sich als Ebene bis ins Unendliche erstreckt), das Schiff dem Horizonte immer näher kommen sehen, und doch wird es ihn nie erreichen, weil es auch das Unendliche nie erreichen kann. Die wirkliche Bewegung des Schiffes repräsentiert die unbegrenzte Vermehrung, seine scheinbare die endlose Teilung.

PASCALS Auffassung bildet die Grundlage für eine richtige Beurteilung des LEIBNIZschen Differentials; der eigentliche Begriff der unendlichkleinen Größe, wie er nach LEIBNIZ gebraucht wurde, verdankt

1) PASCAL, a. a. O., V., p. 247.

2) Diese Bestimmung geht auch auf GREGORIUS zurück wie noch manche andre Stelle bei PASCAL.

3) PASCAL, a. a. O., V, p. 259.

4) PASCAL, a. a. O., II, p. 36.

5) PASCAL, a. a. O., II, p. 34 und 35.

dagegen Wallis seine Entstehung.[1]) Pascal und Roberval waren noch der Ansicht, daß ein Teilungsprozeß überhaupt keine Ende besäße und sie schlossen dies daraus, daß immer, wo man auch mit der Teilung aufhört, immer noch ein kleiner Rest übrig bleibt. Nun hat aber Wallis den völlig neuen Begriff der Grenze; durch das Erreichen derselben ist ihm ein idealer Abschluß eines unendlichen Prozesses definiert nnd so lange sie nicht erreicht ist, ist eben der Prozeß noch kein unendlicher. Auf Grund dieser Auffassung wird aber dem Unendlichen eine ganz bestimmte feste Stellnng, die durch den Grenzwert charakterisiert ist, zugewiesen; und dieser Umstand wirkt auf Wallis so mächtig ein, daß er dem Unendlichen auch ein ganz bestimmtes Zeichen, nämlich das heute noch gebräuchliche, zuordnet.[2]) Er hat auch als erster die Gleichungen $0 = \frac{1}{\infty}$ und $\frac{1}{0} = \infty$, sowie einige ähnliche Beziehungen. Alles unendlichkleine heißt ihm ein „nonquantum“, d. i. überhaupt keine Größe. Daher identifiziert er auch unendlichkleine Rechtecke mit geraden Linien, unendlichdünne Zylinderabschnitte mit ebenen Figuren. „Suppono in limine“, sagt er „planum quodlibet ex infinitis parallelis conflari. Vel potius (quod ego mallem) ex infinitis parallelogrammis aeqne altis . . . altitudo supponitur infinite parva, hoc est, nnlla (nam quantitas infinite parva perinde est atque non-quanta) vix aliud est qnam linea“. Es ist noch zu erwähnen, daß schon vor Wallis Kepler in seiner *Stereometria doliorum* nützliche Wechselbeziehungen zwischen heterogenen und unendlichkleinen homogenen Größen geknüpft hatte, indem er diese zwar nicht identifizierte, aber doch als nahe verwandte Gebilde hinstellte.

Der Indivisibilienbegriff war also, wenn wir die Hauptergebnisse nnsrer Untersuchung kurz zusammenfassen, ein den Scholastikern vollkommen geläufiger Begriff nnd konnte deshalb von Cavalieri zur prägnanten Bezeichnung seiner Methode angewandt werden. Roberval hatte nur eine unklare Auffassung von seinem Wesen, dagegen betont Pascal wieder streng seine Heterogeneität, während er den ihm eigenen Bewegungscharakter nicht kennt. Wallis ändert die von Pascal eingeführten unbegrenztkleinen Größen in unendlichkleine Größen um und identifiziert diese mit den Indivisibilien Pascals. Mit dem Indivisibilienbegriff ist auch ein Koordinatencharakter verbunden, der bei Cavalieri allerdings erst durch den vermittelnden Begriff des Parallelschnitts erklärt werden kann. Bei den anderen drei Autoren fallen wegen des mangelnden Bewegnngscharakters diese drei Begriffe in einen zusammen: den Indivisibilienbegriff. Erst nach Wallis tritt eine Differenzierung desselben ein: wenn seine

1) Vergl. darüber die Einleitungen zu seinen *Sectiones conicae*, sowie seiner *Arithmetica infinitorum*.

2) *Sectiones conicae*, p. 1. pr. 3.



metrische Seite betont wird, zu der ebenfalls erst nach WALLIS der Variabilitätscharakter tritt, so heißt das Indivisibel Koordinate, während es in seiner Eigenschaft als integrierendes Element eines Gebildes Differential genannt wird. Auf diese Wandlungen des Indivisibilienbegriffes ist von großem Einfluß die Entwickelung des Gesamtheitsbegriffes, der bei CAVALIERI noch rein abstrakt definiert ist und sich allmählich in den mathematischen Summenbegriff verwandelt. In dem Moment, wo nicht mehr von Gesamtheiten, sondern von Integralen gesprochen wird, ist auch von Differentialen statt von Indivisibilien die Rede, eine Unterscheidung, die anfänglich rein formell ist, aber später von prinzipieller Bedeutung wird. Diese letztgeschilderte Wandlung vollzieht sich bekanntermaßen bei LEIBNIZ, dem Erfinder unseres Infinitesimalkalküls.

Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare.

Di Gino Loria a Genova.

Nelle successive edizioni che ebbe l'ottimo *Traité de géométrie* di E. Rouché e C. de Comberousse (almeno sino alla VI inclusivamente) si trova proposta, come Esercizio 453 la seguenta questione: *Dividere un triangolo in quattro parti equivalenti mediante due rette fra loro perpendicolari.*[1]) L'apparente analogia che essa presenta con altre risolubili con riga e compasso fece ritenerla da quegli autori di natura elementare, mentre essa è di un grado assai superiore al secondo. Ora le difficoltà che incontrarono coloro che di recente si sforzarono di risolverla, consigliarono i direttori di L'intermédiaire des mathématiciens ad inserirla fra le prime questioni di quell' utilissima raccolta.[2]) Furono in conseguenza istituite delle indagini scientifiche e storiche; quelle vennero compiute di E. de Jonquières[3]) e condussero a concludere l'impossibilità

1) IV ed. (Paris 1879), p. 354.

2) T. I (Paris 1894), p. 1.

3) Id. p. 55. Per una dimenticanza, di cui mi dolgo, io non feci menzione di questo lavoro analizzando *L'oeuvre mathématique d'Ernest de Jonquières* (Bibliotheca Mathematica 3_3, 1902, p. 276—322).

Colgo, anzi, la propizia occasione che mi si offre per segnalare alcuni altri brevi scritti dell' eminente matematico, da lui pubblicati sotto il pseudonimo *Nauticus*, in L'intermédiaire des mathématiciens; chi ne fosse l'autore mi fu rivelato dal mio dotto amico H. Brocard, al quale porgo qui vivi ringraziamenti; di che cosa trattino risulta dal segnente breve elenco:

1, 1894, p. 167—168. Risposta ad un quesito di G. Oltramare, sopra la decomposizione di un numero in due quadrati.

2, 1895, p. 132—133. Questione relativa al prodotto 2! 3! . . . *n*! (cfr. il mio lavoro sul de Jonquières, p. 318). Id. p. 200. Nota relativa a tale Questione. Id. p. 236. Annuncio di una particolareggiata soluzione di un problema aritmetico proposto da C. A. Laisant, la quale fu poi pubblicato in Mathésis 5, 1895, 37—42 *(Sur un théorème d'arithmétique)*.

di sciogliere quel problema con i soli strumenti concessi da EUCLIDE ai geometri; queste misero in luce che la prima enunciazione di essa risale almeno all' epoca leibniziana.[1]) Vennero in pari tempo segnalate le prime parole di un frammento postumo di LEIBNIZ[2]), ov'è asserito essere quel problema dell' ottavo grado. Ora poichè tale frammento[3]) è senza dubbio posteriore al 1695 e sembra (almeno nell' esordio) ispirato da scritti altrui, così non è sufficiente a designare con precisione e certezza il primo che enunciò ed il primo che risolvette il problema di cui si tratta.

* * *

Ora, per quanto so, non è stato ancora osservato da alcuno di coloro che si occupanno della storia di quel problema, e quindi giudico valga la pena di venire pubblicamente rilevato, che una completa soluzione di esso si legge nel *Traité analytique des sections coniques et de leurs usages pour la résolution des problèmes tant déterminez qu'indéterminez* del Marchese DE L'HÔPITAL.

È noto che tale opera, finita sin dal 1704 (epoca della morte del suo autore) non venne pubblicata che tre anni dopo. Ad essa pertanto avrebbe potuto benissimo avere attinto il celebre emulo di NEWTON (la cui morte avvenne nel 1716).

Giova però osservare che uno studio un pò accurato dei modi di procedere del Marchese DE l'HÔPITAL mostra che, se egli non seguiva

---

3, 1896, p. 151—152. Question 587 (teoremi empirici sulla teoria dei numeri, la cui verità non venne sinora stabilita).

4, 1897, p. 212—214. Soluzione dell' equazione indeterminata $2p^2+2p+1=x^4$. Id. p. 226—229. Soluzione del sistema $8x+1=z^2$, $8x^2+1=y^2$.

5, 1898, p. 110—111. Soluzione dell' equazione $3z^2-3u^2=1$. Id. p. 216. Dimostrazione e generalizzazione di un teorema sulle coniche.

6, 1899, p. 234. Cenno sopra una dimostrazione di una certa costruzione del baricentro d'un trapezio.

7, 1900, p. 256. Menzione di una soluzione d'un problema concernente la decomposizione di un numero nella somma di due quadrati.

Non posso nè voglio finire questa breve addizione al mio studio sopra l'opera scientifica di E. DE JONQUIÈRES senza ricordare, a proposito delle sue ricerche sopra le frazioni continue in cui si svolgono i radicali quadratici (v. Bibliotheca Mathematica 3_3, 1902, p. 318—319), l'opuscolo di T. MUIR *The expression of a quadratic surd as a continued fraction* (Glasgow 1874), i risultati del quale vennero del suo autore paragonati a quelli consegniti dal Nostro nell' articolo *The researches of M. E. DE JONQUIÈRES on periodic continued fractions* (Proc. of the r. soc. of Edinburgh 12, 1883—84, p. 389—400).

1) Intermédiaire 1, 1894, p. 39.

2) Id. p. 135.

3) *Nova algebrae promotio* (LEIBNIZENS *Mathematische Schriften*, ed. GERHARDT. T. 7, Halle 1863, p. 154).

fedelmente Euclide nel celare i propri maestri, non era però un modello di coscienziosità nel dichiarare le fonti a cui attingeva. Così, è vero che ricorda i *Quaesita mathematica* del P. Saccheri (Milano 1693), a proposito di un problema enunciato dal Conte Ruggiero di Ventimiglia nel Giornale dei letterati di Parma dell' Aprile 1693, ma soltanto per rilevare che il celebre precursore di Bolyai e Lobatschewsky non era giunto a risolverlo. Similmente, egli ricorda che Descartes erasi occupato della ricerca delle sezioni circolari di un cono quadrico, ma per vantare l'eccellenza del proprio metodo d'investigazione. Per converso espone la generazione organica delle coniche, senza segnalarne l'inventore[1]); tratta il problema di «trovare un punto X del piano $A\ B\ C$ tale che le mutue differenze delle rette XA, XB, XC abbiano valori assegnati» senza ricordare che Newton lo risolse ed applicò nei *Principia*[2]); ed espone la struttura di un apparato per dividere in parti eguali un angolo qualsia, senza farne risalire, come avrebbe dovuto, il concetto fondamentale agli *Opuscula mathematica* di T. Ceva.[3])

Emerge di queste osservazioni nulla opporsi ad ammettere che il Marchese de l'Hôpital, al pari di Leibniz, ricavasse le proprie nozioni sul problema di cui ci occupiamo da qualche fonte estranea, che interessa scoprire.

* * *

Per conseguire tale scopo basta sfogliare i primi volumi degli Acta Eruditorum. Infatti, nel fascicolo di Ottobre 1687 di questa celebre pubblicazione si trova (p. 617—623) un elaborato articolo di Giacomo Bernoulli intitolato *Solutio algebraica problematis de quadrisectione trianguli scaleni per duas normales rectas*, ove è stabilito potersi quel problema risolvere segando con una conica una speciale curva del quarto ordine. Gli è appunto quanto si legge nel succitato *Traité analytique* e quanto concorda coll' asserzione di Leibniz, che quel problema è dell' ottavo grado.

Ma l'esordio della memoria del Bernoulli porge un nuovo dato storico che importa raccogliere: «problema hocce», ivi si legge; «quod summum

1) È noto che Newton espose tale generazione non meno di tre volte; cioè nei *Principia* (1687; Lib. I, Lemma XXI), nell' *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704; Sect. VI), e nell' *Arithmetica universalis* (1707). Il Marchese de l'Hôpital potè apprenderla dai *Principia*.

2) *Principia*, Lib. I, Lemma XVI.

3) Cfr. la mia opera *Spezielle algebraische und transscendente Kurven* (Leipzig 1902, p. 324 e 732). Di queste lavoro del Ceva è indubitato che il Marchese de l'Hôpital aveva conoscenza, essendone dato uno largo riassunto nel fascicolo degli Acta Eruditorum del Giugno 1695 (p. 290—294), fascicolo che contiene, tra l'altro, un articolo dello stesso de l'Hôpital.

huius aevi Mathematicum non ita pridem occnpatum tenuit, tam parum ex voto eidem successisse audio, ut nltra quadragesimam potestatem, si bene memini, et credere fas est, assurrexerit». Se, come è presumibile, il grande matematico al quale è ivi fatta allusione, è Leibniz, il nome di questo a ragione fu collegato alle origini di quella questione; ma a Giacomo Bernoulli appartiene la gloria di averne per primo immaginata una soluzione, a cui nè il Marchese de l'Hôpital, nè altri poi seppe aggiungere qualche cosa di essenziale.

* * *

Riconosciuto che il problema di cui ci siamo occupati è soltanto in apparenza elementare, l'interesse che esso a prima giunta destò ben presto si spense. Perciò la storia di esso si arresta alle prime pagine ed un completo e non immeritato obblio non tardò a ricoprirlo. Scopo della presente nota fu, non già di richiamarlo all' attenzione dei geometri, ma di projettare qualche luce sopra un piccolo episodio di storia scientifica, importante specialmente per gli «spiriti magni» che ne furono attori.

Übersicht über die Literatur des Abelschen Theorems.

Von J. V. Pexider in Prag.

1. Quellen geschichtlicher und bibliographischer Notizen.

Mit der Geschichte des Abelschen Theorems hat man sich bereits eingehend beschäftigt. An erste Stelle ist wohl der im Jahre 1894 erschienene Bericht über algebraische Funktionen von Brill und Noether [2][1]) zu stellen. Da sei zunächst auf die interessante Stelle p. 209—212 aufmerksam gemacht, wo die Verfasser zeigen, durch welchen Gedankengang mutmaßlich Abel von dem Eulerschen Additionstheorem zu seinem allgemeinen Satze gelangte. Ausführlich werden hier die diesbezüglichen Arbeiten von Abel (p. 212—220), Jürgensen, Broch, Minding und Rosenhain (225—233) behandelt. Über Riemann siehe man besonders p. 275, über die geometrisch-algebraischen Richtungen p. 301 (Aronhold), 321—322 und 325—328 (Clebsch), 339—340 (Clebsch-Gordan), 350—360 (Brill und Noether), über die Weierstrassische Richtung p. 429—431.

An zweiter Stelle sei die knappe, aber inhaltsreiche Darstellung von Wirtinger in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (Band 2 : 2, p. 158—164) erwähnt. Außerdem findet man noch reichliche Notizen über das Abelsche Theorem in Bakers *Abelian functions* (Kap. 8).

2. Chronologische Übersicht der Verfasser, die sich mit dem Theorem beschäftigt haben.

Wie in vielen anderen Fällen, so beginnt auch die Geschichte des Abelschen Theorems mit dem Namen Euler. Er war der erste, der sich eingehender mit der Integration von Differentialgleichungen mit algebraischen Differentialen beschäftigte und in dieser Hinsicht das be-

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende des Aufsatzes.

kannte Additionstheorem der elliptischen Integrale aufstellte. Durch die Eulerschen Arbeiten angeregt, schuf der geniale Abel sein Funktionaltheorem, das nicht nur die elliptischen Integrale, sondern auch die Integrale von Differentialausdrücken höherer Irrationalitäten umfaßt, und das nach ihm auf Vorschlag Jacobis ([2], p. 397) das Abelsche Theorem benannt wurde. Abel stellte diesen wichtigen Satz im Jahre 1826 in einer Abhandlung [2] auf, die aber erst im Jahre 1841 publiziert wurde. Dies hatte zur Folge, daß den Zeitgenossen Abels bloß die Grundidee jenes allgemeinen Satzes aus einem im Jahre 1829 erschienenen, sehr kurz gefaßten Aufsatze von Abel [4] bekannt wurde, und daß sie in Unkenntnis der ungedruckten Abhandlung sich um die Lösung vieler Fragen bemühten, die dort eigentlich schon erledigt waren. So entstanden die mit dem Abelschen Theorem und der «Minimalzahl» sich befassenden Arbeiten von Jürgensen, Broch, Minding und Rosenhain (1832—1844). Jacobis Verdienst ist es, die hohe Bedeutung des Abelschen Satzes in das richtige Licht gestellt zu haben (1832—1846). In diese Zeit fallen noch die diesbezüglichen Abhandlungen von Richelot, Hermite, Cauchy und Liouville.

In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts verging dann fast kein Jahr, in dem nicht wenigstens eine Arbeit erschienen wäre, die sich mit jenem Theorem beschäftigt. Die ausschlaggebende Arbeit war anfangs eine Abhandlung von Riemann. Die übrigen im ersten Dezennium dieser zweiten Periode zu nennenden Verfasser sind Weierstrass, Boole, Brioschi; zu diesen treten im zweiten Dezennium Aronhold, Roch, Clebsch, Neumann, Brill, Gordan, Henrici, M. Roberts, Weber und Noether hinzu. Im dritten sind als neu die Namen Lipschitz, Klein, Léauté, Lindemann, Dillner, Harnack, Königsberger, Briot, Dedekind und Rowe zu nennen; im vierten: Cayley, Appell, Forsyth, Rawson, Staude, Escher, Poincaré, Bacharach, Humbert, Dixon, Dolbnia, Kapteyn und Laurent. In dem letzten Zeitabschnitt (1891—1902) sind schließlich zu erwähnen: Bougaieff, Bertini, Lie, Oekinghaus, Picard, Salvert, Baker, Jordan, W. Roberts, Goursat, Pokrowsky, Tichomandritzky, Vessiot, Ermakoff, Simart, Pszeborski, Scheibner, Michel, Ptaszycki, Sommer, Mordoukhai, Schwering, Hensel und Landsberg.

3. Übersicht der Beweise des Theorems.

Die Beweise des Abelschen Theorems sind entweder für den allgemeinen Fall erbracht worden, oder sie beweisen das Theorem nur für die drei Gattungen, auf die sich sämtliche Abelschen Integrale reduzieren lassen. Der Beweis selbst wird von verschiedenen Autoren auf ver-

schiedene Weise geführt. Einen rein algebraischen Beweis gab Abel [4] an. Die übrigen Beweise lassen sich in Gruppen einteilen.

Um das Folgende verständlich zu machen, sei hier das Abelsche Theorem für die dritte Gattung in bekannten Zeichen (siehe z. B. *Encyklopädie d. math. Wiss.* 2 : 2, p. 160) angeführt

$$\Sigma P\,(x_\iota, y_\iota;\ \xi, \eta) \equiv lg\,\frac{r\,(\xi)}{r\,(\eta)} \quad \text{(mod. Period.)}$$

und unter U ein allgemeines Abelsches Integral verstanden.

Am häufigsten wird der Beweis so geführt, daß man die Differentialsumme direkt umformt und so einen expliziten Ausdruck für die algebraisch-logarithmische Funktion (v) des Theorems erhält (erste Gruppe). Oder man wendet den Cauchyschen Residuensatz auf die Funktion

$$\frac{d\,U}{dx} \cdot \frac{d\,lg\,r}{dt}$$

an, und erhält auf elegante Weise eine übersichtliche Formel für v (zweite Gruppe). In die dritte Gruppe sollen die übrigen Beweise gehören. Es sind dies

1) ein Beweis von Riemann, der auf funktionentheoretischem Wege zustande gebracht wird ([1], Art 14),

2) ein zweiter Beweis von Riemann ([1], Art 26), der durch Integration von $U\,dlg\,r$ entlang der ganzen Begrenzung der zugehörigen Riemannschen Fläche erbracht wird, und der nur noch von Weber [2] und von Clebsch und Gordan in § 37 von [1] (zweiter Beweis) benutzt wurde. Später unternahm es Humbert [1] auf dieselbe Art das Theorem für beliebige Abelsche Integrale zu beweisen,

3) ein Beweis von Weierstrass, der sich auf die Zerlegung der Funktion r in Primfaktoren stützt, nicht aber für allgemeines Abelsches Integral, sondern nur für die drei Gattungen.

Es bleibt also übrig nur über die erste und zweite Gruppe zu referieren.

Für die algebraisch-logarithmische Funktion (v) des Theorems leitete Abel selbst [2] einen expliziten Ausdruck ab, der etwas kompliziert erscheint. Da jedoch, wie schon erwähnt, die Arbeit [2] spät publiziert wurde, bemühte man sich indessen um die explizite Darstellung von v. Da ist an erster Stelle Minding zu nennen, welcher den einfachen Fall, die Grundgleichung des Abelschen Theorems sei vom dritten Grade, behandelte [2], [3]. Jürgensen war aber der erste, der einen Ausdruck für die Funktion v im allgemeinen Falle ableitete [1], und diesen später [2] auch auf den selbst bei Abel ausgeschlossenen Fall erweiterte, den nämlich, daß die Eliminante aus der Grundgleichung in die Parametergleichung des Theorems gleiche Wurzeln besitzt. Eine andere Formel für v, durchaus allgemeiner Natur, gab nun auch Minding [4] an. In einer umfangreichen Arbeit [1] gelang es Boole im Sommer 1857 für die Funktion v einen neuen Aus-

drnck herzustellen, der sich in vielen Fällen leichter auswerten läßt als der ABELsche und der Hauptsache nach aus CAUCHYschen Residuen besteht. Er ist anch formal sehr einfach, insbesondere im Falle der Irreduzibilität der oben erwähnten Eliminante, nnd wnrde neuerdings von ROWE [1] auf elegante Weise abgeleitet. Beidesmal geschah dies unter der Annahme der Realität der unabhängigen Variabeln. Läßt man jedoch diese als komplexe Veränderliche gelten, so sieht man sofort ein, daß auch der zweite, unter dem BOOLEschen Zeichen Θ verstandene Teil der Funktion v nichts anderes ist als ein CAUCHYsches Residuum und zwar für den unendlichfernen „Punkt", so daß die Funktion v lediglich als eine Summe von CAUCHYschen Residuen erscheint.

Durch Einführung homogener Coordinaten in die algebraischen Differentiale erhielt ARONHOLD [1] für die ABELsche Formel im Falle elliptischer Integrale ein symmetrisches Resultat; die ARONHOLDschen Formen benntzten CLEBSCH und GORDAN, weil dadurch vor Allem die Beseitigung der Ansnahmestellung des unendlich Fernen und dann eine gewisse Symmetrie in den Formeln erreicht wird, und später andere Mathematiker (besonders KLEIN), ob zwar dadurch die Formelausdrücke etwas komplizierter erscheinen. Einen anderen, neuen Ausdruck für die Funktion v entbalten auch die neueren russischen Arbeiten DOLBNIAS [1] und POKROWSKYS [4]. Auf Umformungen der Differentialsumme beruhen noch die Beweise von CLEBSCH [1], der erste algebraisch-geometrische Beweis von CLEBSCH-GORDAN ([1], p. 34), der sich auf den sogenannten JACOBIschen Schnittpunktsatz stützt, und jene von CAUCHY [2], FORSYTH [2] und NOETHER [6]. Man kann das ABELsche Theorem für die drei Gattnngen beweisen, indem man von Integralen dritter Gattung ausgeht, den Beweis des Satzes hiezu liefert und mittelst passender Spezialisation ihn auch für die erste und zweite Gattnng erbringt (z. B. CLEBSCH-GORDAN). Einen umgekehrten Weg schlng HARNACK [2] ein, der zeigte, daß man auch von der ABELschen Formel für Integrale erster Gattung ausgehend jene für die Integrale dritter Gattung ableiten kann.

ABEL untersuchte anch noch den wichtigen Fall, daß sich die Fnnktion v auf eine Constante reduziert, indem er die Bedingungen aufstellte, unter welchen die algebraisch-logarithmische Fnnktion v identisch verschwindet. Des Fehlers in seinem Ausdruck für v halber ([2], Formel [37]) ist im Falle der Reduzibilität der Eliminante aus der Grundgleichung in die Parametergleichung die zweite von ihm erhaltene Bedingung dementsprechend zu ändern. Der eben besprochene Fall $v = const.$ führt zu besonderen Differentialgleichungen, die man die Differentialgleichungen des ABELschen Satzes und deren Lösungen man das ABELsche Differentialtheorem (NOETHER) nennt. Man kann sie jedoch auch vom ABELschen Satze unabhängig

ableiten, man kann sogar umgekehrt, indem man von ihnen ausgeht, das Abelsche Theorem beweisen, wie dies zum Beispiel schon Jacobi [5] für die hyperelliptischen Integrale tat. Ähnliche Differentialgleichungen wurden außerdem für algebraische Kurven im n-dimensionalen Raume abgeleitet (z. B. Laurent [1], p. 158). In dieser Auffassung behandelten das Abelsche Theorem Haedenkamp [1], Richelot [1] [2], Jacobi nochmals [7], Hermite [1], Weierstrass [4], Cauchy [2], Brioschi [1], Henrici [1], Riemann [1], de Salvert [1] [2], W. Roberts [1] und Ptaszycki [1].

Tiefgehender als die Methode der Umformung der Differentialsumme ist die Methode der zweiten Gruppe, eine Methode, die sich auf den Cauchyschen Residuensatz stützt. Man appliziert ihn aber nicht auf ganz beliebige Grundkurven, sondern auf solche irreduzible Gleichungen, die gewisse Bedingungen erfüllen, ohne jedoch die Allgemeinheit zu beschränken. Es gelang nämlich zu zeigen, daß sich eine irreduzible algebraische Kurve mit vielfachen Punkten, in welchen die Tangenten zusammenfallen, mittelst einer Cremona-Transformation in eine Kurve mit vielfachen Punkten, in welchen die Tangenten getrennt sind, die also nur „gewöhnliche" Singularitäten besitzt, verwandeln läßt (Noether, *Über die singulären Wertsysteme;* Mathem. Ann. **9**, 1875, p. 166—182), daß man ferner die vielfachen Punkte in Doppelpunkte auflösen kann, d. h. daß sich eine Kurve mit gewöhnlichen Singularitäten durch birationale Transformation in eine andere, die nur Doppelpunkte aufweist, transformieren läßt (Simart, Comptes rendus Paris, **116**, 1893, p. 1047; Poincaré, Comptes rendus Paris, **117**, 1893, p. 18; Bertini, Mathem. Ann. **44**, 1894, p. 158—160), schließlich, daß man es durch homographische Transformation erzielen kann, daß die Kurve mit nur noch Doppelpunkten keinen von ihnen im Unendlichen besitzt, daß die Axe der Ordinaten weder mit den Asymptoten der Kurve, noch mit den in den Doppelpunkten geführten Tangenten parallel wird, und daß die mit der Axe der Ordinaten parallelen Tangenten die Kurve bloß in der ersten Ordnung berühren, ohne daß sich bei allen den Transformationen das Geschlecht der Kurve geändert hätte. Daraus ergab sich, daß es genügt, das Abelsche Theorem nur für solche algebraische Gebilde herzuleiten, die diesen Bedingungen genügen. Der Ausdruck für die algebraisch-logarithmische Funktion v gestaltet sich alsdann äußerst einfach und kann sehr leicht gehandhabt werden; man findet die elegante Herleitungsmethode in den neuesten Werken vor, — so z. B. Jordan [1], Picard [1], Appell und Goursat [1], Baker [2]. Die Methode selbst wurde von Cauchy [1] erfunden und von Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzt.

4. Anwendungen und Verallgemeinerungen des Theorems.

Was die Anwendungen des Abelschen Theorems anbelangt, so ist zunächst Abel selbst zu nennen; er hatte für hyperelliptische Integrale und für den Fall binomischer Gleichungen seinen Satz eingehend klargelegt und durch Beispiele illustriert ([2] § 10; [3]). Die hohe Bedeutung des Theorems beruht aber darin, daß es Jacobi erst mit Hilfe dieses Satzes gelang, das Umkehrproblem der ultraelliptischen Funktionen streng zu formulieren, jüngeren Kräften das Problem zu lösen, so die Theorie der allgemeinen Thetafunktionen zu begründen und hiermit den wahren Sinn des Abelschen Theorems zu entdecken. Die Herleitung der Additionstheoreme für die Abelschen Funktionen bleibt seine wichtigste analytische Anwendung.

Die außerordentliche Fruchtbarkeit des Theorems erwies sich aber in der Geometrie, in welche eine stattliche Anzahl neuer Begriffe eingeführt wurde; so der Begriff des Geschlechtes einer algebraischen Kurve, ihrer Moduln, der Begriff einer adjungierten Kurve, der korresidualen Punktgruppen, einer Voll- resp. Spezial-Schar von Kurven, der Begriff der Normalkurve, der speziellen Punktgruppen usw. Die hieran anknüpfenden Arbeiten sind sehr zahlreich. Diejenigen von Clebsch, Brill, Noether und Klein sind schon in den anfangs zitierten Quellen gewürdigt worden. Es sei hier nur hervorgehoben, daß die algebraisch-geometrische Theorie der algebraischen Gebilde, wie sie hauptsächlich in den Arbeiten von Brill und Noether ausgebildet ist, den großen Vorteil hat, daß man das durch eine einzige Gleichung definierte Gebilde mittelst eines Fundamentalsatzes, des „Restsatzes", beherrscht, und daß dieser Restsatz das Abelsche Theorem nicht nur vollständig ersetzt, sondern noch inhaltsreicher ist, indem er die sonst aus dem Abelschen Satze fließenden Schnittpunktgruppensätze ohne weiteres mitliefert. Die Wichtigkeit dieses „Restsatzes", der seinen Ursprung dem Abelschen Theorem verdankt, geht auch aus den zahlreichen Arbeiten, die sich mit ihm beschäftigen, hervor; angeführt seien: Halphen (1877), Voss (1886), Bertini (1889), Stickelberger, Baker [2], Bacharach [1], usw.

Die Aufsätze von Lie [1] [2] [3] (hierzu auch Poincaré [3]) legen eine neue Deutung des Abelschen Theorems klar, nämlich den Zusammenhang zwischen dem Satze und der Theorie der Translationsflächen. In der Arbeit von M. Roberts [1] handelt es sich um die geometrische Deutung des Theorems für Abelsche Transcendenten „zweiter Gattung" in Bezug auf die Krümmungsbögen des Ellipsoides; in der Abhandlung von Léauté wird gezeigt, daß man die Ponceletschen Sätze über Polygone mit Hilfe des Abelschen Satzes auf spezielle Raumkurven vierter Ordnung übertragen kann. Das für die Einführung der Riemannschen Theorie in

Frankreich bedeutungsvolle Werk von Appell und Goursat [1] enthält eine eingehende Darlegung der geometrischen Deutung des Theorems, die dem Leser einen klaren Einblick in eins der interessantesten Kapitel der Theorie der algebraischen Kurven gestattet [Abschnitt IX, p. 400—434]. Außerdem findet man schöne Anwendungen des Theorems auf ebene sowie räumliche Kurven in dem letzten, zwölften Abschnitt des Buches. Die umfangreichen Abhandlungen von Humbert [2] [3] [4] und die hieran anschließenden Arbeiten von Michel [1] [2] enthalten insbesondere viele metrische Sätze über algebraische Kurven; die Abhandlungen von Liouville [1], Sommer [1] und Staude [1] behandeln konfokale Mannigfaltigkeiten; die Arbeit von Lipschitz [1] spricht sich über einen Zusammenhang der quadratischen Differentialformen mit den Abelschen Transcendenten aus.

Den von Jacobi [3] bemerkten Zusammenhang zwischen dem Abelschen Satze und gewissen diophantischen Gleichungen erforschte näher Schwering in einer jüngst erschienenen Arbeit [1], wo er an zwei interessanten Beispielen zeigte, wie man das Abelsche Theorem zur Lösung diophantischer Gleichungen gebrauchen kann. Numerische Beispiele für das Theorem gab schon Legendre; andere instruktive Beispiele findet man besonders bei Forsyth [2], Baker [2] und Laurent [1]. Das in diesem letzten Buche vorkommende Beispiel für Normalintegrale dritter Gattung ist wohl leicht in der Schlußformel zu korrigieren.

Die Verallgemeinerungen des Abelschen Theorems sind nicht zahlreich. Die erste Verallgemeinerung seines Satzes gab Abel [2] (§ 9) selbst an. In der Arbeit [1] erweiterte Poincaré das Abelsche Differentialtheorem auf die Schnittpunktgruppen einer algebraischen Fläche mit einer algebraischen Randkurve, welche den vollständigen Schnitt zweier algebraischen Flächen bildet, d. h. auf vollständige Differentiale von Funktionen zweier Variabelen, die gewisse Bedingungen erfüllen. Mit der Ausdehnung auf mehrfache Integrale, die schon Jacobi beabsichtigt haben soll, beschäftigten sich nebst Rosenhain noch Noether [1], Picard und Simart [1] und Scheibner [1]. In der Abhandlung [2] zeigte Königsberger, daß der Abelsche Satz eine gewisse Verallgemeinerung der algebraischen Beziehungen zuläßt.

Literaturverzeichnis.

Abel, N. H. [1] *Sur la comparaison des fonctions transcendentes; Œuvres compl. publ. par* Sylow *et* Lie II (1881), Abh. X, 55—66. — [2] *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes.* Mém. des savans étrang. Paris 7 (1841) = *Œuvres* I (1881), Abh. XII, 145—211. — [3] *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions trancendentes.* Journ. für Mathem. 3 (1828), 313—323 = *Œuvres* I (1881), 444—456. — [4] *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes.* Journ. für Mathem. 4 (1829), 200—201 = *Œuvres* I (1881), 515—517.

Appell, P. [1] *Sur les fonctions abéliennes.* Comptes rendus Paris **94** (1882), 1702—1704.

Appell et Goursat [1] *Théorie des fonctions algébriques* (Paris 1895).

Aronhold, S. [1] *Algebraische Reduction des Integrals $\int F(x, y)\,dx$, wo $F(x, y)$ eine beliebige rationale Function von x, y bedeutet, und zwar zwischen diesen Gröfsen eine Gleichung dritten Grades von der allgemeinsten Form besteht, auf die Grundform der elliptischen Transcendenten.* Monatsber. Berlin 1861. — [2] *Über eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi(x, y)\,dx$, in welcher $\Pi(x, y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht.* Journ. für Mathem. **59** (1862), 95—145.

Bacharach, J. [1] *Über den Cayleyschen Schnittpunktsatz.* Mathem. Ann. **26** (1886), 275—299.

Baker, F. [1] *The practical determination of the deficiency and adjoint φ-curves for a Riemann surface.* Philos. transact. Cambridge **15**; Mathem. Ann. **45** (1894), 133—139. — [2] *Abels Theorem and the allied theory, including the theory of the Theta functions* (Cambridge 1897).

Bertini, E. [1] *Osservazioni sulle „Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale von C. Neumann“.* Rendic. Palermo **6** (1892), 165—172.

Boole, G. [1] *On the comparison of transcendents.* Philos. transact. London **147** (1857), 745—803.

Bougaieff, N. [1] *Sur l'expression des intégrales elliptiques sous forme finie.* Mathem. Samml. Moskau **16** (1891—1892), 259—282 (russisch).

Brill, A. [1] *Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen.* Journ. für Mathem. **65** (1866), 269—283.

Brill und Noether. [1] *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie.* Mathem. Ann. **7** (1874), 269—310. — [2] *Die Entwickelung der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit.* Jahresber. d. deutschen Mathem.-Vereinigung **3** (1894), 107—566.

Brioschi, F. [1] *Sur l'intégration des équations ultra-elliptiques.* Journ. für Mathem. **55** (1858), 56—60.

Briot, Ch. [1] *Théorie des fonctions abéliennes* (Paris 1879).

Broch, O. J. [1] *Om Addition of transcendente Functioner hvis Differentialier ere algebraiske.* Nor **1** (Christiania 1839), 457—468. — [2] *Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendentes.* Journ. für Mathem. **20** (1840), 178—188. — [3] *Mémoire sur les fonctions de la forme $\int x^{s-yp+1} f(x^p)\,(R(x^p))^{\pm\frac{s}{rp}}\,dx$.* Journ. für Mathem. **23** (1842), 145—195, 201—242.

Cauchy, A. [1] *Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la recherche des propriétés générales des intégrales dont les dérivées renferment des racines d'équations algébriques.* Comptes rendus Paris **23** (1846), 321 = Œuvres, Série 1, **10**, 80—93. — [2] *Sur la recherche des intégrales monodromes et monogènes d'un système d'équations différentielles.* Comptes rendus Paris **40** (1855), 511—518.

Clebsch, A. [1] *Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie* Journ. für Mathem. **63** (1864), 189—243. — [2] *Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind.* Journ. für Mathem. **64** (1865), 43—65. — [3] *Über die Singularitäten algebraischer Curven.* Journ. für Mathem. **64** (1865), 98—100. — [4] *Über diejenigen Curven, deren*

Coordinaten sich als elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen. Journ. für Mathem. **64** (1865), 210—270.

Clebsch und Gordan. [1] *Theorie der Abelschen Funktionen* (Leipzig 1866).

Clebsch und Lindemann. [1] *Vorlesungen über Geometrie* I (Leipzig 1876).

Clebsch, Lindemann et Benoist. [1] *Leçons sur la géométrie* (Paris 1883).

Cayley, A. [1] *Addition to Mr. Rowes memoir.* Philos. transact. London **172**:3 (1880), 751—758. — [2] *A memoir on the Abelian and Theta functions.* Americ. journ. of mathem. **5** (1882), 137—180. — [3] *Note on Abels theorem.* Proceed. philos. soc. Cambridge **4** (1882), 119—122. — [4] *A memoir on the Abelian and theta functions.* Americ. journ. of mathem. **7** (1885), 101—166.

Dedekind und Weber. [1] *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.* Journ. für Mathem. **92** (1880), 181—290.

Dillner, G. [1] *Entwickelung von Formeln zum Abelschen Theorem.* Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen 1876, 29—50.

Dixon, A. C. [1] *On Abels Theorem.* Quart. journ. of mathem. **22** (1887), 200—204.

Dolbnia, J. P. [1] *Neuer Beweis des Abelschen Theorems über die Integration der Differentiale der Form* $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$. Mitteil. d. phys.-mathem. Gesellsch. Kasan **6** (1888), 307—324 (russisch). — [2] *Aus der Theorie der Abelschen Integrale.* Mitteil. d. phys.-mathem. Gesellsch. Kasan 2_3 (1893), 1—26, 57—81, 109—137 (russisch).

Ermakoff, W. P. [1] *Theorie der Abelschen Funktionen.* Univ. Nachr. Kiew. 1897, Nr. 10—11, 1—120 (russisch).

Escher, R. J. [1] *Onderzoekingen aangaande de elliptische integralen van de derde soort en de hyperelliptische integralen van de eerste soort* (Sneek 1885; 8⁰, 94 S.).

Forsyth, A. R. [1] *On Abel's theorem and Abelian functions.* Proceedings roy. soc. Edinburgh **34** (1882), 288—291. — [2] *On Abel's theorem and Abelian functions.* Philos. transact. London **175**:1 (1883), 323—368.

Haedenkamp, H. [1] *Über Abelsche Integrale.* Journ. für Mathem. **25** (1843), 178—183.

Harkness and Morley. [1] *A treatise on the theory of functions* (London 1893).

Harnack, A. [1] *Über einen Beweis des Abelschen Theorems.* Sitzungsber. d. Phys. Gesellsch. Erlangen **7** (1875), 96—101. — [2] *Über eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten.* Mathem. Ann. **9** (1876), 371—424.

Henrici, O. [1] *Transformation von Differentialausdrücken erster Ordnung zweiten Grades mit Hülfe der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten.* Journ. für Mathem. **65** (1866), 1—25.

Hensel und Landsberg. [1] *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Curven und Abelsche Integrale.* (Leipzig 1902; 8⁰, XVI + 708 S).

Hermite, Ch. [1] *Sur la théorie des transcendentes à différentielles algébriques.* Comptes rendus Paris **18** (1844), 1133—1148.

Humbert, G. [1] *Sur le théorème d'Abel.* Comptes rendus Paris **103** (1886), 919—922. — [2] *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques* Journ. de mathém. 3_4 (1887), 327—404. — [3] *Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications à la géométrie.* Journ. de mathém. 5_4 (1889), 81—134. — [4] *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la géométrie* (suite et fin). Journ. de mathém. 6_4 (1890), 233—292.

Jacobi, K. G. [1] *De theoremate Abeliano observatio.* Journ. für Mathem. **9** (1832), 99. — [2] *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.* Journ. für Mathem. **9** (1832), 394—403. — [3] *De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea.* Journ. für Mathem. **13** (1835), 353—355 = *Werke* II, 51—55. — [4] *De functionum duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.* Journ. für Mathem. **13** (1835), 55—78. — [5] *Demonstratio nova theorematis Abeliani* Journ. für Mathem. **24** (1842), 28—35 = *Werke* II, 65—74. — [6] *Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung.* Journ. für Mathem **30** (1846), 121—126 = *Werke* II, 76—82. — [7] *Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen.* Journ. für Mathem. **32** (1846), 220—226.

Jacobi und Clebsch. [1] *Vorlesungen über Dynamik* (1. Aufl. 1866; 2. Aufl. 1884 von Lottner).

Jordan, C. [1] *Cours d'analyse de l'école polytechnique*, II (2. éd. Paris 1894).

Jürgensen, Chr. [1] *Sur la sommation des transcendentes à différentielles algébriques.* Journ. für Mathem. **19** (1839), 113—116. — [2] *Remarques générales sur les transcendentes à différentielles algébriques.* Journ. für Mathem. **23** (1842), 126—141.

Kapteyn, W. [1] *Sur une formule générale de Cauchy.* Bulletin de la soc. mathém. de France **16** (1888), 270—284.

Klein, F. [1] *Vorlesungen über Abelsche Funktionen.* Vorträge aus dem Jahre 1874. — [2] *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882). — [3] *Zur geometrischen Deutung des Abelschen Theorems der hyperelliptischen Integrale.* Mathem. Ann. **28** (1887), 533—560. — [4] *Zur Theorie der Abelschen Funktionen.* Mathem. Ann. **36** (1890), 1—83.

Königsberger, L. [1] *Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale* (Leipzig 1878). — [2] *Allgemeine Bemerkungen zum Abelschen Theorem.* Journ. für Mathem. **90** (1881), 109—163. — [3] *Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Funktionaltheorems als des Abelschen.* Journ. für Mathem. **100** (1887), 121—136.

Landsberg siehe Hensel.

Laurent, H. [1] *Traité d'analyse*, IV (Paris 1889).

Léauté, H. [1] *Sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel, relatif aux fonctions elliptiques.* Comptes rendus Paris **79** (1874), 93—96, 602—606.

Lie, S. [1] *Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel.* Comptes rendus Paris **114** (1892), 277—280. — [2] *Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions.* Comptes rendus Paris **114** (1892), 334—337. — [3] *Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem.* Berichte d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **48** (1896), 181—248. — [4] *Das Abelsche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten.* Berichte d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **49** (1897), 181—248.

Liouville, J. [1] *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer.* Journ. de mathém. **11** (1846), 345—378; **12** (1847), 410—444.

Lipschitz, R. [1] *Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den Abelschen Transcendenten.* Journ. für Mathem. **74** (1872), 150—171.

Michel, Ch. [1] *Sur les applications géométriques du théorème d'Abel.* Comptes rendus Paris **130** (1900), 885—888. — [2] *Sur les applications géométriques du théorème d'Abel.* Ann. de l'éc. norm. Paris 18_2 (1901), 77—126.

Mindino, F. [1] *Théorème relatif à une certaine fonction transcendente.* Journ. für Mathem. **9** (1832), 295—296. — [2] *Sur les intégrales de la forme* $\int \frac{dx\, P \sqrt[n]{p}}{c - x}$, *P et p étant deux polynomes entiers.* Journ. für Mathem. **10** (1833), 195—199. — [3] *Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendentes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du 3me degré.* Journ. für Mathem. **11** (1834), 373—383. — [4] *Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis ex principio Abeliano derivatae.* Journ. für Mathem. **23** (1842), 255—274.

Mordoukhai-Boltowskoy, D. D. [1] *Über eine Verallgemeinerung des Abelschen Theorems.* Mitteil. d. mathem. Gesellsch. Charkoff 7_2 (1901), 268—283 (russisch).

Neumann, C. [1] *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale* (Leipzig 1865). — [2] Dasselbe, 2. Aufl. (1884).

Noether, M. [1] *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen.* Mathem. Ann. **2** (1870), 293—316. — [2] *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen.* Mathem. Ann. **6** (1873), 351—359. — [3] *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* Mathem. Ann. **8** (1875), 495—533. — [4] *Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht adjungierten Curven.* Mathem. Ann. **15** (1879), 507—528. — [5] *Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abelschen Funktionen.* Mathem. Ann. **28** (1887), 354—380. — [6] *Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen* I, II. Mathem. Ann. **37** (1890), 417—460, 465—499.

Oekinghaus, E. [1] *Zur Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Integrale.* Arch. für Mathem. 9_2 (1892), 132—176.

Pexider, J. V. [1] *Das Abelsche Theorem, sein algebraischer und geometrischer Inhalt und seine Applikationen* (Prag 1901; čechisch).

Picard, E. [1] *Traité d'analyse,* II (Paris 1893).

Picard et Simart. [1] *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes.* I, II (Paris 1897, 1900).

Poincaré, H. [1] *Sur une généralisation du théorème d'Abel.* Comptes rendus Paris **100** (1885), 40—42. — [2] *Sur les fonctions Abéliennes.* Americ. journ. of mathem. **8** (1886), 289—342. — [3] *Sur les surfaces de translation et les fonctions Abéliennes.* Bullet. de la soc. mathém. de France **29** (1901), 61—86.

Pokrowsky, P. M. [1] *Theorie der ultraelliptischen Funktionen erster Classe.* Moskau 1887 (russisch). — [2] *Die Grundlagen der Lehre von den transcendenten Funktionen, welche ein Additionstheorem besitzen.* Berichte d. phys.-mathem. Gesellsch. Kiew 1895; Univ.-Nachr. Kiew 1896, Nr. 5, 1—54; Mathem. Sammlung Moskau **18** (1896), 121—136, 598—625 (russisch). — [3] *Sur les fonctions ultraelliptiques à deux arguments.* Bullet. d. sc. mathém. 20_2 (1896), 86—103. — [4] *Abels Theorem in neuer Form.* Mathem. Sammlung Moskau **20** (1898), 299—315; Univ.-Nachr. Kiew 1898, Nr. 5, 1—14 (russisch).

Pszeborski, A. [1] *Das Theorem von Abel.* Univers.-Nachr. Kiew 1898, Nr. 5, 37—43 (russisch).

Ptaszycki, J. [1] *Allgemeine Theoreme über Integration der Abelschen Differentiale.* Prace matem. **11** (1900), 23—31 (polnisch).

RAWSON, R. [1] *Solution of a question.* Educ. times **36** (1882), 31—33. — [2] *Solution of a question.* Educ. Times **36** (1882), 91—92.

RICHELOT, F. [1] *Über die Integration eines merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen.* Journ. für Mathem. **23** (1842), 354—369. — [2] *Einige neue Integralgleichungen des JACOBISCHEN Systems von Differentialgleichungen.* Journ. für Mathem. **25** (1843), 97—118.

RIEMANN, B. [1] *Theorie der ABELSCHEN Funktionen.* Journ. für Mathem. **54** (1857), 115—155 = *Ges. Werke, herausg. von* H. WEBER (1876), Abh. VI, 81—135. — [2] *Zur Theorie der ABELSCHEN Funktionen für den Fall* $p = 3$. 1862 (Vorlesung); *Werke*, 2. Aufl. (1892), Abh. XXXI.

ROBERTS, MICH. [1] *Sur l'application du théorème d'ABEL à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde.* Annali di matem. **2** (1868), 13—20.

ROBERTS, W. R. W. [1] *On elliptic and hyper-elliptic systems of differential equations and their rational and integral algebraic integrals with a discussion of the periodicity of elliptic and hyper-elliptic functions.* Proceed. of the mathem. soc. London **26** (1894), 379—430.

ROCH, S. [1] *De theoremate quodam circa functiones Abelianas* (Halle 1863). — [2] *Über die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Funktionen.* Journ. für Mathem. **64** (1865), 372—376.

ROSENHAIN, G. [1] *Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum.* Journ. für Mathem. **28** (1844), 249—278; **29** (1845), 1—18.

ROWE, R. [1] *On ABEL'S Theorems.* Philos. transact. London **172**:3 (1880), 713—750.

DE SALVERT, F. [1] *Sur une expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique de la forme la plus générale.* Comptes rendus Paris **116** (1893), 243—246. — [2] *Sur l'addition des fonctions hyperelliptiques.* Annales scient. Bruxelles 18_2 (1894), 41—60.

SCHEIBNER, W. [1] *Das ABELSCHE Theorem für einfache und Doppelintegrale.* Berichte d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1889; Mathem. Ann. **34** (1889), 485—493.

SCHWERING, K. [1] *Anwendung des ABELSCHEN Theorems auf die Lösung der diophantischen Gleichungen* $x^3 + Ay^3 = z^3$ *und* $x^3 + y^3 = z^2$. Arch. der Mathem. 2_2 (1901), 285—288.

SOMMER, J. [1] *Focaleigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen Raum.* Mathem. Ann. **53** (1900), 113—160.

STAUDE, O. [1] *Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Funktionen erster Ordnung im System der konfokalen Flächen zweiten Grades.* Mathem. Ann. **22** (1883), 1—69, 145—176.

TICHOMANDRITZKY, M. A. [1] *Über das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale* Charkow 1885 (russisch). — [2] *Grundlagen der Theorie der ABELSCHEN Integrale* (Charkow 1895; 8°, XV + 232 S.; russisch).

VESSIOT, E. [1] *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques.* Annales de la fac. d. scien. Toulouse **10** (1896). 10 S.

WEBER, H. [1] *Über das Additionstheorem der ABELSCHEN Funktionen.* Journ. für Mathem. **70** (1869), 193—211. — [2] *Neuer Beweis des ABELSCHEN Theorems.* Mathem. Ann. **8** (1875), 49—53.

WEIERSTRASS, K. [1] *Beitrag zur Theorie der ABELSCHEN Integrale* (Programm des Braunsberger Gymnasiums für das Jahr 1848/49). — [2] *Zur Theorie der ABELSCHEN Funktionen.* Journ. für Mathem. **47** (1853), 289—306. — [3] *Theorie*

der Abelschen Funktionen. Journ. für Mathem. 52 (1856), 285—380. — [4] *Bemerkungen über die Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen.* Berichte d. Akad. d. Wissensch. Berlin 1862 = *Mathem. Werke* I, 267—273. — [5] *Aus einem bisher noch nicht veröffentlichten Briefe an Herrn Prof. Schwarz, vom 3. Oktober 1875; Mathem. Werke* II (1895), 235—244.

Chronologisches Register.

1828 Abel [3].
1829 Abel [4].
1832 Jacobi [1], [2]; Minding [1].
1833 Minding [2].
1834 Minding [3].
1835 Jacobi [3], [4].
1839 Abel [1]; Broch [1]; Jürgensen [1].
1840 Broch [2].
1841 Abel [2].
1842 Broch [3]; Jacobi [5]; Jürgensen [2]; Minding [4]; Richelot [1].
1843 Haedenkamp [1]; Richelot [2].
1844 Hermite [1]; Rosenhain [1].
1846 Cauchy [1]; Jacobi [6], [7].
1847 Liouville [1].
1849 Weierstrass [1].
1853 Weierstrass [2].
1855 Cauchy [2].
1856 Weierstrass [3].
1857 Boole [1]; Riemann [1].
1858 Brioschi [1].
1861 Aronhold [1].
1862 Aronhold [2]; Riemann [2]; Weierstrass [4].
1863 Roch [1].
1864 Clebsch [1].
1865 Clebsch [2], [3], [4]; Neumann [1]; Roch [2].
1866 Brill [1]; Clebsch und Gordan [1]; Henrici [1]; Jacobi-Clebsch [1].
1868 M. Roberts [1].
1869 Weber [1].
1870 Noether [1].
1872 Lipschitz [1].
1873 Noether [2].
1874 Brill und Noether [1]; Klein [1]; Léauté [1]; Neumann [2].
1875 Noether [3]; Weber [2]; Weierstrass [5].
1876 Clebsch-Lindemann [1]; Dillner [1]; Harnack [1], [2].
1878 Königsberger [1].
1879 Briot [1]; Noether [4].
1880 Cayley [1]; Dedekind und Weber [1]; Rowe [1].
1881 Königsberger [2].
1882 Appell [1]; Cayley [2], [3]; Forsyth [1]; Klein [2]; Rawson [1], [2].
1883 Clebsch-Lindemann-Benoist [1]; Forsyth [2]; Staude [1].
1885 Cayley [4]; Escher [1]; Poincaré [1]; Tichomandritzky [1].
1886 Bacharach [1]; Humbert [1]; Poincaré [2].
1887 Dixon [1]; Humbert [2]; Klein [3]; Königsberger [3]; Noether [5]; Pokrowsky [1].
1888 Dolbnia [1]; Kapteyn [1].
1889 Humbert [3]; Laurent [1].
1890 Humbert [4]; Klein [4]; Noether [6].
1891 Bougaieff [1].
1892 Bertini [1]; Lie [1], [2]; Oekinghaus [1].
1893 Dolbnia [2]; Harkness and Morley [1]; Picard [1]; Salvert [1].
1894 Baker [1]; Brill und Noether [2]; Jordan [1]; Salvert [2]; W. Roberts [1].
1895 Appell et Goursat [1]; Pokrowsky [2]; Tichomandritzky [2].
1896 Lie [3]; Pokrowsky [3]; Vessiot [1].
1897 Baker [2]; Ermakoff [1]; Lie [4]; Picard et Simart [1].
1898 Pokrowsky [4]; Pszeborski [1].
1899 Scheibner [1].
1900 Michel [1]; Ptaszycki [1]; Sommer [1].
1901 Michel [2]; Mordoukhai [1]; Pexider [1]; Poincaré [3]; Schwering [1].
1902 Hensel und Landsberg [1].

Maximilian Curtze.

Von SIEGMUND GÜNTHER in München.

Das beginnende neue Jahr hat der Wissenschaft und insbesondere demjenigen ihrer Zweige, dessen Pflege diese Zeitschrift gewidmet ist, einen überaus schweren Verlust gebracht. Am 3. Januar erlag einem Schlaganfalle, ohne daß eine Krankheit vorhergegangen wäre, Professor MAXIMILIAN CURTZE, zusammen mit MORITZ CANTOR, dem er nahe befreundet war, der bedeutendste Vertreter geschichtlich-mathematischer Forschung im Bereiche der deutschen Zunge. Der vorliegende Versuch, dem verewigten Freunde ein literarisches Denkmal zu setzen, erhebt in keiner Weise Anspruch darauf, dem hohen Verdienste des trefflichen Mannes vollauf gerecht zu werden; noch ist die Zeit seit seinem Heimgange eine zu kurze, als daß man schon daran denken könnte, eine so überaus reiche und vielseitige Lebenstätigkeit ausreichend zu würdigen. Nur als ein Beitrag zur näheren Kenntnis des in engeren Fachkreisen freilich von jeher hoch geschätzten Gelehrten und seines Wirkens will dieser Aufsatz angesehen werden.[1])



Maximilian Curtze

1) Biographische Daten sind zu finden bei POGGENDORFF (*Historisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, 3. Band, Leipzig 1897, S. 317—318, 4. Band, 1902, S. 288). Verschiedene Mitteilungen verdankt der Verfasser

CURTZE war am 4. August 1837 zu Ballenstedt am Harz geboren; obwohl man in den Anhaltinern gewöhnlich Angehörige Norddeutschlands zu erblicken pflegt, fühlte und betrachtete er sich doch immer als Thüringer. Väterlicherseits stammte seine Familie aus dem Fürstentum Waldeck, wo sein Vater, EDUARD CURTZE, als herzoglicher Leibarzt und Geheimer Medizinalrat nach Ballenstedt gekommen war. Die Mutter hieß ursprünglich JOHANNA NICOLAI; MAXIMILIAN war der vierte Sohn. Er besuchte das Gymnasium Carolinum in Bernburg und absolvierte es im Jahre 1857. Welche Gründe ihn zum Besuche der Universität Greifswald veranlaßten, wissen wir nicht zu sagen, aber jedenfalls hat er dort gefunden, was er suchte. Dazu mochte allerdings beitragen, daß er sich bald in der Burschenschaft Rugia einen Freundeskreis erwarb, und so blieb er seine vollen acht Semester an der damals noch kleinen pommerischen Hochschule.

Die Persönlichkeit seines dortigen Lehrers hat ihn, wie aus den beiden Nekrologen hervorgeht, die er über ihn schrieb, vielfach angezogen und beeinflußt. Der heutigen Generation der Mathematiker würde JOHANN AUGUST GRUNERT (1797—1872), der seit 1833 ordentlicher Professor in Greifswald war, vollständig aus den Augen entschwunden sein, hielte nicht sein Archiv, welches in allerdings erheblich veränderter Gestalt noch heute fortlebt, seinen Namen einigermaßen aufrecht. Er war ein unermüdeter Rechner und fühlte sich am wohlsten bei der Bewältigung komplizierter Formeln, worin er es zu einer wahren Virtuosität gebracht hatte. Dafür hat man gegenwärtig mit Recht weniger Sinn; allein indem man die Vielzahl seiner oft ermüdenden analytischen Abhandlungen vergaß, dachte man auch nicht mehr daran, daß er sehr gute Monographien und Lehrbücher verfaßt hatte, aus denen recht deutlich hervorgeht, daß und warum seine zahlreichen Schüler ihn liebten und achteten. Jedenfalls hat CURTZE bei GRUNERT die wertvollste Anregung erhalten, und er hat auch den jungen Mann dazu bestimmt, von seinen fremdsprachlichen Kenntnissen jene Anwendungen zu machen, zu welchen wir uns bald hingeführt sehen werden.

Nachdem er seine Abgangsprüfung an der Universität bestanden, weilte CURTZE noch einige Zeit in seiner Vaterstadt und trat dann als

---

Herrn M. JACOBI in München, dem der Verblichene ein väterlicher Freund war, und von dem der Genannte infolgedessen auch selbst ein Lebensbild zu zeichnen sich vorgenommen hat. Auch durch die Angehörigen des Verewigten sind dem Verfasser noch verschiedene einschlägige Notizen übermittelt worden; teilweise trafen dieselben allerdings leider zu spät ein, um noch verwertet werden zu können.



Probekandidat an der höheren Bürgerschule zu Lennep (Rheinprovinz) ein. Seine erste feste Anstellung erhielt er am Gymnasium zu Thorn, und dieser seiner westpreußischen Adoptivheimat ist er fast vierzig Jahre lang treu geblieben, indem er sich auch sein Heim hier gründete. Die Gattin und zwei Kinder beklagen den zu früh Abberufenen; ein Sohn, der gerade in dieser Zeit das Studium der Medizin an der Universität Breslau vollendete, und eine künstlerisch trefflich veranlagte Tochter, die zu der ausgewählten Gemäldesammlung des Vaters selbst manches Stück beizusteuern vermochte. Hier in Thorn rückte Curtze vom ordentlichen Gymnasiallehrer zum Oberlehrer auf; hier erhielt er auch den Professortitel. Und als er 1896 in den Ruhestand getreten war, konnte er sich, so viele Gründe ihm auch die Übersiedelung an einen an literarischen Hilfsmitteln reicheren Wohnort nahe legen mochten, von der Stätte langjähriger Arbeit nicht trennen. Seine halb ländliche Wohnung mit ihrem Garten, in welchem sich eine rationelle Obstbaumzucht, Curtzes Liebhaberei in den Mußestunden, betreiben ließ, hielt ihn auch in der kurzen Periode der Quieszenz fest, die freilich in Wahrheit alles andere eher als das war, was der Wortlaut bedeutet.

Am Gymnasium fand er Kollegen, mit denen er sich vollkommen verstand, deren Interessen auch die seinigen waren. Prowe, Fasbender, Bergenroth seien in dieser Beziehung besonders genannt. Seinen Lehrerberuf faßte er in allen Stücken äußerst ernst auf, und wir ersehen aus den Programmen seiner Anstalt, daß er sogar ab und zu auf die Erholung in der doch ziemlich sparsam bemessenen Vakanzzeit verzichtete und eine „Ferienschule" leitete. Daß er von seinen Schülern viel verlangte und sich am liebsten denen widmete, deren lebhafte Teilnahme am Unterrichte sich herausfühlen ließ, ist leicht zu glauben; solchen tüchtigen Elementen gab er sich aber auch ganz hin, und sie konnten auch außerhalb des Klassenzimmers gar viel von ihm lernen. Für die Hebung des geistigen Lebens in jenem äußersten Vorposten deutscher Kultur brachte er viele Opfer, und sein Werk war großenteils die Gründung jener Korporation, die als „Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst" ihren Posten ausgezeichnet ausfüllte und von Curtze unausgesetzt in ihren Bestrebungen gefördert wurde. Den Grundsätzen eines entschiedenen Liberalismus, die er in der Jugend in sich aufgenommen, ist er sein Leben hindurch unverbrüchlich treu geblieben. So wenig er aber irgendwelchen Chauvinismus in sich aufkommen ließ, hatte er doch aus Überzeugung manchen Strauß mit den polnischen Mitbürgern auszufechten, namentlich auch auf wissenschaftlichem Gebiete, wie z. B. in der Coppernicus-Frage. Das Polnische beherrschte er genug, um es verstehen zu können, und dieser Umstand hat

ihm und anderen Nutzen gebracht.[1]) Curtze war keine Kampfnatur, wohl aber ein Mann von scharfem Ehr- und Rechtsgefühle, und darum sehen wir ihn auch gar nicht selten in literarische Polemiken verwickelt.

Aus Thorn ist der im allgemeinen nicht gerade reiselustige und wohl anch auf haushälterische Verwendung seiner Mittel angewiesene Mann nicht oft herausgekommen. Im Jahre 1864 nötigten ihn körperliche Störungen, um einen Urlaub einzukommen, den er in der warmen Luft der Stadt Freiburg i. B. zubrachte, und der ihm auch seine Gesundheit wiedergab. Neun Jahre später benützte er die durch einige Urlaubstage verlängerte Pfingstwoche zu einem erfolgreichen Besuche der Bibliotheken von Stockholm nnd Upsala, zu dem der Mäcen der Wissenschaft, Fürst Boncompagni in Rom, die Kosten beisteuerte. In das Jahr 1896 fiel die nachher zu besprechende Rundreise durch die mitteleuropäischen Büchersammlungen, und 1899 besuchte Curtze zuerst seinen Freund Cantor in Heidelberg, um dessen 70. Geburtstag mitzufeiern, und sodann mit diesem die damals in München abgehaltene Naturforscherversammlung. Diese beiden letzten Gelegenheiten ermöglichten es auch dem Schreiber des Nekrologes, eine schon 1879 angeknüpfte persönliche Bekanntschaft von nenem aufzufrischen.

Zur Erreichung äußerer Ehrnngen bietet die Disziplin, welcher Curtze sein arbeitsvolles Leben geweiht hatte, wenig Anlaß. Doch war er Mitglied einer Reihe gelehrter Gesellschaften, insbesondere der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie und (korrespondierendes) der Akademie der Wissenschaften zu Padua. Die staatliche Dekoration, die er trug, galt wohl noch mehr, als dem Forscher, dem bewährten Schulmanue.

Wo sich der noch junge Mann die hervorragenden Sprachkenntnisse angeeignet hat, die ihm in seinem wissenschaftlichen Leben so sehr zu statten kamen, wissen wir nicht zu sagen. Französisch und Italienisch wußte er sich, wie ein Blick auf das Verzeichnis seiner Veröffentlichungen ergibt, mit gleicher Leichtigkeit auszudrücken; daß er die klassischen Sprachen vollkommen beherrschte, war wohl dem Bernburger Gymnasium zuzuschreiben. Unter der Einwirkung Grunerts entstanden seine Übersetzungen aus der damals machtvoll aufstrebenden mathematischen Literatur der Italiener; er verdeutschte Schriften der Koryphäen, eines Battaglini, Beltrami, Brioschi, Cremona, Gherardi, Sella und, in etwas späterer

1) So verdankte der Schreiber dieser Zeilen dem Freunde eine Reihe von Notizen über den polnischen Geometer Broscius (*Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig 1876, Kap. 1), über den damals noch sehr wenig bekannt war, und mit dem man erst seitdem durch eine Monographie von Franke (Krakau 1884) soweit vertraut gemacht wurde, um seine Bedeutung für die damalige Zeit gehörig würdigen zu können.

Zeit die *Precursori del* COPERNICO des großen Mailänder Astronomen SCHIAPARELLI. Zumal CREMONAS Lehrbücher haben durch CURTZES Mühwaltung festen Fuß in Deutschland gefaßt und sehr wesentlich zur Aufnahme des Studiums der synthetisch-geometrischen Methoden beigetragen.

In seinen jüngeren Jahren pflegte er auch gerne die reine Mathematik, in der er durch GRUNERT eine so tüchtige Schulung erfahren hatte. Dessen Archiv enthält aus CURTZES Feder mehrere Beiträge geometrischer und analytischer Natur; so zog ihn vor allem die Summierung trigonometrischer Reihen von verwickelterem Bildungsgesetze an. Nicht minder interessierten ihn zahlentheoretische Aufgaben. Hierher gehört jene inhaltreiche Abhandlung, die er in den Annali di matematica über die sogenannte LAMBERTsche Reihe publizierte. Es ist nämlich

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^r}{1-x^r} = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 4x^8 + \ldots,$$

und die rechts stehende Potenzreihe hat die Eigenschaft, daß stets der Faktor des Termes x^n gleich der Anzahl der ganzzahligen Teiler von n ist; so oft dieser Koeffizient gleich 2, ebenso oft ist der Exponent n eine Primzahl. Daß die Gewinnung eines independenten Ausdrucks für das Fortschreitungsgesetz der Reihe eine sehr wichtige Sache wäre, ist leicht einzusehen, und CURTZE suchte denselben durch bestimmte Integrale von allerdings sehr komplizierter Gestalt darzustellen.

Wie und wann der junge Gelehrte auf das Arbeitsfeld geführt wurde, durch dessen Bebauung er sich ein unvergängliches Verdienst erwerben sollte, läßt sich ziemlich genau bestimmen. Kaum in Thorn etwas heimisch geworden, orientierte er sich auf der an Handschriften und seltenen Drucken nicht armen Bibliothek seines Gymnasiums, die er späterhin katalogisiert, und über die er mehrere Aufsätze geschrieben hat. Und dabei stieß er auf ein lateinisches Manuskript, dessen Inhalt ihn fesselte, und darum wandte er sich an den Mann, von dem er am ersten sachdienlichen Aufschluß erwarten zu dürfen glaubte. Dieser Mann war Professor CANTOR, der denn auch nicht anstand, dem Fragesteller seine Unterstützung angedeihen zu lassen. Das Jahr 1864 war es,[1]) welches die persönliche Freundschaft der beiden namhaften Vertreter ihres Faches begründete und für die Richtung, in welcher sich die Tätigkeit des jüngeren der beiden vorzugsweise bewegte, geradezu richtunggebend werden sollte.

Soll der Grundzug dieser Tätigkeit mit wenigen Worten scharf gekennzeichnet werden, so läßt sich vielleicht sagen: Vornämlich handelte es sich um die Aufklärung der zahllosen Dunkelheiten, welche vor vierzig Jahren noch unser Wissen von dem Stande der

1) Bibliotheca Mathematica 1_3, 1900, S. 228.

exakten Wissenschaften im Mittelalter überlagerten, sowie um die Aufdeckung der viel zu wenig gewürdigten geistigen Verbindungsfäden, welche vom Altertum zum Mittelalter und von diesem zur Neuzeit führen. Nach dieser Seite hin hat CURTZE bahnbrechend gewirkt, und es ist ihm gelungen, Namen von Autoren und Schriftstellern sozusagen auszugraben, von denen man kaum eine Ahnung hesaß, und deren Leistungen sich nunmehr leicht überblicken ließen. Als echter Historiker wußte er sich stets in den Geist des Zeitalters zu versetzen, mit dem er es gerade zu tun hatte, und zudem stand ihm eine vortreffliche paläographische Schulung zur Seite, deren Wert wohl deshalb nicht geringer zu veranschlagen war, weil sie weit mehr auf ausgedehnter Erfahrung als auf theoretischen Studien beruhte. Er selbst äußerte gelegentlich, die Kritik, welche CH. THUROT an der Ausgabe des *Algorismus proportionum* des ORESME betätigte, sei für ihn, den in diesen Dingen noch nicht gehörig orientierten Herausgeher, die Richtschnur gewesen, welcher folgend er das Lesen alter Manuskripte gründlich einühte. Die Vorstände aller großen Bibliotheken liehen ihm gern nnd liheral ihre seltenen Kodizes, wohl wissend, daß seine Mitteilungen einen nnschätzharen Beitrag für ihre Handschriftenkataloge abgeben würden.

Aus nnserer ohigen Angahe wird erhellen, daß CURTZES Untersuchungen über die Antike und die neuere Zeit nur ein numerisch schwächeres Kontingent zu der reichen Fülle seiner literarischen Hinterlassenschaft stellen werden. Wir wollen deshalb mit ihnen den Anfang machen. Seinem bibliographischen Sachverständnis gelang der Nachweis, daß der sogenannte Brief des ARCHIMEDES an König GELON eine — noch dazu sehr spät entstandene — Fälschung sei.[1]) Das angehliche Werk des EUKLIDES „Über die Wage" sprach er diesem ab und den bekannten arabischen „drei Brüdern" zu. Auch üher das echt euklidische, zuerst in Basel gedruckte Fragment *De gravi et levi* verbreitete er insofern Licht, als er dartat, die Druckerei HERWAGEN hahe eine lateinische Übersetzung aus dem Griechischen vor sich gehabt, und des JORDANUS NEMORARIUS Schrift *Liber ponderum* stehe mit jenem in gar keinem Zusammenhange. Ganz besonders aber fesselten ihn in späteren Jahren die Überreste des Alexandriners HERON, dieses so lange in mysteriöser Umschattung verhliehenen Mathematikers,

1) Diese die scharfsichtige Art CURTZES sehr gut charakterisierende Aufdeckung eines literarischen Betruges findet sich in einer Besprechung der an sich sehr verdienstlichen Schrift von HENNING (*Ein unechter Brief des Archimedes*, Darmstadt 1872). Der Rezensent war nämlich (Zeitschr. für Mathem. 20, 1875; Hist. Abt. S. 89 ff.) in der Lage zu beweisen, daß das in Rede stehende Schreiben bereits wiederholt gedruckt und auch früher schon als das, was es wirklich ist, nämlich als eine Mystifikation, erkannt worden war.

der nun endlich durch die vereinten Bemühungen von Cantor, P. Tannery, Hultsch, W. Schmidt, Schöne u. a. in ein ungleich helleres Licht gerückt worden ist. Die Auffindung der heronischen „μετρικά“ durch Schöne regte ihn dazu an, die so viel umstrittene Frage, wie sich die Griechen ihre Näherungswerte für quadratische Irrationalitäten verschafft haben möchten, von neuem vorzunehmen. Dabei ergab sich zunächst eine Andeutung des Weges, auf dem jene Näherungsformeln zu den Arabern und zu den christlichen Gelehrten gelangt sind, und weiterhin die erste Einsicht in die Art und Weise, wie man sich bei der approximativen Ausziehung von Kubikwurzeln verhielt. Diese Resultate werden die Historiker der Mathematik wohl zu beachten haben.

Ohne orientalischer Sprachen direkt kundig zu sein, vermochte Curtze gleichwohl auch für die Erforschung der Beziehungen zwischen dem mathematischen Wissen der asiatischen Kulturvölker und demjenigen des christlichen Abendlandes Bedeutendes zu leisten. Von ihm erfuhren wir, daß die chinesische Ta Yen-Regel, die zur Auflösung eines Systems unbestimmter Gleichungen dient, auch dem Occidente nicht fremd war — die Art der Übertragung, falls man nicht an eine zweifache Erfindung mit gegenseitiger Unabhängigkeit denken will, muß durch weitere Nachforschung ermittelt werden. Auf einen sonst unbekannten arabischen Mathematiker Ahmed ben Jusuf hatte zuerst M. Steinschneider hingewiesen, und Curtze fand den Traktat „Von den einander ähnlichen Kreisbogen“ bei Jordanus auf, zeigte aber zugleich, daß aus dieser Reproduktion sich nichts für die Autorschaft jenes Jusuf folgern lasse. Einen vortrefflichen Handweiser zur Beurteilung der Kommentierungstätigkeit der Araber aber lieferte er erst vor einigen Jahren, indem er eine Ausgabe des Abû'l 'Abbâs Al-Fadl ben Hâtim an-Nairîzî, latinisiert Anaritius, veranstaltete. Der bekannte Gerardus Cremonensis hatte den Kommentar dieses Arabers (etwa um 900) zum Euklides ins Lateinische übersetzt, und Curtze fand ihn anläßlich seiner erwähnten Studienreise in Krakau auf. Diese Scholien sind nicht sowohl um ihrer selbst, als vielmehr um deswillen bedeutsam, weil Anaritius die verloren gegebenen Bemerkungen des Simplicius („Sambelichius“) und Heron zu einzeln Teilen des Euklidischen Werkes mit in sein eigenes aufgenommen hat.

Die Neuzeit im engeren Wortsinne lag unserem Forscher ferner. Gelegentlich machte er darauf aufmerksam, daß ein kinematischer Lehrsatz, den man Mac Laurin oder De la Hire zuzuschreiben geneigt war, in Wahrheit geistiges Eigentum des Coppernicus gewesen ist. Aber das ausgehende XV. und das XVI. Jahrhundert zogen ihn lebhaft an. Das größere selbständige Werk, zu dessen Abfassung ihm glücklicherweise noch die Frist gegönnt war, die *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im*

Mittelalter und der Renaissance, enthalten zwei dahin zielende Abteilungen. Ihm danken wir die erste kritische Edition des von dem wackeren Polyhistor v. Murr eben doch nur recht unvollständig abgedruckten Briefwechsel des genialen Regiomontanus mit seinen drei Zeitgenossen Roder, Bianchini und Jakob von Speier, einer Reihe von Schriftstücken, die insonderheit für unsere Einsicht in das Zahlenrechnen jener Übergangsperiode unschätzbar sind. Und weiterhin machte er uns mit der inhaltlich schon auf ziemlich hohem Standpunkte stehenden, aber ganz krausen mathematisch-historischen Vorstellungen Raum gebenden *„Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum“* bekannt, indem er zugleich durch eine scharfsinnige Kombination diesen Yles, oder Elias, als eine Art von Doppelgänger des Euklides hinstellte.

Ein paar Lebensjahre Curtzes, so darf man ungescheut sagen, gingen auf in seinen Bemühungen, über die Lebensumstände und den Entwickelungsgang seines großen Landsmannes Coppernicus volle Klarheit zu schaffen. Zu dem Ende hatte er ja, wie wir wissen, seine schwedische Reise unternommen. Man geht wohl nicht zu weit mit der Behauptung, ohne diese stete, anspruchslose Vorarbeit hätte das klassische Werk von Prowe[1]), in dem denn auch der Name Curtze an 50 Stellen zitiert wird, nicht zustande kommen können. Er stellte die richtige Schreibart des Namens Coppernic (mit Doppel-p) fest; er erhob gegenüber der in den Kreisen polnischer Gelehrter vertretenen Auffassung die Tatsache von der deutschen Abstammung des Thorner Bürgersohnes über jeden Zweifel; seine in Upsala gemachten Exzerpte ließen nicht nur die astronomische, sondern auch die ärztliche Wirksamkeit des in allen Sätteln gerechten Mannes hervortreten; er übertrug Malagolas archivalische Ergebnisse betreffs der Studienzeit des jungen Domherrn zu Bologna ins Deutsche[2]); er machte die von dem letzteren in Rom angestellten astronomischen Beobachtungen ausfindig; er zog die Nutzanwendungen aus Coppernics griechischen Eintragungen in seine Bücher; von ihm rühren die genaueren Nachweisungen über die Reform des preußischen Münzwesens her; nur durch seine Mühwaltung endlich wurden wir befähigt, in die Geisteswerkstatt des einzigartigen Mannes einen tieferen Blick zu tun und das Reifen seiner welt-

1) Leopold Prowe, *Nicolaus Coppernicus*, 1. Band (in zwei Teilen), Berlin 1883; 2. Band, ebenda 1884.

2) In einem wesentlichen Punkte wich Curtze von Malagola ab, indem er sich für die Annahme einsetzte, daß Coppernicus auch bei Scipione del Ferro, mit dem der Umschwung in der Behandlung der kubischen Gleichungen beginnt, gehört habe. Diese Ansicht wird heute wohl durchaus für die richtige gehalten, da auch Malagolas Gegengründe sich (Prowe, a. a. O., I: 1, S. 248) geradezu in diesem Sinne verwerten lassen.

umgestaltenden Ideen aus bescheidenen Keimen heraus stufenweise zu verfolgen. Und CURTZE hat uns endlich auch mit dem gereinigten Texte des Grundbuches der neueren Kosmologie beschenkt. Im Gedächtnisjahre 1873 gab der Thorner COPPERNICUS-Verein, von der preußischen Regierung materiell unterstützt, die zum Glück erhalten gebliebene Origininalhandschrift der *Revolutiones*, die inzwischen mancherlei Schicksale gehabt und sich u. a. längere Zeit im Besitze des berühmten Pädagogen AMOS COMENIUS befunden hatte, in einem Neudrucke heraus. Niemand wird daran denken, die Verdienste der Männer verkleinern zu wollen, die sich mit CURTZE in die umfassenden Geschäfte dieses Unternehmens teilten; daß jedoch ihm der Löwenanteil der vorbereitenden Arbeiten zufiel, ist unbestreitbar. Besonders erfreulich ist, daß er das Andenken des ebenso geistesklaren wie charakterfesten Astronomen von dem ihm gemachten Vorwurfe einer gewissen Hinterhältigkeit zu reinigen in der Lage war, indem er die wahre Natur der von dem Nürnberger Hauptprediger OSIANDER eingeschmuggelten „Praefatio“ beleuchtete.

Durch die Vorstudien war auch einer anderen, bislang zu wenig beachteten Persönlichkeit ihr Recht geworden, dem Ferraresen DOMENICO MARIA NOVARA. Mit ihm, dem anerkannten Lehrer und Freunde COPPERNICS, beschäftigt sich eine ganze Folge CURTZEscher Aufsätze in deutscher und italienischer Sprache, und es kann danach keinem Zweifel unterliegen, daß dieser originelle Denker, der mehrfach in Gegensatz zum herrschenden Systeme des PTOLEMAEUS geraten war, einen nicht zu unterschätzenden Einfluß auf Geist und Gemüt seines Zuhörers ausübte. Und in NOVARAS Vaterstadt Ferrara, wo sich der schon herangewachsene Studierende den Doktorhut des geistlichen Rechtes aufsetzen ließ, lernte er den um sechs Jahre jüngeren CELIO CALCAGNINI kennen, der ebenfalls als einer von denen genannt wird, die unter den Vorläufern der heliozentrischen Weltanschauung eine selbständige Stelle verdienen.

Bei seinem Streben, die Feldmeßkunst des Mittelalters und die ihr zu verdankende Förderung des trigonometrischen Rechnens allseitig zu erforschen, berührte sich CURTZE nahe mit den „Agrimensoren“ seines Freundes CANTOR. Dahin gehören seine — von auch dem Fachmanne angenehmen Übersetzungen begleiteten — Textausgaben des *Liber embadorum* von ABRAHAM JUDAEUS (SAVASORDA) und der *Practica geometriae* von LEONARDO MAINARDI in den „Urkunden“. Erstere Schrift gehörte zu den Vorlagen, an die sich des LEONARDO FIBONACCI grundlegende „praktische Geometrie“ aus dem XIII. Jahrhundert anlehnte. Von CURTZE wird zutreffend darauf aufmerksam gemacht, daß sich stets zwei ihrem inneren Wesen nach verschiedene Gruppen von geodätischen Instrumenten gegenüberstehen; solche, die, nach Art des gewöhnlichen Quadranten, eine direkte Ablesung der zu

messenden Winkel gestatten, und solche, die eine indirekte Berechnung derselben aus gemessenen Strecken notwendig machen. Einer Notiz des Unterzeichneten[1]) Folge gebend, arbeitete Curtze die nur handschriftlich uns aufbehaltene Schrift des katalonischen Juden Levi ben Gerson oder Leon de Bagnolis durch und entwickelte danach die Theorie des später zu so hoher Anerkennung gelangten Jakobsstabes, dessen Handhabung bereits einige Vertrautheit mit den gonimetrischen Funktionen erheischte. Allein dabei blieb er nicht stehen, sondern wies weiterhin nach, daß Levi ganz klar und bestimmt die Camera obscura beschreibt, und daß also Porta ohne Grund für deren Erfinder ausgegeben wird, ganz abgesehen davon, daß auch Leonardo da Vincis Papiere ebenfalls die unverkennbare Skizze dieses Apparates enthalten. Wie die Begriffe „Umbra recta“ und „Umbra versa“, d. h. Kotangente und Tangente, lange vor der Entstehung von Regiomontans *Tabula foecunda* Eingang bei den europäischen Geometern gefunden haben, trat bei dieser Veranlassung gleichfalls in die Erscheinung.

Die Zahlentheorie und Rechenkunst der spätmittelalterlichen Jahrhunderte spielten nicht minder ihre Rolle in Curtzes Untersuchungsgebiete. Wiederholt kommt er auf die kulturhistorisch bemerkenswerten und gar nicht so besonders leichten Scherzaufgaben zu sprechen, die durch Alcuins *Problemata ad acuendos juvenes* in den Klosterschulen Eingang gefunden hatten und erörtert zugleich zeitgenössische Rechenspiele. Spezielle Formen des numerischen Kalküls, wie die abgekürzte Multiplikation, werden mit berücksichtigt. Von dauerndem Werte ist ein in Wien gemachter Fund, der eines Manuskriptes, in welchem die beiden ihrerzeit um die Vorherrschaft streitenden Methoden des Abakus und Algorithmus nebeneinander und ungefähr gleichberechtigt auftreten, so daß man damit eine Vorstellung von den Verhältnissen des Übergangszeitalters bekommt. Sogar Anklänge an die Dezimalbrüche glaubte Curtze wahrzunehmen. Die Rundreise zeitigte überhaupt eine reiche Ernte, zu deren voller Einbringung nur zunächst die Zeit gebrach. Um nur eines zu nennen, sei daran erinnert, daß man zwar immer von Heinrich von Langenstein als von demjenigen sprach, der die exakten Wissenschaften an der jungen Universität Wien inaugurierte; allein einen eigentlichen Beleg dafür, daß es sich so verhalte, besaß man nicht. Nunmehr kennen wir eine Handschrift des gefeierten Hochschullehrers, die etwa seinem Kollege über Planetentheorik — Exzenter und Epizykeln — entsprechen dürfte.

Einer ganzen Reihe mittelalterlicher Mathematiker stehen wir, seitdem Curtze ihnen seine Teilnahme zugewendet hat, ganz anders, als früher,

1) Günther, *Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung;* Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, S. 73 ff.



gegenüber; sie sind uns in jeder Hinsicht näher gerückt worden. Solche sind aus dem eigentlichen Mittelalter JOHANNES DE MURIS, der vorzugsweise zuvor nur als musikalischer Schriftsteller galt; DOMINICUS PARISIENSIS oder DE CLAVASIO, dessen Kompendinm als Archetypus der „Geometria Culmensis“ zu betrachten ist; ROBERTUS ANGLICUS (identisch mit ROBERT GROSSETESTE?); JOHANNES DE LINERIIS, der fast zum Gespenste in der Geschichte der Mathematik geworden war, jetzt aber ein sehr reeller Pikarde aus dem XIV. Säkulum geworden ist. Von SACROBOSCO *Algorithmus* wurde eine gedruckte Ausgabe aus dem Jahre 1488 ausfindig gemacht. Anch PETRUS DE DACIA, sowie THOMAS BRADWARDIN haben CURTZE bereits zu Beginn seiner gelehrten Laufbahn anhaltend beschäftigt. JOHANN VON GMUNDEN ist ihm zufolge nicht dem Städtchen am Traunsee, sondern der schwäbischen Reichsstadt entsprossen. Aus etwas späterer Zeit gehörten der Astronom und Geograph GEMMA FRISIUS und JOACHIM RHETICUS zu denen, welchen der Spüreifer des bibliothekskundigen Mannes zn gute kam. Der „Thnringopolonus“ VITELLION, dessen Lehrbegriff der Optik eine Zierde der mittelalterlichen Literatur bildet, wurde in einen ehrlichen Deutschen WITELO umgewandelt. Mehr jedoch als alle anderen gewannen unter CURTZES Händen zwei Gelehrte, von denen man bis dahin nicht viel mehr als die Namen und wenige Schriften gekannt hatte; diese sind JORDANUS NEMORARIUS und NICOLE ORESME. Der erstgenannte ist uns heute ein geschickter Algebraiker, der mit dem noch rohen Formalismus, der ihm zu Gebote stand, auch schwierigeren Gleichnngen zu Leibe zu gehen verstand; der andere muß sogar als der ideenreichste aller Mathematiker vor REGIOMONTANS Auftreten in Ehren gehalten werden. In seinem Kopfe bildete sich nämlich erstmalig der Anfangsbestand einer wirklichen Koordinatengeometrie aus, und an CURTZE lag es, daß dieser tatsächliche Inhalt hinter der verhüllenden Form der *Latitudines formarum* entdeckt wurde.

Hiermit möge unsere Übersicht über die vier Jahrzehnte umfassende schriftstellerische Leistung des verstorbenen Vorkämpfers für die von dieser Zeitschrift verfolgten Zwecke ihren Abschluß finden. Kurz und bündig mußte dieselbe sein, nnd jeder Leser unseres Artikels wird finden, daß es leicht genug gewesen wäre, demselben durch tieferes Eingehen auf die fast zahllosen, nur leicht gestreiften Einzelfragen jeden beliebigen Umfang zu erteilen. Vergegenwärtigt man sich, wie ungemein CURTZES Produktion und Schaffensfreude zugenommen hatten, seit mit der Enthebnng von den täglichen Pflichten des Lehrers sein Geist sich frei entfalten durfte, so werden wir nns des Gedankens nicht zu entschlagen vermögen, daß er uns noch reiche Gaben beschert haben würde, wäre ihm eine längere Lebensdauer beschieden gewesen. Was würde z. B. er oder CANTOR aus jener

Geschichte der Mathematik in Deutschland gemacht haben, welche die Münchener Historische Kommission vergab, ohne zu ahnen, wo sich alle Eigenschaften für ein solches Werk in seltener Vollständigkeit zusammengefunden hatten!

Publikationen von M. Curtze. [1]

I. Selbständig erschienene Schriften.

1) *Die Gymnasialbibliothek zu Thorn und ihre Seltenheiten.* Königsberg i. Pr., Rosbach 1868.

2) *Der „Algorithmus proportionum" des Nicole Oresme, zum ersten Male nach der Lesart R. 4⁰—2 der k. Gymnasialbibliothek zu Thorn.* Jubiläumsschrift des Thorner Gymnasiums. Berlin, S. Calvary & Co. 1868. 30 S. 8⁰.

3) *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (1320—1382). Ein mathematisch-bibliographischer Versuch.* Berlin, S. Calvary & Co. 1870. 20 S. 4⁰.

4) *Katalog der Gymnasialbibliothek zu Thorn.* Programm. Thorn 1871.

5) *Die Handschriften und seltenen alten Drucke der Gymnasialbibliothek zu Thorn.* 1. Teil, Thorn 1873. 2. Teil, Leipzig 1878. 40 + 46 S. 4⁰.

6) *L. F. Prowe, ein Gedenkblatt.* Programm. Thorn 1888.

7) *Kommentar zum „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius;* Programm, Thorn 1890. 19 S. 4⁰.

8) *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance,* 2 Teile. Leipzig, B. G. Teubner 1902. X + 627 S. (Aus Heft 12 und 13 der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik separat herausgegeben.)

II. Ausgaben.

1) *Nicolai Copernici Thorunensis de revolutionibus orbium coelestium libri VI. Ex autoris autographo recudi curavit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit Joannis Rhetici de libris revolutionum narratio prima.* Thorn 1873. XXX + 494 S. Fol. Sogenannte Säkularausgabe.

2) *Liber trium fratrum de geometria.* Leipzig 1885. Aus den Nova Acta der kaiserl. Leopold.-Karol. Deutschen Akademie der Naturforscher B. 49. 63 S. 4⁰.

3) *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius; una cum Algorismo ipso.* Kopenhagen 1897. XIX + 92 S. 8⁰. Herausgegeben mit Unterstützung der kgl. dän. Akademie der Wissenschaften.

4) *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in Codice Cracoviensi 569 servata.* Lipsiae 1899. XXIX + 389 S. 8⁰. Zugleich Supplementband zu der großen Euklides-Ausgabe von Heiberg und Menge.

---

1) Aus räumlichen und zeitlichen Gründen mußte darauf verzichtet werden, auch die äußerst zahlreichen Berichte und Bücherbesprechungen hier zu registrieren, welche Curtze in sehr verschiedenen Organen (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jenaer Literaturzeitung, Deutsche Litteraturzeitung, Neuer Anzeiger für Bibliographie und Bibliothekswissenschaft usw.) veröffentlicht hat. Er ist dabei stets den Grundsätzen positiver Kritik treu geblieben. Wir erinnern z. B. an die in dem Jenaer Blatte enthaltenen Anzeigen einer Reihe von neuen Bearbeitungen des Galilei-Prozesses, welche auch sachlich entschiedenes Interesse beanspruchen dürfen.

III. Übersetzungen.

1) *Battaglinis Bemerkungen über Kurvenreihen von beliebigem Index. Ins Deutsche übersetzt.* Greifswald, A. Koch 1864.

2) *Rede, gehalten bei der feierlichen Eröffnung der Accademia scientifico-letteraria und des Istituto tecnico superiore zu Mailand von Francesco Brioschi. Aus dem Italienischen.* Greifswald, A. Koch 1864.

3) *Einleitung in die geometrische Theorie der ebenen Kurven, von Luigi Cremona. Nach der neuen Redaktion unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen.* Greifswald, A. Koch 1865. XVI + 299 S. 8⁰.

4) *Die geometrischen Prinzipien des Zeichnens, insbesondere die der Axonometrie, von Quintino Sella. Aus dem Italienischen.* Greifswald, A. Koch. 1865. 48 S. 8⁰ + 4 Taf.

5) *Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, von Luigi Cremona. Aus dem Italienischen, unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen.* Berlin, S. Calvary & Co. 1870. XXIV + 228 S. 8⁰.

6) *Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Fakultät der alten Universität Bologna. Vorträge von Silvestro Gherardi, aus dem Italienischen, unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übersetzt.* Berlin, S. Calvary & Co. 1871. 140 S. 8⁰.

7) *Elemente des graphischen Kalkuls, von Luigi Cremona. Aus dem Italienischen, unter Mitwirkung des Verfassers, ins Deutsche übertragen.* Leipzig, Quandt & Händel 1876. VIII + 105 S. 8⁰.

8) *Die Vorläufer des Copernicus im Altertum. Historische Untersuchungen von G. V. Schiaparelli. Aus dem Italienischen, unter Mitwirkung des Verfassers, ins Deutsche übertragen.* Leipzig, Quandt & Händel[1]) 1876. VIII + 268 S. 8⁰ + 4 Taf.

IV. Archiv der Mathematik und Physik.

1) *Handschriftlicher Fund auf der Thorner Gymnasialbibliothek;* 44, 1865, S. 371—374.

2) *Weiteres über den handschriftlichen Fund auf der Thorner Gymnasialbibliothek;* 45, 1866, S. 501—504.

3) *Über die in Teil XLV, Heft 2, S. 219 mitgeteilten Summenformeln des Herrn Alessandro Dorna in Turin;* 46, 1866, S. 357—359.

4) *Verallgemeinerung der in Teil XLVI, S. 359 mitgeteilten Summenformeln (4) und (5) und einige daraus sich ergebende specielle Resultate;* 47, 1867, S. 238—241.

5) *Erweiterung der letzten der in Teil XLVII, S. 117 mitgeteilten Sätze in folgender Form: „Ist ein vollständiges Vierseit einer Kurve 3. Ordnung eingeschrieben, so schneiden sich die Tangenten der Kurve durch zwei gegenüberliegende Scheitel in einem Punkte der Kurve"; ferner über den Satz: „Nimmt man auf einer Seite AB eines Dreiecks ABC einem Punkt D so an, daß $AD:BD = n:m$, so ist $m \cdot AC^2 + n \cdot BC^2 = (m \pm n)(CD^2 \pm AD \cdot BD)$, wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem D zwischen A und B oder auf der Verlängerung von AB liegt",* und über den zweiten der am angeführten Orte mitgeteilten Sätze; 47, 1867, S. 356—358

6) *Zwei zu beweisende Sätze;* 48, 1868, S. 480.

7) *Schreiben an Prof. Grunert;*[2]) 48, 1868, Liter. Bericht Nr. CLXXXXII S. 15—20.

---

1) Vgl. auch Altpreußische Monatsschrift.

2) Dasselbe wurde veranlaßt durch eine Reklamation Prof. Eugenio Beltramis.

8) *Die Originalhandschrift des copernicanischen Hauptwerkes „De revolutionibus" und die Neuausgabe desselben durch den Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn;* 54, 1872, Liter. Bericht Nr. CCXVI, S. 1—7.

9) *Johann August Grunert;* 55, 1873, S. 1—4.

10) *Die Entstehungsgeschichte der Revolutiones des Copernicus;* 56, 1874, S. 325—326.

11) *Fünf ungedruckte Briefe an Gemma Frisius, nach dem Original der Universitätsbibliothek zu Upsala herausgegeben;* 56, 1874, 313—325.

12) *Kurze Notiz zu dem Aufsatze des Herrn Rath „Die rationalen Dreiecke";* 57, 1875, S. 216—217.

13) *Inedita Copernicana, aus den Handschriften von Berlin, Königsberg, Upsala und Wien herausgegeben;* 62, 1878, S. 113—148, 337—374.

14) *Kurze Replik an Herrn Dr. P. Zebrawski;* 63, 1879, S. 432—434.

15) *Mathematisch-geschichtliches aus dem Cod. lat. Mon. No. 14908;* 13_2, 1894. S. 388—406.

V. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.

1) *Note sur la vie de Jean-Auguste Grunert;* 3, 1872, S. 285—287.

2) *Extrait d'une lettre;* 6, 1875, S. 57—60.

VI. Annali di matematica pura ed applicata.

1) *Notes diverses sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers;* 1_2, 1867, S. 285—292.

VII. Zeitschrift für Mathematik und Physik.

1) *Über die Handschrift R. 4° . 2 „Problematum Euclidis explicatio";* 13, 1868, Supplement S. 45—104.

2) *Einige Bemerkungen zu dem Aufsatze Steinschneiders „Thabit ben Korra";* 19, 1874, S. 95—96.

3) *Das angebliche Werk des Euclides über die Wage;* 19, 1874, S. 262—263.

4) *Reliquiae Copernicanae;* 19, 1874, S. 76—82, 432—458; 20, 1875, S. 221—248.

5) *Bemerkungen zu dem Aufsatze Günthers „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im XV. Jahrhundert";* 20, 1875, Hist. Abt. S. 57—60.

6) *Hat Copernicus die Einleitung zu seinem Werke De Revolutionibus selbst gestrichen oder nicht;* 20, 1875, Hist. Abt. S. 60—62.

7) *Letztes Wort über die „Bibliotheca Historico-naturalis";* 21, 1876, Hist. Abt. S. 151—154.

8) *Über eine Handschrift der königl. Bibliothek zu Dresden;* 28, 1883, Hist. Abt. S. 1—13.

9) *L. Prowe. Eine Gedächtnisrede, gehalten in der ausserordentlichen Sitzung des Copernicus-Vereins für Kunst und Wissenschaft zu Thorn am 10. Oktober 1887;* 33, 1888, Hist. Abt. S. 89—96. Auch separat, Thorn 1887.

10) *Kommentar zum „Tractatus de numeris datis" des Jordanus Nemorarius;* 36, 1891, Hist. Abt. S. 1—23, 41—62, 81—95, 121—138.

11) *Die abgekürzte Multiplikation;* 40, 1895, Hist. Abt. S. 7—13.

12) *Anonyme Abhandlung über das Quadratum geometricum;* 40, 1895, Hist. Abt. S. 161—165.

13) *Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra im XV. Jahrhundert;* 40, 1895, Supplement S. 31—74.

---

die derselbe in Vertretung der Interessen L. Cremonas gegen eine Schrift v. Drachs (*Einführung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte*, Leipzig 1867) erhoben hatte. Beltramis Mitteilung wird von Curtze in deutschem Gewande wiedergegeben.

14) *Die Handschrift No. 14836 der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München;* **40**, 1895, Supplement S. 75—142.

15) *Über die sogenannte Ta Yen-Regel in Europa;* **41**, 1896, Hist. Abt. S. 81—82.

16) *Quadrat- und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Herons neu aufgefundenen μετρικά;* **42**, 1897, Hist. Abt. S. 113—120.

17) *Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes;* **42**, 1897, Hist. Abt. S. 145—152.

18) *Über eine Algorithmus-Schrift des XII. Jahrhunderts;* **42**, 1897, Supplement S. 1—28.

19) *De inquisicione capacititis figurarum. Anonyme Abhandlung aus dem fünfzehnten Jahrhundert;* **42**, 1897, Supplement S. 29—68.

20) *Ein „Tractatus de abaco" aus der Wende des XII. und XIII. Jahrhunderts;* **43**, 1898, Hist. Abt. S. 122—130.

21) *Der Tractatus Quadrantis des Robertus Anglicus in deutscher Übersetzung aus dem Jahre 1477;* **44**, 1899, Supplement S. 41—63.[1])

22) *Verzeichnis der mathematischen Schriften des Hofrats Professor Dr. Moritz Cantor;* **44**, 1899, Supplement S. 625—650.

23) *Ein Nachtrag zu dem Aufsatze in der Festschrift;* **45**, 1900, Hist. Abt. S. 41—46.

VIII. Monatshefte für Mathematik.

1) *Practica geometriae;* **8**, 1897, S. 193—224.

2) *Nachträge zu dem Aufsatze „Practica geometriae";* **9**, 1898, S. 266—268.

IX. Rivista Europea (Firenze).

1) *Domenico Maria Novara da Ferrara, maestro del Copernico in Bologna;* **2**, 1870, Heft 3.

X. Bullettino di bibliografia e di storia della scienze matematiche e fisiche.

1) *Sur l'astronomie de Boèce, signalée par M. le Docteur M. Cantor;* **1**, 1868, S. 104.

2) *Sur l'orthographe du nom et sur la patrie de Witelo (Vitellion);* **4**, 1871, S. 49—77.

3) *Sopra alcuni scritti stampati, finora non conosciuti, di Domenico Maria Novara da Ferrara;* **4**, 1871, S. 140—148.

4) *Ulteriori notizie intorno ad alcuni scritti stampati, finora non conosciuti, da Domenico Maria Novara da Ferrara;* **4**, 1871, S. 149.

5) *Nuove Copernicane;* **11**, 1878, S. 167—171.

6) *Giunte ed annotazioni alle „Nuove Copernicane";* **11**, 1878, S. 172—176.

XI. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

1) *Mathematische Sophismen;* **5**, 1874, S. 359—360.

XII. Leopoldina.

1. *Die Ausgabe von Jordanus „De numeris datis" durch Professor P. Treutlein in Karlsruhe;* **18**, 1882, S. 26—31.

XIII. Bibliotheca Mathematica.

1) *Über einen De la Hire zugeschriebenen Lehrsatz;* 2_2, 1888, S. 65—66.

2) *Über den „liber de similibus arcubus" des Ahmed ben Jusuf;* 3_2, 1889, S. 15—16.

3) *Über den Josephus Sapiens oder Hispanus Gerberts;* 8_2, 1896, S. 13—14.

---

1) Curtzes Beitrag zu jener Festschrift, welche derselbe im Vereine mit dem Schreiber dieser Zeilen anläßlich des 70. Geburtstages M. Cantors als **9.** Heft der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik" herausgab (Leipzig, Teubner, 1899), und welche Beiträge von 33 Gelehrten enthält.

4) *Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.* I. *Anonyme Abhandlung über Geometrie;* 8_2, 1894, S. 107—115.

5) *Zur Geschichte des Josephspieles;* 8_2, 1894, S. 116.

6) *Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.* II; 9_2, 1895, 1—8.

7) *Mathematisch-historische Miscellen.* I. *Noch einmal über den* De la Hire *zugeschriebenen Lehrsatz;* 9_2, 1895, S. 33—34. II. *Weiteres über das Josephspiel;* 9_2, 1895, S. 34—36. III. *Der Algorismus des* Sacrobosco; 9_2, 1895, S. 36—37. IV. *Zur Zahlentheorie im XV. Jahrhundert;* 9_2, 1895, S. 37—39. V. *Zur Geschichte der vollkommenen Zahlen;* 9_2, 1895, 39—42. VI. *Arithmetische Scherzaufgaben aus dem XIV. Jahrhundert;* 9_2, 1895, 77—88. VII. *War* Johannes de Lineriis *ein Deutscher, ein Italiener oder ein Franzose?;* 9_2, 1895, S. 105—106. VIII. *Über den* Dominicus Parisiensis *der „Geometria Culmensis";* 9_2, 1895, S. 107—110. IX. *Alte Scherzaufgaben in deutscher Sprache;* 9_2, 1895, 110—113. X. *Zur Geschichte der Progressionen im Mittelalter;* 9_2, 1895, 113—114.

8) *Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter;* 10_2, 1896, S. 1—3.

9) *Über* Johann von Gemunden; 10_2, 1896, S. 4.

10) *Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im XIV. Jahrhundert;* 10_2, 1896, S. 43—49.

11) *Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente;* 10_2, 1896. S. 65—72.

12) *Antwort auf die Anfrage 69;* 12_2, 1898, S. 95—96.

13) *Die Abhandlung des* Levi ben Gerson *über Trigonometrie und den Jakobsstab;* 12_2, 1898, S. 97—112.

14) *Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter.* I. *Das Buch* Euklids *de gravi et levi;* 1_3, 1900, S. 51—54. II. *Der Tractatus de fractionibus et reflexionibus radiorum des* Robertus Linconiensis; 1_3, 1900, S. 54—59.

15) *Zum siebenzigsten Geburtstage* Moritz Cantors; 1_3, 1900, S. 227—231.

16) *Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter.* I. *Aus dem „Liber embadorum" des* Savasorda *in der Übersetzung des* Plato von Tivoli; 1_3, 1900, S. 321—337. II. *Aus den „Canones sive regule super tabulas Toletanas des* Al-Zarkali"; 1_3, 1900, S. 337—347. III. *Aus den „Scripta* Marsiliensis *super Canones* Azarchelis; 1_3, 1900, S. 347—353. IV. *Anonyme Abhandlung über Trigonometrie aus dem Ende des XIII. Jahrhunderts;* 1_3, 1900, S. 353—372. V. *Aus „*Leo de Balneolis *Israhelita de sinibus, chordis et arcubus, item instrumento revelatore secretorum";* 1_3, 1900, S. 372—380. VI. *Anonyme Abhandlung „De tribus notis";* 1_3, 1900, S. 380—390. VII. *Die „Canones Tabularum primi mobilis" des* Johannes de Lineriis; 1_3, 1900, S. 390—413. VIII. *Die Sinusrechnung des* Johannes de Muris; 1_3, 1900, S. 413—416.

17) *Über den Ursprung der Benennung „Radius" für Halbmesser;* 1_3, 1900, S. 516.

18) *Zur Geschichte der Kreismessung und Kreisteilung im XV. Jahrhundert;* 2_3, 1901, S. 41—57.[1])

XIV. Himmel und Erde.

1) Nicolaus Coppernicus; 11, 1899, S. 193—208, 260—278, 315—321, 362—375, 415—422. Auch separat, Berlin 1899, Veröffentlichungen der „Urania" (Heft 54); 84 S. 8⁰.

2) *Die Dunkelkammer. Eine Untersuchung über die Vorgeschichte derselben;* 13, 1901, S. 225—236.

1) Von der „Bibliotheca Mathematica" Abschied nehmend, sei von uns noch bemerkt, daß sich auch Curtze an dem von dem Herausgeber eingerichteten Sprechsaale, der Cantors „Vorlesungen" gewidmet ist, eifrig beteiligt hat.

XV. Altpreußische Monatsschrift.

1) *Über Domenico Maria Novara da Ferrara, den Lehrer des Copernicus in Bologna;* 6, 1869, S. 735—743. Auch separat (als gedruckter Vortrag) erschienen, Thorn 1869.

2) *Berichtigung dazu;* 7, 1870, S. 253—256.

3) *Über einige bis jetzt unbekannte gedruckte Schriften des Domenico Maria Novara da Ferrara;* 7, 1870, S. 515—521.

4) *Weitere Notizen über bis jetzt unbekannte gedruckte Schriften des Domenico Maria Novara da Ferrara;* 7, 1870, S. 726—727.

5) *Über eine neue Copernicus-Handschrift, nach einem Briefe des Direktors Dr. O. v. Struve in Pulkowa mitgeteilt;* 10, 1873, S. 155—162. Auch separat, Berlin 1872. S. Calvary & Co.

6) *Über ein Exemplar der Ephemeriden des Joannes Stoeffler von 1531 mit angeblichen Noten von des Copernicus Hand;* 11, 1874, S. 278—279.

7) *Die Vorläufer des Copernicus im Altertum; nach dem Italienischen von G. Schiaparelli;* 13, 1876, S. 1—46, 97—128, 193—221. Auch separat; s. o. unter III.

8) *Zur Biographie des Rheticus;* 31, 1894, S. 491—496.

9) *Eine Studienreise, unternommen August bis Oktober 1896;* 35, 1898, S. 435—455.

XVI. Zentralblatt für Bibliothekswissenschaft.

1) *Eine Studienreise;* 16, 1899, S. 257—306.

XVII. Neuer Anzeiger für Bibliographie und Bibliothekswissenschaft (von Petzholdt).

1) *Schreiben an den Herausgeber;* Jahrgang 1874, S. 367—368. (Bezieht sich auf Metzgers „*Bibliotheca historico-naturalis*".)

2) *Nachträge und Berichtigungen zu Wellers Repertorium typographicum* (Nördlingen, Beck 1864) *nebst Supplement;* Jahrgang 1875, S. 56—66, S. 89—99.

3) *Schreiben an den Herausgeber;* Jahrgang 1875, S. 215. (Bezieht sich auf ein der Thorner Gymnasialbibliothek angehöriges Exemplar der ehemaligen Corvina in Ofen.)

XVIII. Jahresbericht über die Fortschritte der klassischen Altertumswissenschaft.

Die inbetreff der antiken Wissenschaften im Altertum während der Zeit vom Oktober 1879 bis Schluß 1882 erschienenen Werke, Schriften und Abhandlungen; 40, 1884. 50 S.

XIX. Mitteilungen des Coppernicus-Vereines für Wissenschaft und Kunst zu Thorn.

1) *Inedita Coppernicana, aus den Handschriften zu Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien herausgegeben;* 1, 1878. 73 S. 8⁰. (Siehe oben IV.)

2) *Der Aufenthalt des Coppernicus in Bologna. Von K. Malagola. Deutsch.* 2:2, 1880.

3) *Die Hochschule Padua zur Zeit des Coppernicus, aus dem Italienischen von A. Favaro übersetzt;* 3, 1881. 60 S. 8⁰.

4) *Ergänzungen zu den „Inedita Coppernicana" im 1. Hefte;* 4, 1882. 9 S. 8⁰.

5) *Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri V;* 6, 1887. XV + 50 S. 8⁰.

Separat[1]): *Neue Copernicana aus Upsala; Vortrag, gehalten im Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn am 4. Juni 1877.*[2])

1) Damals gab der Verein noch keine Gesellschaftsschriften heraus.

2) Nicht bekannt ist dem Verf., ob auch als gesonderte Vorträge etwa zuerst in Zeitungen publiziert und etwa nachher dem Buchhandel übergeben worden sind die drei Stücke, die er nur aus einer Erwähnung Curtzes (Leopoldina 16, 1880, S. 117 ff.) kennt. Die Titel sind:

1. *Das Porträt des Copernicus in den Uffizien von Florenz.*
2. *Über den Wert alter Dokumente, den Nutzen und Genuß, den sie gewähren.*

Über die Aufgaben einer mathematischen Zentralbibliothek.

Von G. Eneström in Stockholm.

Unter den aktnellen Fragen mathematisch-literarischer Natur gibt es wohl keine, die ein größeres Interesse beanspruchen kann, als die folgende: „Welche Maßregeln sollen ergriffen werden, um den Forschern auf dem Gebiete der Mathematik die Resultate der bisherigen Untersuchungen leicht zugänglich zu machen?“ Ohne Zweifel ist schon sehr viel getan worden um diese Frage bis zu einem gewissen Grade zu erledigen, z. B. durch die Begründung des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik und die zahlreichen in den letzten Jahren erschienenen Berichte über den gegenwärtigen Stand gewisser Theorien. Auf der anderen Seite ist es klar, daß der Spezialist sich im allgemeinen nicht mit kürzeren Referaten über die Errungenschaften auf einem besonderen Gebiete begnügen kann, sondern von den Originalabhandlungen selbst Kenntnis nehmen muß, und für jedes Jahr wächst die Anzahl der Sammelschriften, wo mathematische Abhandlungen zu suchen sind, so daß nunmehr auch die großen Bibliotheken darauf verzichten müssen, den Forschern eine wenigstens annäherungsweise vollständige Sammlung dieser Schriften zu bieten. Daß die größeren Bibliotheken eines gewissen Landes eine Vereinbarung treffen könnten, um zusammen die neuerschienene Literatur vollständig anzuschaffen, ist natürlich an sich möglich, aber praktisch genommen kaum durchführbar, weil die wichtigeren mathematischen Zeitschriften nirgends fehlen dürfen, und viele Bibliotheken auf den Ankauf der mathematischen Literatur nur wenig Geld spenden können. Jedenfalls wäre es ein Gewinn, wenn die Bibliotheken bei der Anschaffung von Zeitschriften oder Gesellschaftsschriften darauf Rücksicht nehmen wollten, ob diese Schriften sich in einer anderen Bibliothek desselben Landes befinden oder nicht, und in erster Linie die anderswo nicht vorhandenen Schriften ankauften. Könnte man dazu noch für jedes Land einen mathematischen Gesamtkatalog bekommen

mit Angabe der Bibliotheken, in denen die Schriften zn finden sind[1]), so würde dies den Mathematikern sicherlich nützlich sein.

Einen noch größeren Schritt zur Beseitigung der Übelstände, die die Schwerzugänglichkeit vieler wichtiger mathematischer Schriften mit sich führt, wäre es meiner Ansicht nach, wenn eine mathematische Zentralbibliothek zustande kommen könnte. Bekanntlich hat Herr F. Klein auf der letzten Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung den Plan der Begründung einer solchen Bibliothek angeregt, nnd zur Erörterung des Planes wnrde eine Kommission gewählt, die der nächsten Generalversammlung einen Bericht vorlegen soll. Könnte man daran denken, schon von Anfang an für diese Bibliothek so viel Geld zu bekommen, daß es möglich wäre, fast die ganze neuerschienene mathematische Literatur anzukanfen, würde es unnötig sein, die große Bedeutnng derselben hervorzuheben. Aber auch wenn man anfangs nur sehr bescheidene Geldmittel znr Verfügung hätte, wäre der Nutzen einer solchen Bibliothek gewiß nicht nnerheblich. Schon ihr Vorhandensein würde sehr viele Verfasser und wahrscheinlich einige Verleger dazu veranlassen, ihr Geschenke von mathematischen Schriften zugehen zn lassen[2]), und durch geeignete Gelegenheitskäufe würde man recht bald das nnentgeltlich Bekommene zu einer sehr wertvollen Sammlung von Sonderabzügen ergänzen können; je vollständiger diese Sammlnng werden würde, nm so mehr würde die Anfmerksamkeit der Fachgenossen auf ihren Nutzen gelenkt werden, nnd nm so mehr müßten dadurch die Mathematiker geneigt werden, sie noch weiter zn vervollständigen. Anf diese Weise könnte wenig Geld genügen um einen Erfolg zu erzielen, der ohne die Begründnng einer mathematischen Zentralbibliothek undenkbar wäre.

Ich füge hinzu, daß es nicht meine Meinung ist, daß die Benutzung der Bibliothek nur an Ort und Stelle erfolgen sollte, sondern ich setze voraus,

1) Bekanntlich gibt es für die astronomische und meteorologische Literatur in Belgien einen solchen Katalog von J. C. Houzeau (*Catalogue des ouvrages d'astronomie et de météorologie qui se trouvent dans les principales bibliothèques de la Belgique*, Bruxelles 1878, XXXIII + 643 S. 8°). Für Württemberg hat E. Wölffing die vorhandene mathematische Zeitschriftenliteratur verzeichnet (*Verzeichnis der Zeitschriften für die Gebiete der Mathematik, der Physik, der Technik und der verwandten Wissenschaften, welche auf württembergischen Bibliotheken vorhanden sind*, Stuttgart 1899, 17 S. 8°). — Für Preußen ist die Bearbeitung eines Gesamtkataloges der Bücherbestände der kgl. Bibliothek zn Berlin und aller preußischen Universitätsbibliotheken in Angriff genommen.

2) In dem Jahresberichte 1899 der Schweizerischen Landesbibliothek (Bern 1900, S. 12—13), wird bemerkt, daß die Anzahl der Geschenke schon von Anfang an das Mehrfache des ganzen Jahreszuwachses, auf den man gerechnet hatte, betrugen.

daß die Bücher an jeden wirklichen Forscher ausgeliehen und wenn nötig mit der Post verschickt werden würden.

Unabhängig von dem Nutzen, den die Zentralbibliothek auf Grund ihres eigenen Bücherbestandes mit sich führte, würde sie auch mittelbar seltene mathematische Werke leichter zugänglich machen können, teils dadurch, daß sie die größeren Bibliotheken auf das Vorhandensein bedauerlicher Lücken ihrer mathematischen Abteilungen aufmerksam machte, und dieselben zur Erfüllung dieser Lücken aufforderte, teils dadurch, daß sie zu der oben als wünschenswert angegebenen Vereinbarung der größeren Bibliotheken anregte.

Aber es gibt noch andere Aufgaben, deren Erledigung mit der Leitung einer mathematischen Zentralbibliothek zweckmäßig verbunden werden kann. In der Tat wird das Bedürfnis nach einer Zentralstelle für mathematisch-bibliographische und literarische Unternehmungen um so fühlbarer, je mehr die mathematische Literatur anschwillt, und wie könnte man besser eine solche Zentralstelle begründen, als im Anschluß an eine Zentralbibliothek? Vielleicht bekomme ich später Gelegenheit, die soeben angeregte Frage ausführlicher zu behandeln; hier werde ich nur kurz auf einige Aufgaben mathematisch-literarischer Art hinweisen, die in nächstem Zusammenhang mit der Leitung einer großen mathematischen Fach-Bibliothek stehen.

In erster Linie dürfte dabei das Erteilen von bibliographischen Auskünften über mathematische Schriften zu nennen sein. Bekanntlich sind nicht selten die bibliographischen Verweise, die sich in mathematischen Schriften finden, unvollständig oder ungenau, am meisten natürlich, wenn sie aus zweiter oder dritter Hand stammen, und auch dem besonders Sachkundigen ist es zuweilen schwer zu bestimmen, auf welche Schriften solche Verweise sich beziehen. Auf der anderen Seite kann man auf zwei oder mehrere Schriften eines Verfassers mit genau demselben Titel verwiesen werden, und ohne die Schriften selbst zur Verfügung zu haben ist es nicht möglich zu entscheiden, ob es sich um eine und dieselbe Schrift handelt.[1] In diesen und ähnlichen Fällen würde es dem Forscher viele Mühe ersparen, wenn er sich an eine bestimmte Stelle wenden könnte, um sachkundige Auskunft zu bekommen.

Eine andere Aufgabe, die ebenfalls für eine mathematische Zentralbibliothek paßt, ist die Herausgabe einer mathematischen Jahresbiblio-

1) Es ist vom bibliographischen Gesichtspunkte aus sehr zu bedauern, daß schon veröffentlichte mathematische Abhandlungen zuweilen neu abgedruckt werden, ohne daß dabei auch nur angedeutet wird, daß sie früher anderswo erschienen sind. In einigen Fällen beruht dies vielleicht darauf, daß der Verfasser selbst die Abhandlung etwa gleichzeitig an zwei verschiedene Zeitschriften gesandt hat; zuweilen liegt die Schuld absichtlich oder unabsichtlich an dem Herausgeber der Zeitschrift.

graphie, oder noch besser eines halbmonatlichen Literaturverzeichnisses, das am Ende des Jahres in eine Jahresbibliographie zusammengearbeitet wird. Bekanntlich gehört die Bearbeitung einer ähnlichen Bibliographie den Aufgaben gewisser Landesbibliotheken an.

Ist der Leiter der mathematischen Zentralbibliothek ein energischer Mann, wird es ihm nicht schwer sein, eine ganze Reihe von Aufgaben aufzufinden, zu deren Erledigung er durch seine Berufsstellung besonders geeignet ist; in Bezug hierauf verweise ich nur auf meinen Aufsatz: *Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften* (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 7).

Es ist also meines Erachtens sehr wünschenswert, daß der von Herrn F. KLEIN angeregte Plan der Begründung einer mathematischen Zentralbibliothek nicht allzu lange im Stadium der Beratungen und Diskussionen steckt, sondern recht bald zum Ziele geführt wird. Die Hauptfrage ist natürlich: wie sollen die nötigen Geldmittel herbeigeschafft werden? Ist aber diese Frage befriedigend erledigt, dürfte es ziemlich leicht sein, in betreff der Einzelheiten der Ausführung des Planes zu einer Einigung zu gelangen.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik."

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1:15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1:190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1:197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$. 1902, S 138. — **1:437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 143. — **1:641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144. — **1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 449—500. — **1:749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:855**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502: $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **1:31**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:70**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2:97**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:98**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:101**. siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:105**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:111**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:116**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:122**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2:126, 127**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:128**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:132**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:157, 158**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:163, 166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:210, 219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2:253**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2:273**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2:274**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:282, 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2:313**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2:328**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:334, 353**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507.

2:353. De l'examen de certains calculs, CANTOR a dédnit que CHUQUET élevait un binome au cube par deux multiplications successives et non par application de la formule du binome. Cette déduction est explicitement confirmée par le texte suivant du *Triparty* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, 725): „Il conuient pour le premier reduire $\cdot 4 \cdot \tilde{p} \cdot$ ℞$^2 \cdot 6 \cdot$ a racine tierce en le multipliant tiercement cestassauoir premierement en soy monte $\cdot 22 \cdot \tilde{p} \cdot$ ℞$^2 \cdot 384 \cdot$ que lon doit encores multiplier par $\cdot 4 \cdot$ plus ℞$^2 \cdot 6 \cdot$ monte $\cdot 136 \cdot \tilde{p} \cdot$ ℞$^2 \cdot 6144 \cdot \tilde{p} \cdot$ ℞$^2 \cdot 2904 \cdot$ . . . . qui abreuiee . . . monte ℞$^3 \cdot$ $\underline{136 \cdot \tilde{p} \cdot}$ ℞$^2 \cdot 17496.$"
CH. LAMNO.

2:358. „Ceste raison ne conclut riens"; cette façon de parler traduirait également l'impossibilité ou l'indétermination de l'équation. La citation doit être complétée ainsi: "Ceste raison ne conclut riens neccessairement". Les mots: „neccessaire", „neccessairement" reviennent comme des termes consacrés, sous la plume de CHUQUET, chaque fois qu'il rencontre une *indétermination* (cfr. *Triparty*, p. 648, 649, 750, etc.).
CH. LAMBO.

2:360. A propos d'imaginaires, on peut signaler l'exercice suivant (*Triparty*, p. 735), où CHUQUET s'est heurté précisément au radical $\sqrt{-1}$; la solution n'est correcte que grâce à une double erreur de calcul: „Partir ℞$^2 \cdot$ ℞$^2 \cdot 48 \cdot \tilde{m} \cdot 2 \cdot$ par ℞$^2 \cdot$ ℞$^2 \cdot 3 \cdot \tilde{p} \cdot 2.$" Voici la solution, en notations modernes; je reproduis les fautes:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{48}-2}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{48}-2}\,\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}\,\sqrt{\sqrt{3}-2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{144}-\sqrt{12}-\sqrt{192}+4}}{-\sqrt{1}}$$
$$= \sqrt{-\sqrt{144}+\sqrt{12}+\sqrt{192}-4} = \sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{192}-16}.$$

Louvain. CH. LAMBO.

2:381, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2:385**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81. — **2:386, 395, 401, 405, 425**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2:430**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2:442**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:449, 474, 480**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2:481, 482**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2:482**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2:484**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490, 497**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

2:497. Die Bemerkung: „Als er [TARTAGLIA] . . . sein Testament machte, wird in diesem amtlichen Aktenstücke als Familiennamen Fontana angegeben" dürfte nicht ganz korrekt sein. Im Testamente kommt der Name des TARTAGLIA zweimal vor, nämlich am Anfange unter der Form „Nicolo Tartaia" und am Ende unter der Form: „Nicolaus Tartalea". Dagegen wird seinem Bruder GIAMPIETRO dreimal der Zuname FONTANA beigelegt, und daraus *kann* man ja folgern, daß TARTAGLIAS Familienname FONTANA war. Auf der anderen Seite ist es sehr wohl möglich, daß GIAMPIETRO allein diesen Namen angenommen hatte (vgl. A. FAVARO, *Intorno al testamento di NICCOLÒ TARTAGLIA*, Rivista dell' accad. d. sc. di Padova **32**, 1882, S. 96—100). G. ENESTRÖM.

2: 509, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2**: 510, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2**: 512, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**: 514, 516, 517, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2**: 530, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**: 532, 535, 541, 548, 549, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2**: 550, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2**: 554, 569, 572, 573, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2**: 572, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**: 576, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2**: 579, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2**: 582, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2**: 583, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2**: 592, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2**: 594, 597, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2**: 597, 599—600, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2**: 602, 603—604, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2**: 611, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2**: 612, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2**: 613, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901. S. 357. — **2**: 614, 620, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2**: 621, 623, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2**: 638, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2**: 642, 643, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2**: 655, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2**: 659, 660, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2**: 665, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271.

---

2 : 674. Die Notiz, daß Ph. de Lahire „schon 1671 ein hedeutendes Werk üher Kegelschnitte im Drucke herausgegeben hatte", dürfte auf einem Mißverständnisse der folgenden Bemerkung von Chasles (*Geschichte des Geometrie, übertr. durch* L. A. Sohnke, Halle 1839, S. 117) heruhen: „Auch ist es noch billig, den Zeitgenossen De La Hire's, Guarini, anzuführen, welcher 1671 ein Werk über die Kegelschnitte herausgab." Diese Bemerkung hezieht sich auf das Buch Guarinis: *Euclides adauctus et methodicus, mathematicusque universalis* (Turin 1671); daß auch Lahire in demselhen Jahre 1671 ein Werk üher Kegelschnitte veröffentlichte, ist hisher unbekannt, und Cantor selhst hat im 3. Bande der *Vorlesungen* (S. 125) kein solches Werk zu erwähnen.

G. Eneström.

2: 683, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2**: 700, 701, 703, 704, 705, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2**: 719, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2**: 721, 742, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**: 742, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2**: 746, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**: 747, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225.

---

2 : 749. Von der Methode der vollständigen Induktion hat schon Maurolico in seiner Arithmetik (1575) Gehrauch gemacht (siehe M. Cantor, Zeitschr. für mathem. Unterr. **33**, 1902, S. 536).

2: 766, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2**: 767, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2**: 772, 775, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2**: 777, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2**: 783, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359.

---

2 : 783. In Bezug auf den Cantorschen Bericht über die Schriften von Frenicle de Bessy, hat schon Herr Vacca (BM 2_3, 1901, S. 359) bemerkt, daß derselbe nicht alles enthält, was zu erfahren von Interesse ist. Unserer Ansicht nach hat Herr Cantor eben das Interessanteste bei Frenicle de Bessy übergangen, nämlich daß in der Schrift *Traité des triangles rectangles en nombres* (Paris 1676) ein Beweis des Satzes, daß die Gleichung $a^2 = b^4 + c^4$ in ganzen Zahlen unmöglich ist (siehe Mém. Paris 1666—1699, t. V [Paris 1729], S. 178: „un quarré ne peut être la somme de deux quarrez quarrez") sich findet; aus diesem Satze folgt ja unmittelbar der wichtige Satz, daß die Summe der Biquadrate zweier ganzer Zahlen kein Biquadrat einer ganzen

Zahl sein kann. Daß bei FRENICLE der erste vollständige Beweis des fraglichen Satzes sich findet, hat schon EULER (*Theorematum quorumdam arithmeticorum demonstrationes;* Comment. acad. Petrop. **10**, 1738 [gedruckt 1747], S. 125—126) anerkannt, obgleich dieser den Beweis als so verwickelt bezeichnet, „ut nisi summa attentio adhibeatur, vix perspicue intelligi possit". Auf der anderen Seite hat G. WERTHEIM vor einigen Jahren gezeigt (*Ein von FERMAT herrührender Beweis;* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899, Hist. Abt. S. 4—7), daß FRENICLES Beweis zwar etwas weitschweifig ist, aber im Grunde mit dem von EULER selbst an der zitierten Stelle gegebenen identisch ist, und daß FRENICLE sich ohne Zweifel einer ihm von FERMAT mitgeteilten Methode bedient hat.

Die hervorgehobene Unvollständigkeit des CANTORschen Berichtes ist um so mehr zu bedauern, weil dadurch die geläufige Ansicht, der erste uns aufbewahrte wirkliche Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ in ganzen Zahlen rühre von EULER her, befestigt worden ist (siehe z. B. L. KRONECKER, *Vorlesungen über Zahlentheorie* I, Leipzig 1901, S. 23; P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie* I, Leipzig 1902, S. 10; J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 306). G. ENESTRÖM.

2:784, 820, 825, 840, 856, 865, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2**:876, 878, 879, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2**:891, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**:901, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2**:VIII (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2**:IX, X (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3**:10, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 518. — **3**:12, 17, 22, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3**:26, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3**:45—48, 49, 50, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3**:70, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3**:100, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3**:116, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3**:117, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3**:123, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3**:124, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408. — **3**:151, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3**:174, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3**:183, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3**:188, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3**:201, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900. S. 513. — **3**:207, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3**:215, siehe BM $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 150. — **3**:218, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 513. — **3**:220, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3**:224, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3**:225, 228, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3**:232, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3**:246, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 151. — **3**:250, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3**:303, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3**:330—331, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3**:447, 455, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3**:473, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155. — **3**:477, 479, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3**:521, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3**:565, 571, 578, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327.

3:614. Dem Berichte über den EULERschen Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ in ganzen Zahlen wäre es vielleicht angebracht hinzuzufügen, daß EULER spätestens im Jahre 1753 den Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ fand. In seinem Briefe an GOLDBACH vom 4. August 1753 schreibt er nämlich: „Ich habe nun Demonstrationen gefunden, daß $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet" (FUSS, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle*, I [1843], S. 618). Etwa zwei Jahre später bestätigte EULER in einem anderen Briefe an GOLDBACH seine Entdeckung (FUSS, a. a. O. I, S. 623). Zwar hat EULER seinen Beweis nicht vor dem Jahre 1759 veröffentlicht, aber

schon der Umstand, daß er in dem von Herrn Cantor behandelten Zeitabschnitte einen Beweis gefunden hatte, scheint uns erwähnenswert zu sein.

G. Eneström.

3 : 636—637, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 441. — **3** : 652, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 446. — **3** : 660, 667, 689, 695, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 441—442. — **3** : 750, 758, 760, 766, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 446—447. — **3** : 774, 798, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 442—443. — **3** : 845, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 447. — **3** : 845, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3** : 848, 881, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 443. — **3** : 882, siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 447. — **3** : 892, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3** : IV (Vorwort), siehe BM $\mathfrak{Z}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

105. Ist Johannes Widman Verfasser der „Dresdener Algebra"? In seiner Abhandlung *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert* (Zwickau 1887) hat Wappler aus dem Cod. Dresd. C 80 eine anonyme Algebra in lateinischer Sprache veröffentlicht, die einst im Besitz des Johannes Widman war, und Wappler hat auch darauf hingewiesen, daß diese Algebra ohne Zweifel die Unterlage für die von Widman über Algebra gehaltene Vorlesung bildete. Mit Bezugnahme hierauf hat Curtze später bemerkt (*Eine Studienreise*; Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 289—290), daß Cod. Lips. 1470, der sich sofort als ein Kollegienheft kennzeichnet und aus dessen Schlußzeilen hervorgeht, daß er eine im Jahre 1486 von Widman gehaltene Vorlesung enthält, mit der von Wappler herausgegebenen anonymen Algebra identisch ist. Unter solchen Umständen liegt natürlich die Annahme sehr nahe, daß Widman selbst Verfasser der Dresdener Algebra ist, und in der Tat hat sich Paul Tannery (L'interméd. d. mathém. **9**, 1902, S. 300) dieser Annahme angeschlossen. Nun kommen bekanntlich in der Algebra die Zeichen + und — vor, die bisher in keiner älteren Schrift aufgefunden worden sind, sodaß man veranlaßt werden könnte, wenigstens vorläufig Widman als Erfinder dieser Zeichen anzunehmen. Auf der anderen Seite hat Wappler im Jahre 1900 (*Zur Geschichte der Mathematik*; Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900, Hist. Abt. S. 7) die Angabe von Curtze dahin berichtigt, daß das Kollegienheft im Cod. Lips. 1470 *ein Auszug* aus der „Dresdener Algebra" ist, und dann ist es ja sehr wohl möglich, daß diese Algebra von einem älteren Mathematiker herrührt, dem also die Erfindung oder wenigstens die erste bekannte Benutzung der Zeichen + und — zuzuschreiben wäre. Die Frage vom Verfasser der „Dresdener Algebra" ist also für die Geschichte der mathematischen Zeichensprache von einem gewissen Interesse.

Ist es möglich zu entscheiden, ob Widman wirklich der Verfasser der fraglichen Algebra ist?

G. Eneström.

106. Sur les „Theses de cometis" (1619) de Grégoire de Saint-Vincent. Grégoire de Saint-Vincent fit imprimer en 1619 des *Theses de cometis*; Erycius Puteanus les a eues en maine, et les documents manuscrits conservés aux Archives générales du royaume à Bruxelles mettent d'ailleurs le fait hors de doute. Pour connaître les idées de Grégoire en astronomie, il serait utile d'en retrouver l'un ou l'autre exemplaire. Peut-on m'en signaler quelques-uns?

H. Bosmans.

107. Über die Geschichte der Terme Binom, Polynom usw. Seit dem 12. Jahrhundert ist das Wort „binomium" als mathematischer Term angewandt worden (vgl. z. B. Anaritius, *In libros elementorum Euclidis Commentarii*, ed. Curtze, S. 331; Leonardo Pisano, *Opere*, ed. Boncompagni I, S. 357), aber lange Zeit nur als lateinische Übersetzung des Euklidischen Ausdrucks „ἐκ δύο ὀνομάτων", also für Binome von der Form $a + \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Noch um die Mitte des 17. Jahrhunderts behielt das Wort „binomium" diese spezielle Bedeutung, und was wir jetzt Binom nennen, hieß dann oft „quantitas composita". Erst gegen das Ende des 17. Jahrhunderts scheint das Wort als Benennung für $a + b$ zur Anwendung gekommen zu sein, und um dieselbe Zeit erscheinen auch die Terme Monom (eine recht sonderbare Abkürzung für Mononom!), Trinom und Polynom (man hatte wohl bei Binom unrichtig an νόμος gedacht) oder Multinom (vgl. Ozanam, *Dictionaire mathématique* [1691], S. 63—64). Im 18. Jahrhundert findet sich auch das Wort Infinitinom für unendliche Reihe.

Genauere literarische Angaben über das Auftreten dieser Bezeichnungen, denen in der höheren Analysis so wichtige Begriffe entsprechen, habe ich nicht finden können. Sie zu geben wäre eine dankenswerte Aufgabe.

Kiel. P. Stäckel.

Réponse à la question 104 sur John Wilson. Il n'y a pas de contradiction entre le titre „armiger" donné en 1770 à Wilson par Waring[1]) et le titre de „chevalier" conféré en 1786 à Wilson. Le titre d'„esquire" traduit en latin par „armiger", écuyer, fut constamment porté par Wilson, qui y avait droit comme propriétaire terrien, ayant hérité d'un petit domaine à Iroutheck dans le Westmoreland, et aussi comme officier de justice, élevé dès avant 1761 à la magistrature de „Judge of the Court of Common Pleas;" et ce titre d'esquire, lui permettait d'être appelé sir John Wilson, l'appellation „sir" n'étant pas encore réservée au chevalier („knight"). Quant au titre de noblesse „knight", en latin „eques," chevalier, il le reçut du roi le 15 novembre 1786. — Voyez la Biographie de Jean Wilson dans la Nouvelle correspondance mathématique 2, 1876, 110—114, biographie documentée, fournie par M. Glaisher (datée de Cambridge), en réponse à la demande d'informations sur Wilson, demande formulée par Catalan (ibid., p. 32, 33, 34). On trouvera là aussi une biographie du même Wilson par le géomètre Morgan (*A budget of paradoxes*, London 1872, p. 132—133), et un extrait de la liste des gradués en Mathématiques pour 1761 tirée du *Cambridge Calendar*, où Wilson figure comme bachelier parmi les „wranglers" et où son nom est suivi de l'indication: „sir John Wilson, formerly Judge of Common Pleas."

Louvain. B. Lefebvre.

[1]) En réponse au désir de M. Cantor, voici d'après l'édition originale, 1770, des *Meditationes algebraicae* de Waring les mots consacrés par Waring à Wilson dans la Préface: „Traditur postremò proprietas maxime elegans primorum numerorum, ab amicissimo et in omni Matheseos parte versatissimo viro Joanne Wilson, Armigero, atque mihi communicata (sic)." A la page 218 de cette première édition (1770), le théorème de Wilson est accompagné de ces mots: „Hanc . . . proprietatem invenit Vir clarissimus rerumque mathematicarum peritissimus Joannes Wilson, Armiger."



Rezensionen.

J. Versluys. Beknopte geschiedenis der wiskunde. Amsterdam, A. Versluys 1902. 8⁰, 208 S. — Fl. 2.50.

Bei der Bearbeitung dieses Buches hat der Verfasser, wie er im Vorworte angibt, in erster Linie die Cantorschen *Vorlesungen* benutzt (leider scheint ihm nur die *erste* Auflage zugänglich gewesen zu sein), aber auch andere Arbeiten, von denen die meisten als zuverlässig bezeichnet werden können, zu Rate gezogen; ein wenig auffallend ist es, daß in der Liste dieser Arbeiten K. Kehrbach als Verfasser der bekannten Güntherschen *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* aufgeführt wird. Das Buch hat zehn Abteilungen, nämlich: 1. Semitische Völker. — 2. Griechen. — 3. Römer. — 4. Inder. — 5. Araber. — 6. Christliches Mittelalter. — 7. Renaissance. — 8. Siebzehntes Jahrhundert. — 9. Achtzehntes Jahrhundert. — 10. Neunzehntes Jahrhundert. Innerhalb der einzelnen Abteilungen wird die Geschichte der Mathematik entweder chronologisch oder systematisch oder nach Ländern behandelt, wobei den holländischen Mathematikern besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird. Am Ende folgt ein Sach- und Namenregister.

Daß der Verfasser kein grosses Gewicht auf eine methodische Gliederung der Darstellung gelegt hat, dürfte aus der Anordnung der 9. Abteilung (Achtzehntes Jahrhundert) hervorgehen, deren Unterabteilungen folgende Überschriften haben: Allgemeine Bemerkungen. — England. — Nederland. — Deutschland. — Die Bernoullis. — Euler. — Andere schweizerische Mathematiker. — Lagrange. — Frankreich. Wir stehen darum von einer Kritik des Planes seines Buches ab, und begnügen uns damit, etwas über die Einzelheiten hinzuzufügen.

Wie wir oben erwähnten, können die meisten der von Herrn Versluys benutzten Arbeiten als zuverlässig bezeichnet werden; seine Angaben sind also im allgemeinen richtig. Nur ausnahmsweise kommen solche grobe Fehler vor, wie die zwei auf Seite 79, wo er durch die Cajorische *History of mathematics* verleitet worden ist den arabischen Mathematiker Alkarchi unter dem Namen „Fahri des (!!) Alkarhi“ anzuführen, und die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^{\frac{2n+1}{3}}$$

anzugeben. Allerdings hat Cajori selbst in der zweiten Auflage seiner Arbeit den ersten Fehler verbessert, und der zweite Fehler ist bei Cajori gewiß nur ein Druckfehler, den jeder Leser selbst ohne weiteres berichtigen könnte. — Auf der anderen Seite kommen hie und da kleinere Ungenauigkeiten vor,

von denen einige darauf beruhen dürften, daß Herrn Versluys nur die erste Auflage der Cantorschen *Vorlesungen* zugänglich war. Von den übrigen bemerken wir nur folgende.

S. 83. Ob es richtig ist hervorzuheben, daß Abraham ibn Esra zur Verbreitung der arabischen Mathematik in Europa beigetragen hat? Bekanntlich war seine Arithmetik hebräisch geschrieben, und so weit bekannt ist, wurde sie nicht in die lateinische Sprache übersetzt. Auch die Bemerkung, daß darin indische Ziffern in Anwendung kamen, ist dahin zu modifizieren, daß Abraham ibn Esra sich zwar der Positionsarithmetik bediente, aber fast überall hebräische Buchstaben statt den indischen Ziffern benutzte (vgl. M. Silberberg, *Sefer ha-Mispar des Abraham ibn Esra*, Frankfurt a. M. 1895, S. 2).

S. 87. Daß Sacrobosco in Paris nicht nur Aritmethik, sondern auch Algebra gelesen hat, war uns unbekannt, und die Notiz scheint uns sehr verdächtig zu sein.

S. 93. Die Bemerkung: „het teeken voor *min* is het oudste" beruht vielleicht auf einer Verwechselung mit dem Term „minus". Soweit bekannt ist, kommen sowohl + als — zum ersten Mal in der „Dresdener Algebra" vor.

S. 155. Da Euler im Jahre 1783 starb, kann wohl der Passus: „het teeken *i* voor de imaginaire eenheid is ingevoerd door Euler in 1794" mit Recht beanstandet werden. Besser wäre es natürlich zu sagen, daß Euler das Zeichen in einer 1777 gelesenen, aber erst nach seinem Tode gedruckten Abhandlung benutzt hat.

S. 156, 159. Schon vor Lagrange hatte Euler die Unmöglichkeit der Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ in ganzen Zahlen bewiesen, und ein älterer, freilich sehr weitschweifiger, Beweis rührt von Frenicle de Bessy her (vergl. oben S. 89).

S. 174. J. R. Argand ist am 13. August 1822 gestorben (vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 145).

S. 198—199. Die zwei letzten Paragraphen (348, 349) widmet der Verfasser einer Übersicht über die Geschichte der Funktionentheorie im neunzehnten Jahrhundert. Nachdem einleitungsweise Lagrange behandelt worden ist (11 Zeilen), folgen 9 Zeilen über die Geschichte der elliptischen Funktionen, sowie über Legendre, Abel und Jacobi, dann noch 3 Zeilen über Gauss, Cauchy, Riemann und Weierstrass, womit § 348 beendet ist. Der ganze § 349 (16 Zeilen) beschäftigt sich mit Sophie Kowalevski (geb. 1850, nicht 1853 wie der Verfasser angibt) und schließt mit folgenden Worten: „Haar vroegtijdige dood heeft een kans verijdeld, dat er onder de wiskundigen van den eersten rang ook een vrouw kon genoemd worden". Die überaus kurze Abfertigung der Geschichte der modernen Funktionentheorie wollen wir nicht tadeln, da der Verfasser im Vorworte bemerkt hat, daß sein Buch hauptsächlich eine Geschichte der Elementarmathematik ist, aber vollständig irreleitend scheint es uns, daß Sophie Kowalevski so ausführlich behandelt wird, während Gauss, Cauchy und Riemann nur im Vorübergehen erwähnt werden. Auch die Schlußworte sind unserer Ansicht nach sehr unangebracht, denn wir halten es für durchaus unwahrscheinlich, daß Sophie Kowalevski, wenn ihr eine längere Lebenszeit zugeteilt gewesen wäre, hätte beanspruchen können, unter den Mathematikern ersten Ranges genannt zu werden (vgl. G. Loria *La trasfiguratione di una scienza. Donne matematiche*, 2ª ed., Mantova 1902, S. 51).

Von kleineren Ungenauigkeiten bemerken wir noch die folgenden. S. 88 (vgl. Register S. 205) steht „Robbio" statt Bobbio. S. 92, 93, 94, 115, steht

„Paciola“ statt Paciolo. S. 155 Z. 20 ist natürlich „Leibniz“ Schreibfehler für Euler. S. 181 steht „R. Sturm“ statt Ch. Sturm. — S. 182 ist bei Cayley das Todesjahr 1895 hinzuzufügen.

Stockholm. G. Eneström.

D. Gambioli. Breve sommario della storia delle matematiche colle due appendici sui matematici italiani e sui tre celebri problemi geometrici dell' antichità. Ad uso delle scuole secondarie. Bologna, Zanichelli 1902. 8⁰, (2) + 239 + (1) S. — Lire 3.

Jeder Versuch, mathematisch-historische Kenntnisse in weitere Kreise zu verbreiten, ist gewiß an sich lobenswert, und von einer Arbeit, die ausdrücklich für Schüler an den Gymnasien bestimmt ist, darf man natürlich nicht zu viel fordern. Aber in jedem Falle wäre es sehr wünschenswert, daß der Bearbeiter einer Geschichte der Elementarmathematik nicht kritiklos Quellen benutzte, die viele unrichtige Angaben enthalten. Leider trifft diese Anmerkung eben hier zu, denn das „Breve sommario“ des Herrn Gambioli ist zum größten Teil eine fast wörtliche Übersetzung des Ballschen *Primer of the history of mathematics* (London 1893); nur für das Ende des 18. Jahrhunderts und für das 19. Jahrhundert kommen wesentliche Abweichungen vor. Freilich nennt Herr Gambioli in seinem Vorwort vier Quellen (von welchen drei Herrn Ball zum Verfasser haben), aber zwei derselben sind eigentlich nur für die „Appendici“ benutzt worden, und das in erster Linie erwähnte Buch (*A short account of the history of mathematics* von Herrn Ball) scheint Herr Gambioli nur selten zu Rate gezogen zu haben. In der Tat hat er an vielen Stellen, wo die 3. Auflage des *Account* Verbesserungen gebracht hat, die Fehler des *Primer* reproduziert. So z. B. gibt er (S. 44) als Lebenszeit von Diofantos „circa 420“ an, obgleich Herr Ball diese ganz gewiß irrige Angabe (vgl. Biblioth. Mathem. 1896, S. 58) in der 3. Auflage des *Account* (S. 107) berichtigt hat. Ebenso hat Herr Gambioli (S. 88, 90) die unrichtigen, in der 3. Auflage des *Account* (S. 241, 244) *nicht* vorkommenden Angaben, daß Girard 1633 und Harriot 1620 gestorben sind, aufbewahrt. Auch die unsinnige Behauptung (S. 137), daß Jakob Bernoulli 1713 (d. h. 8 Jahre nach seinem Tode) „gettò i principî fondamentali del calcolo delle probabilità“ wird von Herrn Gambioli wiederholt, obgleich die 3. Auflage des *Account* (S. 377) eine verbesserte Redaktion dieses Passus enthält. Unter solchen Umständen ist es selbstverständlich, daß Herr Gambioli nie versucht hat, die Ballschen Angaben mit den Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* oder anderen wirklich zuverlässigen Arbeiten zu vergleichen. Für Herrn Gambioli ist Herr Ball offenbar eine Autorität auf dem Gebiete der mathematischen Geschichtsschreibung, und darum übersetzt er auch die Worte des *Primer* (S. 67) „The introduction ... of the decimal notation ... is also in my opinion due to Briggs“ auf folgende Weise (S. 90): „La introduzione ... della notazione decimale ... e pure dovuta, secondo l'opinione di qualche autorevole storico inglese, a Briggs“.

Da wir schon vor 7 Jahren (siehe Biblioth. Mathem. 1896, S. 55—63) den *Primer* ausführlich besprochen haben, scheint es uns unnötig hier auf die in der italienischen Übersetzung reproduzierten Fehler aufmerksam zu machen. Dagegen erlauben wir uns einige Bemerkungen inbetreff der von Herrn Gambioli angefertigten Übersetzung beizufügen.

Im allgemeinen scheint uns Herr GAMBIOLI den Sinn des Originals richtig wiedergegeben zu haben, aber zuweilen kommen Mißverständnisse oder unangebrachte Änderungen vor. S. 32 des *Primer* sagt Herr BALL mit Bezugnahme auf eine vollständig unbestätigte und von Fachmännern ziemlich allgemein als unrichtig bezeichnete Behauptung von HANKEL: „We know of DIOPHANTOS ... that most likely he was not Greek", welchen Passus Herr GAMBIOLI (S. 44) mit: „Di DIOFANTO si sa ... che non era di origine greca": übersetzt, eine Angabe die ganz gewiß falsch ist. — S. 91, Z. 16 steht „adoperata circa il 1685" während das *Primer* (S. 68) „used as late as 1685" hat, das entschieden besser ist. — S. 138 bekommt der Leser die Nachricht, daß JOHANN BERNOULLI u. a. „i principî per una geodesia" entdeckte; das *Primer* hat (S. 104): „the conditions for a geodesic", was natürlich „die Haupteigenschaft der kürzesten Linie auf einer Oberfläche" bedeutet.

Woher Herr GAMBIOLI folgende biographische Notiz (S. 142) über DANIEL BERNOULLI: „Chiamotovi da EULERO andò Pietroburgo nel 1724" entnommen hat, wissen wir nicht. Bekanntlich kam EULER zuerst 1727 nach St. Petersburg, und zwar durch die Vermittelung von DANIEL BERNOULLI. — Ebenso verdächtig dürfte die Notiz (S. 186) sein: „Lord KELVIN, meglio noto sotto il nome di Lord (!) THOMSON".

Etwas unangenehm berührt es den Leser, daß Herr GAMBIOLI zuweilen die englischen Übersetzungen von Büchertiteln beibehalten hat. So z. B. wird S. 93 eine Arbeit von STEVIN unter dem Titel „Statics and hydrostatics", S. 128 die NEWTONsche *Arithmetica universalis* unter dem Titel „Universal arithmetic", und S. 188 eine russische Zeitschrift unter dem Titel: „Messenger di (!) Kasan" zitiert (auf derselben Seite wird der Titel einer anderen russischen Zeitschrift in *deutscher* Sprache gegeben).

Die Personennamen, die in italienischen Arbeiten oft verdruckt sind, hat Herr GAMBIOLI im allgemeinen richtig angegeben; nur selten kommen solche Fehler wie „De-Grua" (S. 138), „Staund" (S. 160), „Reimann" (S. 192 zweimal) vor. Etwas häufiger erscheinen Druckfehler in Jahreszahlen, z. B. S. 149, Z. 8 „1711" statt 1771; S. 182, Z. 23 „1868" statt 1863; S. 201, Z. 16 „1896" statt 1897. — S. 136 findet sich die überraschende Angabe: „GIACOMO BERNOULLI nacque a Basilea nel 1687", welche nur auf dem unrichtigen Anbringen eines Komma beruht.

Wie im Titel des Buches angedeutet wird, finden sich darin zwei Anhänge, nämlich über einige italienische Mathematiker (von CAMPANO bis BELTRAMI) und über die drei berühmten geometrischen Probleme des Altertums.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen usw. aller Völker und Zeiten. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend) herausgegeben von **A. J. von Oettingen.** Lieferung 1—7. Leipzig, Barth 1902—1903. 8⁰, 504 S. Mark 21.

Die zwei ersten Bände von J. C. POGGENDORFFS *Biographisch-literarischem Handwörterbuch* (zusammen mehr als 1500 Seiten groß 8⁰) erschienen bekanntlich 1858—1863, und im „Vor- und Schlußwort" hat der Herausgeber den

Plan seiner Arbeit näher angegeben. Dieeem Plane gemäß, sollte sie in erster Linie kurze biographische Notizen (wo möglich über bekleidete Ämter und Stellungen, ungewöhnlichere Lebensmomente, eowie Zeit und Ort der Geburt und eventuell des Todes) über Verfasser auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften bringen, und sodann ihre hierher gehörenden Schriften verzeichnen. Dagegen war es nicht die Abeicht des Herausgebers ein vollständiges Bücherlexikon für die exakten Wissenschaften zu bieten, und darum wurden teils solche Verfasser ausgeschlossen, über welche nicht wenigstens einige der bezeichneten biographischen Notizen aufgefunden werden konnten, teils in gewissen Fällen, um unnötige Weitläufigkeit zu vermeiden, nicht alle Schriften der erwähnten Verfaseer verzeichnet; dennoch wurde immer Gewicht darauf gelegt, daß das Angeführte hinreichen könnte, um sich von der wissenschaftlichen Tätigkeit eines Mannes ein richtiges Bild zu entwerfen.

Nach dem Tode Poggendorffs (1877) wurde eine Fortsetzung des *Handwörterbuches* von Herrn B. W. Feddersen in Angriff genommen, und später 1896—1898 von Herrn A. J. von Oettingen ergänzt und herausgegeben. Diese als „Band III“ bezeichnete Fortsetzung umfaßte die Literatur der Jahre 1858—1883 und betrug allein etwa 1500 Druckseiten; bei der Bearbeitung derselben waren im allgemeinen die von Poggendorff aufgestellten Grundsätze maßgebend, so daß z. B. fast ausnahmeweise nur solche Verfasser aufgenommen wurden, für welche ausreichende biographieche Notizen erlangt werden konnten. Bei der Arbeit selbst wurde die Methode befolgt, zuerst die Titel aus den zugänglichen Gesellschafts- oder Zeitschriften zu exzerpieren, alsdann an die Verfasser oder eventuell an Fachgenossen Fragebogen zu versenden, auf welche biographische Daten und Literaturverzeichnisse erbeten wurden, und endlich das so erhaltene Material im Bedarfsfalle zu ergänzen.

Da der dritte Band des *Handwörterbuches*, wie erwähnt, nur die Literatur bis zum Jahre 1883 berücksichtigte, war es natürlich sehr erwünscht, sobald wie möglich eine neue Fortsetzung zu bekommen, eine solche wurde auch unmittelbar nach der Beendigung des dritten Bandes von Herrn A. J. von Oettingen in Angriff genommen, und von derselben liegen jetzt die 7 ersten Lieferungen vor. Plan und Arbeitsmethode sind dieselben wie bei dem dritten Bande gewesen.

Will man sich ein Urteil darüber bilden, in wie weit ee dem Herausgeber der neuen Fortsetzung gelungen ist, die von Poggendorff begonnene Arbeit befriedigend weiter zu führen, dürfte es angebracht eein, besonders zu untersuchen:

1) ob, so weit möglich, alle Personen aufgenommen worden sind, die der Benutzer des Werkee Veranlassung hat, hier zu suchen;

2) ob die biographischen Notizen, die gegeben werden eollen, so weit möglich vollständig eind;

3) ob die bibliographischen Angaben zuverlässig sind und in Bezug auf die Vollständigkeit dem Zweck des Werkes entsprechen.

Bei dieser Untersuchung, deren Resultat im Folgenden zusammengefaßt werden soll, habe ich mich fast ausschließlich auf solche Personen beschränkt, die auf dem Gebiete der reinen Mathematik tätig gewesen sind.

1.

Um zu entscheiden, welche Personen in das *Handwörterbuch* aufgenommen werden sollen, hat der Herausgeber in erster Linie teils die in den

drei ersten Bänden vorkommenden Verfasser berücksichtigt, teils eine große Anzahl von Gesellschafts- und Zeitschriften aus den Jahren 1883—1903 exzerpiert, die Abhandlungen aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften enthalten, und er hat dadurch eine vorläufige Verfasserliste bekommen, die er dann durch Streichungen oder Ergänzungen für seinen Zweck modifiziert hat. Streichungen von Namen sind natürlich nötig oder angebracht gewesen, entweder wenn es unmöglich war, die erwünschten biographischen Notizen zu bekommen, oder wenn es sich um Verfasser gehandelt hat, deren wissenschaftliche Wirksamkeit ziemlich unbedeutend gewesen ist. Auf der anderen Seite waren auch Ergänzungen nötig, sofern gewisse Verfasser nur selbständig erschienene Arbeiten veröffentlicht haben, und andere Verfasser ihre Abhandlungen in Schriften, die vom Herausgeber nicht exzerpiert worden sind, zum Abdruck gebracht haben.

Das soeben auseinandergesetzte Verfahren des Herausgebers ist natürlich an sich gut, da aber die von ihm veröffentlichte Liste der bis Dezember 1900 exzerpierten Zeitschriften sehr unvollständig ist, und es aus den ersten Lieferungen hervorzugehen scheint, daß diese Liste fast alle von ihm wirklich exzerpierten Schriften umfaßt, ist es klar, daß die oben erwähnten Ergänzungen der vorläufigen Verfasserliste eine ziemlich wichtige Rolle spielen müssen. Unter solchen Umständen ist es besonders auffallend, daß der Herausgeber für die Ergänzungen der Mathematikerliste das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik nie benutzt zu haben scheint. Zwar kommen an gewissen Stellen, wo auf die Quellen für biographische Notizen verwiesen wird, die Buchstaben „F. M.“ vor, die ohne Zweifel Fortschritte der Mathematik bedeuten, aber diese Verweise sind offenbar ohne weiteres aus meinem Aufsatze: *Bio-bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker* (Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 326—350) entnommen.

Welche Bedeutung der jetzt hervorgehobene Umstand für die Vollständigkeit der Verfasserliste des *Handwörterbuches* hat, ist unmittelbar zu ersehen, insofern die Fortschritte der Mathematik über zahlreiche Abhandlungen solcher Mathematiker berichten, die nicht Mitarbeiter der von Herrn Oettingen exzerpierten Zeitschriften sind. Aber nicht nur auf die Ergänzungen, sondern auch auf die Streichungen von Namen muß die Nichtberücksichtigung der Fortschritte der Mathematik einen gewissen Einfluß gehabt haben, weil diese teils biographische Notizen über verstorbene Mathematiker bringen, teils zahlreiche Abhandlungen gewisser Mathematiker verzeichnen, von denen vielleicht nur ein einziger Artikel in den exzerpierten Zeitschriften vorkommt. Es ist also wenigstens wahrscheinlich, daß durch Zuhilfenahme der Fortschritte der Mathematik Streichungen wegen fehlender biographischer Notizen oder wegen unbedeutender wisssenschaftlicher Wirksamkeit in gewissen Fällen unterblieben wären. Beispielsweise fehlt im *Handwörterbuche* der russische mathematisch-historische Verfasser Victor Bobynin, von dem die exzerpierten Zeitschriften nur eine einzige Abhandlung enthalten dürften, während die Fortschritte der Mathematik von ihm teils neun Artikel in der Bibliotheca Mathematica (die in der Zeitschriftenliste des Herrn Oettingen fehlt), teils zahlreiche Abhandlungen in russischer Sprache verzeichnen; biographische Notizen über ihn sind leicht zu haben und zwar im General-Register der Bibliotheca Mathematica 1887—1896 (Stockholm 1897, S. 5).

Aus dem soeben bemerkten geht hervor, daß man im vierten Bande des

Handwörterbuches keine besonders große Vollständigkeit in Betreff der erwähnten Mathematiker erwarten darf, und in der Tat habe ich eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Namen notiert, die ich selbst geneigt gewesen wäre in eine solche Arbeit aufzunehmen. Aber freilich muß ich gestehen, daß mir für viele der betreffenden Personen biographische Notizen fehlen, und daß es vielleicht in gewissen Fällen nicht leicht wäre solche Notizen zu bekommen. Auf der anderen Seite scheint Herr OETTINGEN selbst nicht immer besonders streng festgehalten zu haben, daß nur solche Personen aufgenommen werden, für welche eigentliche biographische Notizen erlangt werden können. So z. B. nimmt er Seite 267 einen Verfasser auf, von dem er nur angeben kann, daß er „Professor" (was hier wahrscheinlich Lehrer bedeutet) ist, und Seite 321 findet man eine Person aufgeführt, von dem man nur zu wissen bekommt, daß er Mathematiker (was eigentlich nichts bedeutet) in Pisa ist oder war.

Sehe ich von den oben angedeuteten Mathematikern ab, für welche mir zur Zeit biographische Notizen fehlen, so enthält meine Ergänzungsliste noch ein Paar Dutzend Namen von Verfassern, von denen ich hier aber nur die Verstorbenen notiere.

Abdank-Abakanowicz, Bruno (1852—1900).
[Biographische Notizen:] Wiadomósci matem. 5, 1901, 137—138.

Albeggiani, Giuseppe (1818—1892).
[Biographische Notizen:] *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 7, 1893, 39—47. — *Palermo*, Collegio degli ingegn., Atti 16, 1893, 61—71.

Balbin, Valentin (?—1901).
[Biographische Notizen:] L'enseignement mathém. 3, 1901, 222—223.

Baranieoki, Marian Alexander (1848—1895).
[Biographische Notizen:] Wszechswiat 14, 1895, 145—149.

Castigliano, Carlo Alberto (1847—1884).
[Biographische Notizen:] Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 18, 1885, 293—313.

David, Jean Marie (1819—1890).
[Biographische Notizen:] *Toulouse*, Acad. d. sc., Mémoires 2_9, 1890, 528—533.

Fink, Karl (1851—1898).
[Biographische Notizen und Schriftverzeichnis:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 7, 1899, 33—35.

Gascheau, Gabriel (1798—1883).
[Biographische Notizen:] *Toulouse*, Acad. d. sc., Mémoires 5_8: 2, 1883, 280—281; 6_8: 2, 1884, 17—48.

Gascó, Luis Gonzaga (1844—1899).
[Biographische Notizen:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 8 : 1, 1900, 26—27. — Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 225—226. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 1900, 63.

Genty, Max (1867?—1902).
[Biographische Notizen:] Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902, Supplément XXXVII.

Man könnte vielleicht bemerken, daß die wissenschaftlichen Leistungen einiger dieser Mathematiker nicht sehr bedeutend sind, so daß sie ohne Ungelegenheit im *Handwörterbuche* fehlen können, aber gerade für die Verstorbenen scheint mir eine größere Vollständigkeit besonders wünschenswert.

2.

Bei der Ergänzung der biographischen Notizen, die entweder in den drei ersten Bänden des *Handwörterbuches* vorhanden waren, oder durch die Fragebogen bekommen wurden, hat Herr OETTINGEN sich verschiedener Quellen, darunter auch meines schon oben erwähnten Artikels *Bio-bibliographie der 1881 — 1900 verstorbenen Mathematiker* bedient. Dagegen hat er, wie schon hervorgehoben worden ist, die biographischen Notizen über verstorbene Mathematiker, die in den Fortschritten der Mathematik zu finden sind, nicht benutzt, obgleich die *Bio-bibliographie* für die betreffenden Personen genau sowohl den Jahrgang als die Seite, wo biographische Notizen in den Fortschritten vorkommen, angibt. Hier unten teile ich in *kursiver* Schrift die Notizen mit, die Herr OETTINGEN fast ohne jede Mühe hätte erhalten können, die aber jetzt in dem *Handwörterbuche* fehlen (FdM bedeutet Fortschritte der Mathematik).

Azzarelli, Mattia [vgl. FdM **29** (1898), 18—19].
Geb. *1811*, *Spello;* Todesjahr fehlt sowohl im *Handwörterbuche* als in FdM, aber aus der *Bio-bibliographie* ist zu ersehen, daß AZZARELLI 1897 starb.

Buchheim, Arthur [vgl. FdM **20** (1888), 23].
Gest. 1888, *Sept. 9.*

Caporali, Ettore [vgl. FdM **18** (1886), 23].
Gest. 1886, *Juli 2,* Neapel.

Casey, John [vgl. FdM **23** (1891), 29].
Gest. 1891, *Jan. 3,* Dublin.

Craig, Thomas [vgl. FdM **31** (1900), 27].
Gest. 1900, *Mai 8, Baltimore.*

Faà di Bruno, Francesco [vgl. FdM **20** (1888), 19].
Gest. 1888, *März 27,* Turin.

Genocchi, Angelo [vgl. FdM **21** (1889), 21—22].
Gest. 1889, *März 7,* Turin.

Ich füge noch einige ergänzende oder berichtigende Notizen über verstorbene Mathematiker hinzu (BM bedeutet Bibliotheca Mathematica).

Amigues, Edouard (vgl. BM $\mathbf{4}_3$, 1903, 109).
Gest. 1900, Dez. 1.

Antomari, Xavier (vgl. BM $\mathbf{3}_3$, 1902, 335).
Gest. 1902, Juni 9, Paris.

van den Berg, Franciscus (vgl. BM $\mathbf{2}_3$, 1901, 348).
Gest. 1892, März 30, Hilversum.

Bjerknes, Karl Anton (vgl. BM $\mathbf{4}_3$, 1903, 110).
Gest. 1903, März 20, Kristiania.

Brassinne, Emile (vgl. BM $\mathbf{2}_3$, 1901, 330).
Gest. 18*8*4 (nicht 1894).

Brianchon, Charles Julien (Bd. I, Sp. 298; vgl. BM 8_2, 1894, 91).
Geb. 178*3* (nicht 1785), *Dez. 19, Sèvres.*
Gest. 1864, April 29, Versailles.

Bucca, Fortunato (vgl. BM $\mathbf{2}_3$, 1901, 331).
Gest. 1900, Juli (?).

Curtze, Maximilian (vgl. BM 4_3, 1903, 111).
Gest. 1903, Jan. 3, Thorn.

Davidoff, August (vgl. BM 2_3, 1901, 332).
Geb. 1823, Dez. 15 (a. St.), *Libau.*
Gest. 1885, *Dez. 22 (a. St.),* Moskau.

Dobriner, Hermann (vgl. BM 4_3, 1903, 111).
Gest. 1902, Nov. 25, Frankfurt a. M.

Felici, Riccardo (vgl. BM 3_3, 1902, 426).
Gest. 1902, Juli 20, S. Alessio bei Lucca.

Ferrers, Norman Macleod (vgl. BM 4_3, 1903, 111).
Gest. 1903, Jan. 31, Cambridge.

Gerono, Camille.
Geb. 1799, *Dez. 29,* Paris.
Gest. 1892[1]), *Nov. 5,* Paris.

Glaisher, James (vgl. BM 4_3, 1903, 111).
Gest. 1903, Febr. 8.

Auch für viele noch lebende Mathematiker sind Ergänzungen der biographischen Notizen ziemlich leicht zu haben.

Auf der anderen Seite hat Herr Oettingen zuweilen unterlassen, solche Angaben zu streichen, die einzelne Mathematiker ihm mitgeteilt haben, obgleich sie nicht in den Rahmen der Arbeit passen. So z. B. finden sich S. 219, 235, 298, 327, 346, 388, 403, 444, 478 Notizen über Mitgliedschaft gelehrter Gesellschaften, die ja sonst immer fehlen, ohne Zweifel, weil Herr Oettingen denselben keinen Wert beilegt; S. 406 steht nach dem Vornamen „Antonio" das Wort „Nobile", was wohl kein Vorname ist, sondern „Edelmann" bedeutet.

Daß Herr Oettingen für seine biographischen Notizen teils seine Quellen, teils die Schriften, wo weitere biographische Notizen zu haben sind, angegeben hat, ist sehr lobenswert, aber wenn diese Angaben allzu zahlreich sind und schwerverständliche Abkürzungen enthalten, wirken sie etwas störend (vergl. z. B. S. 94, Art. Beltrami). Könnten nicht diese Angaben mit Nonpareille gesetzt werden?

3.

Ich habe schon am Anfange dieses Artikels darauf hingewiesen, daß Poggendorff selbst den Fachgenossen in erster Linie eine biographische und nur in zweiter Linie eine bibliographische Arbeit bieten wollte, und in den zwei ersten Bänden ist das biographische Element auch rein quantitativ vorherrschend; in der Tat handelt es sich ja dort größtenteils um ältere Verfasser, deren literarische Wirksamkeit, wenn man sie mit den gegenwärtigen Verhältnissen vergleicht, im allgemeinen nicht besonders umfangreich war. Inbetreff des dritten und noch mehr hinsichtlich des vierten Bandes des *Handwörterbuches* gestaltet sich die Sache wesentlich anders, und man braucht nur die sieben erschienenen Hefte des letzten Bandes flüchtig durchzublättern, um zu finden, daß die bibliographischen Notizen, obgleich sie mit kleineren Schriften

1) Ich habe in meiner *Bio-bibliographie* unrichtig 1891 als Todesjahr angegeben, weil ich ohne weiteres die in den Fortschritten der Mathematik 24 (1892), 30 vorkommende Jahreszahl abschrieb.

gedruckt sind, mehr als $^3/_4$ des Raumes einnehmen. Es ist natürlich, daß das Publikum dadurch gewohnt wird, das Buch in erster Linie als eine bibliographische Arbeit zu betrachten und zu benutzen, so daß der Frage über die Zuverlässigkeit und die Vollständigkeit der bibliographischen Notizen ein großes Gewicht beigelegt werden muß.

In Bezug auf diese Frage ist es aus dem vorhergehenden klar, daß Herr Oettingen keine besonders kräftigen Anstrengungen gemacht, um die Schriften der Mathematiker möglichst vollständig verzeichnen zu können, da es eine sehr große Anzahl von Zeitschriften gibt, die er nicht exzerpiert hat, und da er auch nicht die Fortschritte der Mathematik zu Hilfe genommen hat, um die Lücken auszufüllen. Die Ergänzung der bibliographischen Angaben scheint er im allgemeinen den Verfassern selbst überlassen zu haben, sofern es sich nicht um selbständig erschienene Schriften handelt, und unter solchen Umständen ist von vorne herein anzunehmen, daß diese Angaben in vielen Fällen unnötig unvollständig sein müssen. Eine nähere Untersuchung bestätigt auch die Richtigkeit dieser Annahme; in manchen Fällen sind zwar die Angaben sehr gut, in anderen so unvollständig, daß sie von der wissenschaftlichen Wirksamkeit des betreffenden Verfassers kein richtiges Bild geben können. Um mir wenigstens eine Vorstellung davon bilden zu können, in wie weit man durch Hinwenden an die Verfasser selbst vollständige bibliographische Angaben erlangt, habe ich für eine besondere Zeitschrift, die von Herrn Oettingen nicht excerpiert worden ist, Untersuchungen angestellt; ich habe dabei die Zeitschrift, die mir am nächsten steht, nämlich die Bibliotheca Mathematica, gewählt und gefunden, daß neun Verfasser (Boyer, Braunmühl, M. Cantor, Curtze, Dickstein, Duhem, Eneström, Engel, Gerland), deren Artikel vor Ende 1901 erschienen sind, dieselben aufgeführt haben, während neun Verfasser (Allman, Ball, Bjerknes, Boll, Bosscha, Cajori, G. Cantor, De Marchi, Favaro) aus derselben Kategorie es unterlassen haben. Somit wäre die Wahrscheinlichkeit, von einem Mathematiker vollständige bibliographische Angaben zu bekommen, vorläufig etwa $= \frac{1}{2}$ zu setzen. Natürlich ist auf den so erhaltenen Wert kein *größeres* Gewicht zu legen, aber aus der Untersuchung dürfte jedenfalls hervorgehen, daß beim Hinwenden an die Verfasser große Unebenheiten entstehen müssen. Solche Unebenheiten beeinträchtigen zwar nicht die Anwendbarkeit der Arbeit, sofern man nur verlangt, daß die wirklich vorhandenen Angaben zuverlässig sind, aber für manche Benutzer müssen sie unangenehm sein, die Arbeitsmethode ist also nicht besonders zu empfehlen.

Wollte ich die Schriften hier verzeichnen, die ich im Vorübergehen als unnötigerweise fehlend notiert habe, so würde dies viele Druckseiten erfordern, und die Liste würde dennoch gewiß äußerst unvollständig sein. Da übrigens die fehlenden Schriften fast alle in den Fortschritten der Mathematik zu finden sind, dürfte es unangebracht sein, hier auf die bibliographischen Lücken näher einzugehen, und ich begnüge mich damit, dem Leser vorzuschlagen, beispielsweise das Schriftverzeichnis des Artikels „Gilbert, Philippe“ mit den Seiten 59—79 der Mansionschen *Notice sur les travaux scientifiques de Louis-Philippe Gilbert* (Paris 1893) zu vergleichen.

Es ist natürlich, daß es bei einer so großen Menge von bibliographischen Notizen unmöglich gewesen ist, Unrichtigkeiten zu vermeiden. In gewissen Fällen scheinen diese auf undeutlichen Angaben der Verfasser zu beruhen, und sie hätten, wenigstens an den von mir notierten Stellen, verbessert werden

können, wenn Herr OETTINGEN die **Fortschritte der Mathematik** zu Rate gezogen hätte. In anderen Fällen ist es schwerer einzusehen, wie die Unrichtigkeit entstanden ist. So z. B. findet man unter den Schriften von MAXIMILIAN CURTZE zuerst

Hoppe, Z. Math. Phys.: D. Tractatus Quadrantis d. Robertus Anglicus aus 1477 (übers.), 23 p. (44). — Mor. Cantor's Schriften, 26 u. 6 p. (44 u. 45, 1899 u. 1900),

und dann

Schlömilch, Ztschr. Math. Der Tractatus Quadrantis d. Robertus Anglicus 1477 (übers.), 22 p. (44, Suppl., 1899). — Mor. Cantor's Schriften 1851—99, 25 u. 6 p. (44 u. 45, Suppl. 1899 u. 1900).

Hier ist natürlich das erste Stück ganz zu streichen, und die zuletzt erwähnten sechs Seiten gehören dem „Tractatus Quadrantis“ an. — S. 452 sind im Absatze: „Stockh., Akad. Ofvers (!)“ zwei Schriften verzeichnet, die unmittelbar vorher im Absatz: „Stockh., Akad. Öfvers.“ vorkommen.

Um Raum zu sparen, sind sehr viele Titel wesentlich abgekürzt worden, aber zuweilen dürfte Herr OETTINGEN dabei zu weit gegangen sein. So z. B. wird S. 47 unter „Hoppe, Arch. Math. Phys.“ eine Abhandlung mit dem abgekürzten Titel „Tetraeder“ erwähnt; der vollständige Titel lautet: *Über Tetraeder, deren Seitenflächen teilweise oder sämtlich gleich sind, und über das Hyperboloid der Höhen beim gleichseitigen Tetraeder*. Daß S. 17 „spec.“ für „speciali“ und S. 233 „min.“ für „minimum“ steht, dürfte vielen Lesern nicht unmittelbar einleuchtend sein. Daß die Abkürzungen der Titel in schwedischer Sprache, die Herr OETTINGEN offenbar nicht versteht, nicht immer gelungen sind, sieht der schwedische Leser sogleich. So z. B. kommt S. 383 folgende Abkürzung vor: „Bevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differenseqvation af *n*. ordn. innehåller,“ was deutsch bedeutet; „Beweis des Satzes, daß das vollständige Integral einer Differenzen-Gleichung *n*. Ordnung enthält.“ Die drei letzten Worte „*n* arbiträra konstanter“ (= *n* willkürliche Konstanten) sind von Herrn OETTINGEN weggelassen, und dadurch wird die Abkürzung unverständlich. — Auf der anderen Seite muß ich gestehen, daß ich, abgesehen von Titeln in schwedischer Sprache, keine wirklich entstellte Titel gefunden habe von der Art, wie sie zuweilen in den zwei ersten Bänden vorkommt.[1])

Wie im dritten Bande des *Handwörterbuches* sind auch hier für jeden Verfasser die Schriften so geordnet, daß zuerst die selbständig erschienenen und dann die in Gesellschafts- und Zeitschriften veröffentlichten aufgeführt sind; die letzteren sind alphabetisch nach den Abkürzungen der betreffenden Sammelschriften geordnet. Diese Abkürzungen haben offenbar Herrn OETTINGEN ziemlich viel Mühe verursacht, und nicht immer haben seine Anstrengungen zu den besten Resultaten geführt. In betreff der Gesellschaftsschriften enthält die Abkürzung im allgemeinen zuerst einen Ortsnamen, dann entweder den Namen der Gesellschaft oder den Titel der Publikation oder beide dieser Angaben, und dagegen ist ja nichts einzuwenden. Aber zuweilen finden sich unnötigerweise Abkürzungen anderer Art. So wird (vgl. z. B. S. 245) statt „Milano, Ist. Lomb. Rend.“ nur „Ist. Lomb. Rend.“ gesetzt, während (vgl. auch S. 245) *nicht* „Ist. Ven. Atti“, sondern nach dem allgemeinen Grundsatze „Venezia, Ist. Atti“ steht. Ebenso wenig ist zu ersehen, warum man (vgl. z. B. S. 96) „France, Soc. math. Bull.“ und nicht „Paris, Soc. math. Bull.“ setzen soll, da für „Abhand-

1) Im ersten Bande findet sich Sp. 1096 folgender Titel: „Über d. linearen Constanten [!lies: lineäre Construction] d. rechten [!lies: achten] Schnittpunktes dreier Oberflächen 2. Ordn., wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind.“



lungen der preußischen Akademie der Wissenschaften" die Abkürzung „Berlin, Akad. Abh." (vgl. z. B. S. 463) und nicht „Preußen, Akad. Abh." gewählt worden ist. Inkonsequent ist auch S. 309 die Abkürzung: „Liège, Roy. soc. Mém.", da sonst das Wort „royale" (königlich etc.) immer fehlt. Diese und ähnliche Inkonsequenzen sind dennoch ziemlich bedeutungslos, aber wenn für eine und dieselbe Publikation zwei verschiedene Abkürzungen benutzt worden sind, kann dies leicht irreleiten. So z. B. steht für „Öfversigt af kungl. vetenskaps-akademiens förhandlingar" teils (vgl. z. B. S. 25, 53, 96, 188) „Stockh. Akad. Förh.", teils (vergl. z. B. S. 40) „Stockh. Akad. Öfvers." und S. 356 werden für einen und denselben Verfasser Schriften teils im „Stockh. Akad. Förh.", teils im „Stockh. Akad. Öfvers." verzeichnet; der nicht sachkundige Leser muß natürlich daraus folgern, daß es sich um zwei verschiedene Publikationen handelt.

Für die eigentlichen Zeitschriften bieten die Abkürzungen des *Handwörterbuches* ein buntes Gemisch. Zuweilen ist nur der Titel abgekürzt worden (z. B. „Nouv. Ann. Math.", S. 23), zuweilen wird vor dem Titel entweder der Erscheinungsort (z. B. „Wien, Monatsh. Math. Phys.", S. 394) oder der Name des Herausgebers (z. B. „Schlömilch, Ztsch. Math.", S. 102) gesetzt. Für gewisse Zeitschriften kommen zwei oder sogar drei Abkürzungen vor, z. B. für die Bibliotheca Mathematica teils „Bibl. Math." (S. 328, 354), teils „Stockholm, Biblioth. math." (S. 117, 176, 288), teils „Eneström, Bibl. Math." (S. 109, 218); ebenso für Giornale di matematiche, teils „Napoli, Giornale di matem." (S. 117), teils „Battaglini, G. mat." (S. 73, 186), und für Mathesis teils „Gand, Mathesis" (S. 313), teils „Mathesis" (S. 321). Auch in dem besonderen Falle, wo der Name des Herausgebers zuerst steht, kommen Variationen vor, z. B. für Mathematische Annalen teils „Clebsch, Math. Ann." (S. 79), teils „Clebsch-Neumann, Math. Ann." (auch S. 79), teils „Neumann-Clebsch, Math. Ann." (S. 248), teils „Neumann, Math. Ann." (S. 327) und für Journal für die reine und angewandte Mathematik teils „Crelle (Fuchs), J. Math." (S. 33), teils „Crelle-Fuchs, J. Math." (S. 279), teils „Fuchs (Crelle), J. Math." (S. 331). — Für Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik scheint fast überall „Schlömilch, Ztschr. Math. Phys., Suppl." zu stehen, nur S. 384 kommt „Abh. z. Gesch. d. Math." vor. — Ausnahmsweise kommen auch Abkürzungen vor, die so unvollständig sind, daß nur der besonders Sachkundige den Sinn erraten kann, z. B. S. 383 „Paris, Congrès" für „Congrès international d'histoire comparée, Paris 1900, 5e section, Histoire des sciences" (vgl. S. 218: „Paris, Ann. intern. d'Hist.").

Unter die Zeitschriften sind noch einige andere Schriften eingereiht, welche mir dort weniger zu passen scheinen, z. B. „Leipzig, Encycl. d. math. Wiss." (S. 29, vgl. S. 208: „Encyclopädie d. math. W.") und „Breslau, Handwörterb. d. Astron." (S. 494).

Inbetreff einer biographisch-bibliographischen Arbeit spielt natürlich die Korrekturlesung eine wichtige Rolle, und manches, das man bei dem Durchsehen des Manuskriptes übergangen hat, kann in der Korrektur leicht verbessert werden. Leider scheint Herr Oettingen nicht immer Gelegenheit gehabt zu haben, den Korrekturen die gebührende Aufmerksamkeit zu widmen. Ich habe zwar keine besonderen Anstrengungen gemacht, um Korrekturfehler zu entdecken, aber dennoch eine nicht unbeträchtliche Anzahl notieren können. Verdruckte Namen finden sich z. B. S. 14 („Alambert"), 22 („Die Saaliger'sche

Theorie des Saturnringes"), 124 („*Hofmann*, Ztschr. math. naturw. Unterr."), 174 („Brass*ine*"), 230 („Sodlerian Prof."), 298 („Dauhle*b*sky"), u. s. w.; S. 53 steht „Islane" statt „plane", und S. 221 dürfte es nicht leicht sein zu erraten, was „sorseurs de Bell" hedeuten soll (lies: „torseurs de Ball"). Die Titel in schwedischer Sprache sind sehr oft mehr oder weniger schlecht abgedruckt (siehe z. B. S. 15, 22, 39, 102, 136, 194, 342, 374, 383, 403, 432); schwedische Ortsnamen sind zuweilen auch für einen Schweden fast unkenntlich, z. B. S. 388 „Braunhyrha" (Brännkyrka?). — Zu den Korrekturfehlern hin ich geneigt auch solche Versehen zu rechnen, wie die S. 231 und 268 vorkommenden, wo hei der Angabe der Zeitschriftenartikel eines Verfassers eine und dieselhe Zeitschrift zweimal aufgeführt wird. — Auch die auffälligen Notizen S. 17, hinsichtlich einer *Aritmetica pratica*, „herausgeg. v. Ed. Morano" und einer *Algebra*, „herausgeg. v. Ed. Pellerano" [natürlich ist hier Ed. = editore = Verleger] hätten wohl leicht von einem aufmerksamen Korrekturleser verhessert werden können; am besten wäre es gewiß gewesen die Zusätze ganz einfach zu streichen, da im *Handwörterbuche* die Verleger der zitierten Schriften sonst nie genannt werden.

Aus dem, was ich jetzt hemerkt habe, dürfte es klar sein, daß die Fortsetzung des Poggendorffschen *Handwörterbuches* nur mit Vorsicht als mathematisch-bibliographisches Handbuch zu benutzen ist. Dem Mathematiker, der z. B. einen Nachruf für einen verstorbenen Kollegen schreihen will, kann es also nicht empfohlen werden, sich ohne weiteres der hibliographischen Angahen des *Handwörterbuches* zu hedienen. Auf der anderen Seite kann das Buch dem sachkundigen Benutzer oft gute Dienste leisten, da es viele Aufschlüsse enthält, die zur Zeit nicht anderweitig zu bekommen, oder wenigstens schwer zu erlangen sind. Freilich wäre es sehr zu wünschen, daß recht hald von einem Fachgenossen ein hiographisch-literarisches Wörterhuch der jetzt lebenden Mathematiker in Angriff genommen würde, hei dessen Bearheitung in erster Linie alle leicht zugänglichen Quellen, also auch die Fortschritte der Mathematik, zur Anwendung kämen, und die Mitteilungen der Verfasser selhst vorzugsweise für die hiographischen Notizen benutzt würden, aber leider hahen wir augenhlicklich keinen Anlaß zu hoffen, daß dieser Wunsch erfüllt werden wird. Unter solchen Umständen kann man nicht umhin die neue Fortsetzung des Poggendorffschen *Handwörterbuches* mit Freude zu hegrüßen, auch wenn man überzeugt ist, daß sie ohne allzu große Mühe hätte besser hearheitet werden können.

Stockholm. G. Eneström.



Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 8°. — [Rezension des Heftes **14**:] Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 2871. [1

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
3_3 (1902): 4. — [Rezension des Heftes 3_3: 1:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **33**, 1902, 573—575. (G. Wertheim.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1902 : 4. — 1903 : 1.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman. Amsterdam. 8°. [4
11 : 1 (avril — octobre 1902). — Table des matières contenues dans les cinq volumes 1898—1902, suivies d'une table générale par noms d'auteurs. Composées par W. A. Wythoff. Amsterdam 1903. 8°, (3) + 155 + (1) p.

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1903, 218—219. (D. E. Smith.) [5

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq (1902). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1903, 214—215. (Charlotte A. Scott.) — Bollett di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 21—23. (G. L.) — Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902; Supplém. XXXIX—XL. [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^2 (1899). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 405. (G. Eneström.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 406. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 407—408. (G. Eneström.) [7

***Hoefer, F.**, Histoire des mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du 19e siècle. Cinquième édition. Paris, Hachette 1902. [8
16°, 3 + 609 S. — [4 fr.]

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, traduite par J. Mascart (1902). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 313—319. (P. Tannery.). — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 112—114. (G. L.) [9

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik 1. Rechnen und Algebra (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 56—57. (F. Engel.) [10

Versluys, G., Beknopte Geschiedenis der Wiskunde. Amsterdam, A. Versluys 1902. [11
8°, 208 S. — [2,50 flor.] — [Rezension:] Mathesis 2_2, 1902, 275. (J. N.)

Klimpert, R., Storia della geometria. Traduzione di P. Fantasia (1901). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 413. (G. Eneström.) [12

Carrara, B., I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. I. [13
Rivista di fisica (Pavia) 5, 1902, 296—316, 481—492, 696—705, 761—776. — Der bisher erschienene 1. Teil ist auch als Sonderabzug herausgegeben (172 S. 8°). — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 318—320. (H. Bosmans.) — Periodico di matem. 5_2, 1902, 198. (K.)

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte (1902). [Rezension:] Bollett. d. bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 5—13. (U. Amaldi.) [14

Russell, B. A., Essai sur les fondements de la géométrie. Traduction par A. Cadenat (1901). [Rezension:] Jornal de sc. mathem. 15, 1902, 25. (G. T.) [15

Mackay, J. S., History of a theorem in elementary geometry. [16
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 20, 1902, 18—22.

Obenrauch, F. J., Die erste Raumkurve der Pythagoräischen Schule, ihre orthogonale und imaginäre Projektion [17
Monatsh. für Mathem. 14, 1903, 187—205. — Zum grössten Teil historischen Inhalts.

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Zweiter Teil. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Leipzig, Teubner 1903. [18
8°, XI + 264 S. — [10 *M.*]

Weyh, A., Die wichtigsten Mathematiker und Physiker des Alterthums (1902). [Rezension:] Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1092. (Gd.) — Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 108. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 578—579. (Meyer.) [19

Dannemann, F., Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften. I. Aufl. 2 (1902). [Rezension:] Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1090—1091. (Gd.) — Deutsche Litteraturz. 23, 1902, 3250. [20

***Hielscher, J.**, Untersuchungen zur geschichtlichen Entwickelung der Logik in den Prinzipien der Mechanik. Zürich 1901. [21
8°, 87 S.

Knibbs, G. H., The history of the atomistic conception and its philosophical import. [22
Australasian association, Report 8 (Melbourne 1901), 18—44.

Mann, C. R., Histories and bibliographies of physics. [23
Science 16_2, 1902, 1016—1021.

Hultsch, F., Die Frauen und die Mathematik. [24
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 82—85.

Isely, L., Epigraphies tumulaires de mathématiciens. [25
Neuchatel, Soc. d. sc., Bulletin 27, 1899, 167—172.

b) Geschichte des Altertums.

***Villani, N.**, Ricerche matematiche sulle misure antiche e il sistema antico delle misure romane. Lanciano, Carabba 1902. [26
16°, 7 + 66 S. — [1 lira.]

Wood, D., Génération géométrique des courbes ornamentales chez les Grecs. [27
Revue génér. d. sc. 13, 1902, 845.

M[ansion], P., Sur la méthode analytique des anciens. [28
Mathesis 2_2, 1902, 266—273.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. III–V (1901—1902). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 414—422. (A. A. Björnbo.) [Rezension des Teiles V:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 320—321. (H. Bosmans.) [29

***Smith, T.**, Euclid, his life and system. New York, Scribner 1902. [30
12°, 4 + 227 S. — [1½ doll.]

***Frankland, W. B.**, The story of Euclid. London 1902. [31
16°, 176 S. — [1 sh.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 117. (G. L.)

Fazzari, G., Archimede e la sua misura del cerchio. [32
Il Pitagora 9, 1902, 31—32, 47—51.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. Vol. III. Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. Griechisch und Deutsch von H. Schöne. Leipzig, Teubner 1903.
8°, XXI + 366 S. — [8 *M.*] [33

Hoppe, E., Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandria (1902). [Rezension:] Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1092. (Gd.) [34

Schmidt, W., Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume. [35
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 337—341.

Claudii Ptolemaei Opera quae supersunt omnia. Volumen I. Syntaxis mathematica. Edidit J. L. HEIBERG. Pars II, libros VII—XIII continens. Leipzig, Teubner 1902. [36
8°, V + 608 S. — [12 ℳ.]

Tannery, P., Simplicius et la quadrature du cercle. [37
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 342—349.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Über die angebliche Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer. [38
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 408—409.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. I—II (1902). [Rezension:] *New York*, Americ. matem. soc., Bulletin 9_2, 1902, 123—125. (D. E. SMITH.) — Bollett. di bibliogr. d. sc matem. 5, 1902, 128; 6, 1903, 29—30. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 50—52. (S. GÜNTHER.) — [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 79—80. [39

Suter, H., Über die im „Liber augmenti et diminutionis" vorkommenden Autoren. [40
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 350—354.

Eneström, G., Hermannus secundus (Dalmata). [41
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 410—411. — Anfrage.

Dünner, L., Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Aus zwei Manuskripten der Nationalbibliothek in Paris. Beitrag zur Geschichte der Astronomie. Würzburg 1902. [42
8°, 54 S.

Schmidt, W., Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria (1902). — [Rezension:] Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1092—1093. (GD.) [43

Berthelot, D., Les manuscrits de Léonard de Vinci et les machines de guerre. [44
Journ. d. savants 1902, 116—120.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Peprný, L., [Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Böhmen]. [45
Časopis pro pěstov mathem. 31, 1902, 47—73. — Czechisch.

Mac Mahon, P. A., Les carrés magiques. [46
Revue scient. 17_4, 1902, 744—751. — Hauptsächlich historischen Inhalts.

Eneström, G., Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts. [47
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 355—360.

Ortroy, F. van, Bibliographie de l'œuvre de Pierre Apian. [48
Bibliographie moderne 1901, 89—156, 284—333. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 322—326. (H. BOSMANS.)

Pagliano, C., La disfida matematica tra N. Tartaglia e L. Ferrari e la risoluzione dei problemi della geometria elementare mediante la riga e il compasso di apertura fissa. [49
Il bollett. di matem. 1, 1902, 94—104.

Schor, D., Simon Stevin und das hydrostatische Paradoxon (1902). [Rezension:] Beibl. zu den Ann. d. Phys. 28, 1902, 1093. (GD.) [50

Huber, G., Der Astronom Tycho Brahe. [51
Bern, Naturf. Ges., Mitteil. 1902, 73—97 + Porträt.

Friis, F. R., TYCHONIS BRAHEI et ad eum doctorum virorum epistolae ab anno 1588. Nunc primum collectae et editae. Fasc. I—III. Hauniae, Gad 1900—1902. [52
4°, 96 S. — [4,80 ℳ.]

Friis, F. R., Nogle Efterretninger om Tyge Brahe og hans Familie. Köbenhavn, Gad 1902. [53
8°, 40 S. + Porträt.

Studnička, F. J., Brevissimum planimetriae compendium, sua manu exaravit TYCHO BRAHE. Pragae 1903. [54
8°, 4 S. + 6 facsimilierte Blätter + Porträt.

Gravelaar, N. L. W. A., John Napier's werken (1899). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 326—335. (H. BOSMANS.) [55

Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XII. Firenze, Barbera 1902. [56
4°, 525 + (1) S. — Herausgegeben von A. FAVARO. — [Anzeige der Bände 1—11:] Il politecnico (Milano) 1902. 14 S. (G. CRUGNOLA.)

Goldbeck, E., Galileis Atomistik und ihre Quellen (1902). [Rezension:] Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1093—1094. (GD.) [57

Bosmans, H., Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent. [58
Bruxelles, Soc. scient., Annales 27: 2, 1903. 43 S.

***Maupin, G.,** Opinions et curiosités touchant la mathématique. Seconde série. Paris, Naud 1902. [59
8°, 338 S. — [5 fr.] — Hauptsächlich über ALBERT GIRARDS Zusätze zu den „Oeuvres mathématiques de SIMON STEVIN".

Vacca, G., Sopra un probabile errore di Gabrio Piola. (Sulla rettificazione della parabola e della spirale d'Archimede.) [60
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 1—4.

Eneström, G., Die „Leçons de ténèbres" des Desargues. [61
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 411. — Anfrage.

Bosmans, H., Deux documents sur la profession de géomètre-arpenteur dans les Pays-Bas au XVIIe siècle. [62
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1902, 340—343. — Das Hauptdokument ist ein Schreiben von M. F. VAN LANGREN vom 18. Febr. 1645.

Wislicenus, W. F., Les cartes de la lune de Langrenus. [63
Bruxelles, Soc. d'astron., Bulletin 7, 1902, 39—47. — Übersetzung der Abhandlung in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 384—391. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 335—340. (H. BOSMANS.)

Favaro, A., Giannantonio Rocca (1607—1656). [64
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 412. — Antwort auf eine Anfrage.

Korespondencya KOCHAŃSKIEGO i LEIBNIZA według odpisów E. Bodemanna, po raz pierwszy podana do druku przez S. DICKSTEINA. [65
Prace matem.-fizyczne 13, 1902, 237—283. — Der Briefwechsel zwischen Kochansky und Leibniz, nach den Abschriften von E. Bodemann herausgegeben von S. DICKSTEIN.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Rezension:] *Amsterdam,* Wisk. genoots., Nieuw Archief 5_2, 1902, 321. (Kl.) — Jornal de sc. mathem. 15, 1902, 26—27. (G. T.) [66

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie nach J. P. de Gua de Malves (1902). [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 80. — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 31. — Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 304—305. (E. LAMPE.) [67

Amodeo, F., Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli. [68
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 32, 1902. (2) + 64 S. — Geschichte der Mathematik in Neapel 1732—1778. Mit 2 Porträts.

„Soho-rules". [Zur Geschichte des Rechenschiebers.] [69
Zeitschr. für Mathem. 48, 1902, 317—318.

Cantor, M., Der Erfinder des Wilsonschen Satzes. [70
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 412. — Anfrage.

Kančić, Fr., Georg v. Vega. [71
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 525—526.

Purser, J., The Irish school of mathematicians and physicians from the beginning of the 19th century. Opening address. [72
Nature 66, 1902, 478—483.

***Heydweiller, A.,** Die Entwickelung der Physik im 19. Jahrhundert. Vortrag gehalten im Humboldt-Verein für Volksbildung in Breslau. Berlin, Parey 1900. [73
8°, 32 S. — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 173. (W. WIEN.)

Ellery, R. L. J., A brief history of the beginnings and growth of astronomy in Australasia. [74
Australasian association, Report 8 (Melbourne 1901), 1—17.

Klein, F., Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814 (1901). — [Rezension:] *New York,* Americ. mathem soc., Bulletin 9_2, 1902, 125—126. (M. BÔCHER) — Vjestnik elem. matem. 28, 1902, 208—209. [75

Gauss, K. F., General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825 (1902). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 26_2, 1902, 289—290. (G. D.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 114—116. (G. VACCA.) — Nature 66, 1902, 316—317. — Science 16_2, 1902, 902—903. (A. S. HATHAWAY) [76

Brendel M., Das Gauss-Archiv. [77
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 61—63.

Fazzari, G., Jacob Steiner. [78
Il Pitagora 9, 1902, 33—34.

Jahnke, E., Auszüge aus drei Briefen STEINERS an Jacobi. Schreiben JACOBIS an den Staatsminister v. Eichhorn betreffend Jacob Steiner. [79
Arch. der Mathem. 4_3, 1903, 268—280.

Bolyai, J., Epistola ad W. Bolyai, in latinum conversa. [80
J. Bolyai in memoriam (Klausenburg 1902), IX—XV + Facsim. — Vom 3. Nov. 1823.

Mansion, P., Sur la découverte de la géométrie non-euclidienne par Jean Bolyai. [81
Bruxelles, Soc. scient., Annales 26, 1902, 146—147.

Sylow, L., Mowa, wypowiedziana na uroczystym obchodzie setnej rocznicy urodzin Abela w Chrystyanii d. 5 września 1902. [82
Wiadomości matem. 6, 1902, 311—316. — Polnische Übersetzung der Rede in Kristiania 1902 (vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 425).

Fehr, H., Centenaire d'Abel. [83
L'enseignement mathém. 4. 1902, 445—447.

Wilson, E. B., The centenary of the birth of Abel. [84
New York, Americ. mathem. soc. 9_8, 1902, 154—156.

Bonola, R., Index operum ad geometriam absolutam spectantium. [85
J. Bolyai in memoriam (Klausenburg 1902), 81—154.

Sabinin, E., Shukowskij, N., Lakhtin, L., [M. V. Ostrogradskij]. [86
Moskwa, Mathem. obchtch., Sbornik 22, 1902, 499—573.

Goldziher, K., Weierstrass über das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip. [87
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 409—410.

Wassilief, A. und Delaunay, N., P. L. Tschebychef (1900). [Rezension:] Zeitschr. für Mathem. 47, 1902, 500. (R. ROTHE.) [88

Stäckel, P., De ea mechanicae analyticae parte quae ad varietates complurium dimensionum spectat. [89
J. Bolyai in memoriam (Klausenburg 1902), 61—79. — Bericht über den gegenwärtigen Stand der Mechanik der mehrdimensionalen Raumformen.

Wölffing, E., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnel'schen Wellenfläche. [90
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 361—3?2. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 24, 1903, 370—371.

Macfarlane A., A report on recent progress in the quaternion analysis. [91
American association, Proceedings 51, 1902, 305—326.

Miller, G. A., Second report on recent progress in the theory of groups of finite order. [92
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1902, 106—123.

Favaro, A., Intorno ad alcune anomalie presentate dal „Bullettino" del principe Boncompagni. [93
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 383—385.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte

der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen. Lieferung 4—7. Leipzig, Barth 1902—1903. [94
8°, S. 217—504. — [12 *M*.] — [Anzeige der Lief. 1—3:] Naturwiss. Rundschau 17, 1902, 606.

Meyer, W. Fr. und Klein, F., Bericht über den Stand der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. [95
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 22—23.

Wölffing, E., Verzeichnis der in technischen Zeitschriften 1901 sich vorfindenden mathematischen Abhandlungen. [96
Zeitschr. für Mathem. 48, 1902, 183—192.

e) Nekrologe.

Pierre Marie Edouard **Amigues** (1842—1900). [97
Marseille, Fac. d. sc., Annales 11, 1901, 125—137. (L. Sauvage, Thermes, André.)

Charles Edward **Bickmore** (?—1901). [98
London, Mathem. soc., Proceedings 34, 1902, 129—130. (E. B. Elliott, A. Cunningham.)

Ferdinand **Caspary** (1853—1901). [99
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 42—60 [mit Porträt]. (E. Jahnke.) — Leopoldina 37, 1901, 84.

Alfred **Cornu** (1841—1902). [100
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 11_5: 1, 1902, 347—349. (V. Cerruti.) — Astrophys. journ. 15, 1902, 299—301. (J. S. Ames.) — Beibl. zu den Ann. d. Phys. 25, 1902, 1098. (Gd.)

Maximilian **Curtze** (1837—1903). [101
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 86—87. (S. Günther.)

Max **Escheuhagen** (1858—1901). [102
Berlin, Deutsche physik. Gesellschaft., Verhandl. 4, 1902, 79—87. (W. von Bezold.) — Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1098—1099. (Gd.)

Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833—1902). [103
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 11_5: 1, 1902, 397—398. (V. Cerruti.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, 126—127. (G. L.)

Max **Genty** (1867?—1902). [104
Nouv. ann. de mathém. 2_4, 1902; Supplément XXXVII.

August **Heller** (1843—1902). [105
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 386—394 [mit Porträt]. (S. Günther.) — Mathem. und Naturw. Ber. aus Ungarn 18 (1900), 1903, 473—477. (J. Kürschák.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [106
Bologna, Accad. d. sc. dell' istituto, Rendiconti 5_2, 1901, 1 S. (S. Pincherle.) — *Mexico*, Soc. Alzate, Revista 1901, 61—63 [mit Porträt]. (J. Mendizabel Tamborrel.) — *München*, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 32, 1902, 262—268. (A. Pringsheim.)

Victor August **Julius** (1851—1902). [107
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen 11, 1902, 3—5. (H. G. van de Sande Bakhuyzen.)

Ignaz **Clemenčič** (1853—1901). [108
Innsbruck, Naturw. Verein, Berichte 27, 1902. 18 S. (P. Czermak, W. Radaković.) — Beibl. z. den Ann. d. Physik 26, 1902, 1099. (Gd.) — Leopoldina 67, 1901. 85.

Charles Hugo **Kummell** (1836—1897). [109
Washington, Philos. soc., Bulletin 13, 1900, 404—405. (M. Baker.)

Johannes **Pernet** (1845—1902). [110
Berlin, Deutsche physik. Gesellsch., Verhandl. 4, 1902, 128—135 (M. Thiesen), 225—228 (W. Förster). — Beibl. zu den Ann. d. Phys. 26, 1902, 1097—1098. (Gd.)

Peter **Pokrowsky** (1857—1901). [111
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 117—119. (A. Przeborski.) — *Kiew*, Univ., Isjvestija 1902 nº 9c, 26 S. (A. Przeborski.) — *Moskwa*, Mathem. ebohch., Sbornik 22, 1902, I—XXXIII. (A. Przeborski.)

John Daniel **Runkle** (1823—1902). [112
L'enseignement mathém. 5, 1903, 64.

Oskar **Schlömilch** (1823—1901). [113
Leipzig, Sächs. Ges. der Wissensch., Berichte 53, 1901, 507—520. (M. Krause.)

Charles Antony **Schott** (1826—1901). [114
Americ. journ. of science 12_4, 1901, 326.

Ernst **Schröder** (1841—1902). [115
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 86.

Wilhelm **Schur** (1846—1901) [116
Leipzig, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 36, 1901, 164—172 [mit Schriftverzeichnis von B. Meyermann]. (M. Brendel.) — Nature 64, 1901, 380. (W. J. S. Lockyer.)

Bernhard **Schwalbe** (1841—1901). [117
Unterrichtsbl. für Mathem. 7, 1901, 42—44. (F. Pietzker.) — Zeitschr. für physik. Unterr. 14, 1901, 129—133 [mit Porträt]. (F. Poske.)

James Hamblin **Smith** (1834?—1901). [118
Nature 64, 1901, 285.

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [119
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 28—29.

Gustav **Wertheim** (1843—1902). [120
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 395—402 [mit Porträt]. (G. Eneström.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 75—77 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (H. Dobriner.)

William Crawford **Winlock** (1859—1896). [121
Washington, Philos. soc., Bulletin 13, 1900, 431—434. (J. R. Eastman.)

f) Aktuelle Fragen.

Braunmühl, A. von, Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1897—1902. [122
Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 403—404.

Schülke, A., Ein neuer Vorschlag zur Vertiefung des mathematischen Unterrichts. [123
Zeitschr. für mathem. Unterr. 33, 1902, 513—517. — Über mathematisch-historischen Unterricht in den Schulen.

Schulze, E., Über einige Bezeichnungen in der Schulmathematik. [124
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 35—37.

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Karlsbad 1902.] [125
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 16—21. (A. Gutzmer.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1903, 206—214. (C. M. Mason.) — L'enseignement mathém. 4, 1902, 447—448. — Naturw. Rundschau 17, 1902, 565—567. (Kopeiwa.)

[Die englische Mathematiker-Versammlung in Belfast 1902.] [126
Nature 66, 1902, 618—619. (C. H. Lees.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. G. N. Bauer in Minneapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota daselbst.

— Privatdozent A. Benteli in Bern zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Bibliothekar F. Boll in München zum Professor der klassischen Philologie an der Universität in Würzburg.

— Dr. H. S. Carslaw in Glasgow zum Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität in Sidney.

— Prof. Th. Des Coudres in Würzburg zum Professor der Physik an der Universität in Leipzig.

— Privatdozent K. T. Fischer in München zum Professor der Physik an der technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent H. Grassmann in Halle a. S. zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent F. Guarducci in Pisa zum Professor der Geodäsie an der Universität in Bologna.

— Professor G. B. Halsted in Austin zum Professor der Mathematik am „St. Johns college" in Annapolis, Md.

— Privatdozent I. Iwanoff in St. Petersburg zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent W. Kaufmann in Göttingen zum Professor der theoretischen Physik an der Universität in Bonn.

— Dr. C. J. Keyser in New York zum Professor der Mathematik an der „Columbia university" daselbst.

— Professor J. Larmor in Cambridge zum Professor der Mathematik am „Pembroke college" daselbst.

— A. T. de Lury in Toronto zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdocent J. Mechtchersky in Petersburg zum Professor der Mechanik an der technischen Hochschule daselbst.

— R. E. Moritz zum Professor der Mathematik an der Universität von Nebraska..

— Professor E. F. Nichols zum Professor der Physik an der „Columbia university" in New York.

— Professor M. B. Porter in New Haven zum Professor der Mathematik an der Universität von Texas in Austin.

— P. A. Smith an der Universität von Illinois zum Lehrer der Mathematik an der Hiroshima Normalschule in Japan.

— Dr. W. Staniewitch zum Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in St. Petersburg.

— Privatdocent M. Toepler in Dresden zum Professor der Physik an der technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent J. Tuma in Brünn zum Professor der Physik an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

— Prof. A. Voss in Würzburg zum Professor der Mathematik an der Universität in München.

Todesfälle.

— Karl Anton Bjerknes, emeritierter Professor der Mathematik an der Universität in Kristiania, geboren in Kristiania den 24. Oktober 1825, gestorben daselbst den 20. März 1903.

— Nikolaus Budajeff, emeritierter Professor der Mathematik an der Universität in St. Petersburg, geboren 1833, gestorben in St. Petersburg den 29. September 1902.[1])

[1]) Nicht zu verwechseln mit dem noch lebenden Professor Nikolaus Bugajeff in Moskau.

— Maximilian Curtze, pensionierter Gymnasialprofessor in Thorn, geboren in Ballenstedt den 4. August 1837, gestorben in Thorn den 3. Januar 1903.

— Hermann Dobriner, Oberlehrer an der Realschule „Philantropin“ in Frankfurt am Main, geboren in Schmalleningken (Ostpreußen) den 5. November 1857, gestorben in Frankfurt am Main den 25. November 1902.

— Carles Dufour, Professor der Astronomie an der Universität in Lausanne, geboren in Veytaux Oktober 1827, gestorben in Lausanne den 23. Dezember 1902.

— Norman Macleod Ferrers, „Master of Gonville and Cajus college“ in Cambridge, geboren in Prinknash Park (Glocestershire) den 11. August 1829, gestorben in Cambridge, den 31. Januar 1903.

— Estevan Antonio Fuertes, Professor der Astronomie an der „Cornell university“ in Ithaca, gestorben den 16. Januar 1903, 64 Jahre alt.

— James Glaisher, englischer Meteorolog, geboren in London den 7. April 1809, gestorben in London den 8. Februar 1903.

— Achille Goulard, Professor am Lyceum in Marseille, geboren 1860, gestorben in Marseille Oktober 1902.

— G. W. Green, Professor der Mathematik an der „Illinois Wesleyan university“, gestorben in Bloomington Ill. den 10. Dezember 1902, 45 Jahre alt.

— William Harkness, früher Direktor der „Naval observatory“ in Washington, geboren in Ecclefechan (Schottland) den 17. Dezember 1837, gestorben in New York den 28. Februar 1903.

— Pierre Laffitte, Professor für allgemeine Geschichte der Naturwissenschaften am „Collège de France“ in Paris, gestorben in Paris den 4. Januar 1903, 80 Jahre alt.

— W. J. C. Miller, Redakteur der mathematischen Abteilung der „Educational times“, geboren 1831, gestorben in Bristol den 11. Februar 1903.

— Francis Cranmer Penrose, Astronom in London, geboren in Bracebridge bei Lincoln den 29. Oktober 1817, gestorben in London den 15. Februar 1903.

— Anton Puchta, Professor der Mathematik an der Universität in Czernowitz, geboren in Altsattl bei Haid (Böhmen) den 4. März 1851, gestorben in Czernowitz den 21. Februar 1903.

— Ogden Nicholas Rood, Professor der Physik an der „Columbia university“ in New York, geboren in Donbury, Conn. den 3. Februar 1831, gestorben in New York den 12. November 1902.

— George Gabriel Stokes, Professor der Mathematik am „Pembroke college“ in Cambridge, geboren in Skreen (Irland) den 13. August 1829, gestorben in Cambridge den 1. Februar 1903.

— Franz Josef Studnička, Professor der Mathematik an der böhmischen technischen Hochschule in Prag, geboren in Janov bei Soběslav den 27. Juni 1836, gestorben in Prag den 21. Februar 1903.

— Henry William Watson, Direktor der Berkswell-Schule in Coventry, geboren in London den 25. Februar 1827, gestorben in Berkswell den 11. Januar 1903.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— Prof. Fr. Graefe hat im Wintersemester 1902—1903 an der technischen Hochschule in Darmstadt eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik gehalten.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie des sciences de Paris.* Le grand prix des sciences mathématiques a été décerné en 1902 à M. E. Vessiot à Lyon pour son mémoire sur le sujet proposé: „Perfectionner en un point important l'application de la théorie des groupes continus à la théorie des équations aux dérivées partielles.“ Une mention honorable a été accordée à M. F. Le Roux à Rennes. — Une mention honorable a aussi été accordée à M. W. de Tannenberg à Bordeaux pour son mémoire sur la question: „Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution“.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Akademie der Wissenschaften in Berlin.* Preisfrage für 1906. Die Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen, welche lineare Substitutionen zulassen, in ihren wesentlichen Teilen durch bedeutsame Fortschritte zu fördern.

— *Académie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours pour l'année 1903. Le n° 3289 des Astronomische Nachrichten indique une transformation qui appliquée au problème général des trois corps, le débarrasse des irrégularités provenant de la collision d'un de ces corps avec un des autres. Comme il y a une infinité de ces transformations, on peut espérer que dans le nombre il s'en trouve une capable de remédier également aux conséquences des autres collisions et de dégager le problème de toute singularité.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours pour l'année 1904. Perfectionner, en quelque point important, l'étude de la convergence des fractions continues algébriques. — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. — Déterminer et étudier tous les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques.

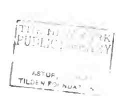
Vermischtes.

— An der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Versammlung in Karlsbad 1902 wurde von Herrn F. Klein der Plan der Begründung einer mathematischen Zentralbibliothek angeregt. Zur Erörterung dieser Frage wurde eine Kommission, bestehend aus den Herren W. v. Dyck, F. Klein, Felix Müller und A. Wangerin gewählt.

— Die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik ist vom Band 125 ab von Herrn K. Hensel in Marburg übernommen worden.

— Le congrès international d'histoire des sciences mathématiques, physiques et naturelles dont nous avons fait mention dans la Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 256, s'est tenu à Rome 2—9 avril 1903, comme 8e section du congrès international des sciences historiques. M. G. Loria a été chargé de l'organisation de la soussection pour l'histoire des sciences mathématiques.

— Un des prix de l'académie des sciences de Paris (prix Binoux, 2000 francs) sera décerné en 1903 à un auteur de travaux sur l'histoire des sciences.




P. G. Tait.

Wie soll man die Geschichte der Mathe[illegible]?

Von Moritz Cantor in H[illegible].

Der Herausgeber dieser Zeitschrift hat schon z[illegible] 2, S. 1—4 und 4_3, S. 1—6) die Frage zu beantworten [illegible] Geschichte der Mathematik behandeln solle, und hat [illegible] in etwas polemischer Weise von den bisher vorlieg[illegible] diesen Gegenstand gesprochen. Wenn er als Ergebnis [illegible] Geschichte der Mathematik sei noch nicht geschrieben, so [illegible] darin vollständig bei. Ich weiß begreiflicherweise nicht, wie andere Verfasser von Geschichten der Mathematik über ihre Schriften de[illegible] aber kenne ich mein Urteil darüber und habe verschiedentlich [illegible] daraus gemacht, wenn auch vielleicht in etwas schonenderer Form [illegible] andere Kritiker sie vorziehen. Was aber meine eigenen Arbeiten betrifft, so war ich stets überzeugt, sie stellten nur ein Erzieltes dar, welches von dem Erstrebten fern blieb, wohl auch fern bleiben mußte! Hat doch Lessing uns belehrt, er würde, wenn Gott ihm mit der einen Hand die volle Wahrheit, mit der anderen die mit Irrtum gemischte darreichte, [illegible] der letzteren greifen, welche allein dem Menschen passe. Auch Goethe hat dem gleichen Gedanken Worte verliehen, wenn er Mephistopheles [illegible] Faust sagen läßt:

> Glaub' unser einem, dieses Ganze
> Ist nur für einen Gott gemacht!
> Er findet sich in einem ew'gen Glanze,
> Uns hat er in die Finsternis gebracht,
> Und Euch taugt einzig Tag und Nacht.

Diese auf jedes menschliche Werk sich beziehende Mangelhaftigkeit macht sich in der Tat überall bemerkbar. Keine Staatsverfassung, kein Gesetzbuch ist vollkommen, kein Roman, kein Theaterstück erreicht auch nur das Ideal, welches die Zeit, innerhalb deren es entstand, als solches auffaßt; das Gleiche gilt für Schöpfungen der Musik, der bildenden Künste. Man möchte sich sogar der Unfertigkeit freuen, denn ein der Vervollkommnung nicht mehr Fähiges würde St[illegible]and und dieser den R[illegible] schließlich den Tod des Staatslebens, der Kunst, der Wissenschaft, [illegible] Einzelmenschen, des Volkes zur Folge haben. Unfertigkeit, V[illegible]





Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?

Von Moritz Cantor in Heidelberg.

Der Herausgeber dieser Zeitschrift hat schon zweimal (Biblioth. Mathem. 2_3, S. 1—4 und 4_3, S. 1—6) die Frage zu beantworten gesucht, wie man die Geschichte der Mathematik behandeln solle, nnd hat dabei natürlich auch in etwas polemischer Weise von den bisher vorliegenden Werken über diesen Gegenstand gesprochen. Wenn er als Ergebnis findet, eine ideale Geschichte der Mathematik sei noch nicht geschrieben, so pflichte ich ihm darin vollständig bei. Ich weiß begreiflicherweise nicht, wie andere Verfasser von Geschichten der Mathematik über ihre Schriften denken, wohl aber kenne ich mein Urteil darüber und habe verschiedentlich kein Hehl daraus gemacht, wenn auch vielleicht in etwas schonenderer Form als andere Kritiker sie vorziehen. Was aber meine eigenen Arbeiten betrifft, so war ich stets überzeugt, sie stellten nur ein Erzieltes dar, welches von dem Erstrebten fern blieb, wohl auch fern bleiben mußte! Hat doch Lessing uns belehrt, er würde, wenn Gott ihm mit der einen Hand die volle Wahrheit, mit der anderen die mit Irrtum gemischte darreichte, zu der letzteren greifen, welche allein dem Menschen passe. Auch Goethe hat dem gleichen Gedanken Worte verliehen, wenn er Mephistopheles zu Faust sagen läßt:

Glaub' unser einem, dieses Ganze
Ist nur für einen Gott gemacht!
Er findet sich in einem ew'gen Glanze,
Uns hat er in die Finsternis gebracht,
Und Euch taugt einzig Tag und Nacht.

Diese auf jedes menschliche Werk sich beziehende Mangelhaftigkeit macht sich in der Tat überall bemerkbar. Keine Staatsverfassung, kein Gesetzbuch ist vollkommen, kein Roman, kein Theaterstück erreicht auch nur das Ideal, welches die Zeit, innerhalb deren es entstand, als solches auffaßt; das Gleiche gilt für Schöpfungen der Musik, der bildenden Künste. Man möchte sich sogar der Unfertigkeit frenen, denn ein der Vervollkommnung nicht mehr Fähiges würde Stillstand und dieser den Rückgang, schließlich den Tod des Staatslebens, der Kunst, der Wissenschaft, des Einzelmenschen, des Volkes zur Folge haben. Unfertigkeit, Vervoll-

kommnung! Ist das nicht, oder sollte das wenigstens nicht sein, die Richtschnur jedes Verfassers, der wiederholte Auflagen eines Buches zum Drucke zu geben hat? Ich bin von der Richtigkeit dieser Tatsache so sehr überzeugt, daß mir eine ganz unveränderte neue Auflage das höchste Mißtrauen einflößt, es sei denn, sie werde nicht von dem Verfasser selbst veranlaßt, und sein Stellvertreter trage Scheu, seine eigene Meinung an die Stelle der fremden zu setzen.

Mit diesen letzten Worten habe ich einen zweiten Satz gestreift, dem ich allgemeine Gültigkeit zuschreibe, den von der Verschiedenheit des Hervorgebrachten infolge der Verschiedenheit des Hervorbringers. Si duo faciunt idem, non est idem sagten dafür die Alten, die Neuzeit spricht vom Rechte der Individualität. Jeder malt, baut, komponiert, denkt, schreibt wie seine Begabung es fordert. Wohl gibt es Regeln, denen die Lebenden einer Zeitperiode sich zu fügen mehr oder weniger stillschweigend übereingekommen sind, aber diese Regeln sind meistens Verbote, nicht Gebote, und sie gelten genau so lang wie auf ewige Zeit geschlossene Staatsverträge, nämlich bis sie gebrochen und damit abgeschafft werden.

Was folgt nun aus dem soeben Geäußerten für die Behandlung der Geschichte der Mathematik? Ich denke, man kann zweierlei folgern. Erstlich ist das höchste erreichbare Ziel nur, daß schon vorhandene Leistungen durch das neu Gebotene übertroffen werden. Zweitens kann jeder nur so schreiben, wie seine Individualität es mit sich bringt. Ich habe freilich auch in meiner Rede über mathematische Geschichtschreibung auf dem in Paris gehaltenen internationalen Mathematikerkongresse von 1900 am Schlusse angedeutet, wie ich mir die Fortführung der Geschichte der Mathematik über das Jahr 1758 hinaus denke, aber ich habe es in durchaus subjektiver Weise getan. Ich wollte nur erklären, in welcher Weise *ich* an meine drei Bände Geschichte weitere Bände als Fortsetzung anschließen würde, wenn ich jung genug wäre einen solchen Plan wirklich auszuführen.

H. Eneström unterscheidet verschiedene Arten, nach welchen Geschichte der Mathematik behandelt werden könne. Er hat darin sicherlich recht. Man kann die verschiedenen Behandlungsweisen selbst in sehr verschiedener Weise schildern, und ich gestatte mir den Gegensatz darin zu finden, daß man von der Wortverbindung Geschichte der Mathematik bald das Wort *Geschichte*, bald das Wort *Mathematik* stärker betont.

Wer das Letztere tut, der könnte vielleicht am zweckmäßigsten so verfahren, daß er die einzelnen Sätze der Mathematik in gedrängter Weise mitteilte, bei jedem Satze als Anmerkung beifügend, wann und durch wen er der Wissenschaft einverleibt worden sei. Er könnte durch geschickte Anordnung der Sätze es dahin bringen, daß zwischen den Anmerkungen scheinbar ungewollt, aber die größte Kunst des Verfassers verratend,



ein Zusammenhang sichtbar werde, aus welchem der Leser zu erkennen vermag, wie, wo, durch wen die mathematische Wissenschaft ihre Entwickelung vollzogen hat. Wir haben ein solches Beispiel der Geschichte der *Mathematik* in der großen im Entstehen begriffenen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, und ohne den übrigen Mitarbeitern an dem monumentalen Werke zu nahe zu treten, möchte ich die von H. Pringsheim bearbeiteten Abteilungen als meiner hier ausgesprochenen Meinung am meisten entsprechend hervorheben.

Etwas ganz anderes ist nach meinem schriftstellerischen Gefühle eine *Geschichte* der Mathematik. In ihr liefert die Mathematik zwar das gesamte Material, aber dessen Benutzung soll nicht ausschließlich der Mathematik zu gute kommen. Das Bild des gesamten Kulturlebens dient als Hintergrund, von welchem mathematische Charakterzüge sich hell abheben und selbst dazu dienen, jenen Hintergrund zu erhellen. *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* nannte ich 1863, also jetzt vor 40 Jahren, mein erstes geschichtliches Buch und meinte durch diesen Titel mein wissenschaftliches Glaubensbekenntnis und zugleich mein wissenschaftliches Programm zu verkünden. In der Einleitung drückte ich mich noch bestimmter aus. Ich sagte: „Wenn bei Völkerschaften eine Ähnlichkeit auf diesem oder jenem Gebiete der Geistesentwickelung stattfindet, so ist das meistens kein bloßer Zufall, sondern die Folge von gegenseitiger Einwirkung oder gemeinsamem Ursprunge." Ich setzte hinzu, diese letztere Beweisführung könne nur von der Spezialforschung geführt werden und benutzte dazu in jenem Werke die Zahlzeichen der verschiedenen Völker. Zwölf Jahre später (1875) erschienen *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst*. Auch hier wieder suchte ich nachzuweisen, wie Übungen, die bis zu einem gewissen Grade zufällige sind, z. B. Seilspannung, sich von Volk zu Volk verpflanzen und zu Belegen für den Einfluß werden, den die Kultur des einen Volkes auf die des anderen ausübte. Es war aber der gleiche Grundgedanke, der in meinem Werke von 1863 zum Ausdruck gelangt war; nur die Beweismittel waren andere geworden. H. Eneström verargt mir, daß ich gerade in den *Agrimensoren* den Römern das Erfinderrecht an gewissen arithmetischen Sätzen absprach und den Ursprung der letzteren nach Alexandria verwies. Ich könnte mich ja damit entschuldigen, vor 28 Jahren sei man in der Kenntnis des mathematischen Volkscharakters, wenn ich so sagen darf, noch nicht so weit wie heute gewesen. Hat man doch inzwischen Vieles hinzugelernt, was die damaligen Ansichten über den Haufen wirft, so das Vorhandensein der Quadratwurzel bei den Ägyptern, der Kubikwurzel bei den Griechen. Es wäre also möglich, daß inzwischen römische Arithmetiker aufgefunden worden wären, die meine damalige recht geringe

Meinung von römischen Erfindungen auf diesem Gebiete Lüge straften. Nur ist dem nicht so! Ich bedarf daher bis auf weiteres jener Entschuldigung nicht, ich gestehe vielmehr, daß ich heute noch den gleichen Satz hinschreiben würde, wie er 1875 meiner Überzeugung entsprach. Ich halte überhaupt, heute wie früher, Hypothesen geschichtlicher Natur für gerechtfertigt und sogar für nützlich unter zwei Voraussetzungen, die eine, daß die Hypothese sich auf irgendwelche Tatsachen stütze, die andere, daß man nicht weiter darauf baue, ohne des ausschließlich hypothetischen Fundamentes sich bewußt zu bleiben. Den Nutzen solcher Hypothesen sehe ich darin, daß sie der Spezialforschung, welche um so häufiger, je älteren Datums die vermuteten Tatsachen sind, von Nichtmathematikern geübt wird, einen Fingerzeig gibt, worauf sie etwa achten sollen. So können nicht minder Bestätigungen als Widerlegungen der Hypothese gewonnen werden, die ich beide als wertvoll erachte. Ich hatte, um von Beidem ein Beispiel anzugeben, in Anlehnung an ALBR. WEBER das Zeitalter einiger Verfasser von *Çulvasûtras* viel zu tief angesetzt und darauf gestützt die dort vorhandenen geometrischen Tatsachen, insbesondere den Satz vom rechtwinkligen Dreieck, als aus Griechenland eingeführt, angenommen; nachdem die Herren L. V. SCHRÖDER und ALBERT BÜRK das Datum jener Anweisungen zur Herstellung von Altären bis jenseits PYTHAGORAS hinaufgerückt haben, ist meine frühere Auffassung unmöglich geworden und hat einer anderen Platz gemacht, von der zunächst einige Spezialisten Kenntnis erhalten haben, die ich aber bei gegebener Gelegenheit auch der Öffentlichkeit zu übergeben keinen Anstand nehmen werde. Ich hatte andererseits angenommen, PYTHAGORAS habe die Tatsache, daß $3^2+4^2=5^2$, entweder selbst zuerst bemerkt oder aus Ägypten mitgebracht und Graf SCHACK-SCHACKENBURG hat diesen Satz weit vor PYTHAGORAS in Ägypten gefunden. Diese Bestätigung war mir vielleicht angenehmer als jene Widerlegung, aber für die Wissenschaft waren beide gleich wertvoll.

Die bisherigen Bemerkungen knüpften noch nicht an meine *Geschichte der Mathematik*, welche erstmals 1880—1888, in zweiter Auflage 1894—1901 die Presse verließ, und deren Darstellungsweise ich bis zu einem gewissen Grade erklären möchte. Ich sagte oben, jeder könne nur so schreiben, wie seine Individualität es mit sich bringe. Konnte *ich* aber anders schreiben als ich es getan habe? Ich bin fest überzeugt, die Leser meiner Schriften von 1863 und von 1875 wären sehr erstaunt gewesen, wenn sie in dem größeren darauf folgenden Werke den allgemeingeschichtlichen wie den kulturhistorischen Hintergrund hätten vermissen müssen, wenn nicht auch Biographisches, wenigstens in solcher Ausdehnung als zur Kenntnis der Arbeitsweise der hervorragendsten Schriftsteller notwendig ist, vorkäme. Daß diese Darstellungsweise nicht allgemeine Mißbilligung

fand, das könnte ich vielleicht aus dem verhältnismäßig so sehr raschen Absatze der ersten Auflage schließen, wenn ich eine Rechtfertigung beabsichtigte, was mir durchaus fern liegt.

Ich stelle keineswegs in Abrede, man könne eine ganz andere Geschichte der Mathematik schreiben, man könne dabei auch von dem oben erwähnten Beispiele der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* abweichen, nur konnte ich nicht der Verfasser einer solchen Geschichte sein, um so weniger als es meines Wissens kein Muster gibt, nach welchem ich mich zu richten im Stande gewesen wäre; ein Muster aber ist bloßen Ratschlägen immer vorzuziehen, und nicht umsonst antwortete jener Römer: Hic Rhodus, hic salta!

Ein einziger Punkt ist es, auf welchen ich noch eingehen möchte. H. Eneström betont den Unterschied der Darstellungsweise je nachdem ältere oder spätere Zeiten in Frage kommen. Das, was er die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik nennt, verschwinde mehr und mehr, je näher man der Neuzeit rücke. Das ist vollständig wahr, aber ich glaube, es muß so sein! Ganz voneinander unabhängig war die Entwickelung räumlich benachbarter Völker niemals, die gegenseitige Einwirkung bildet ja geradezu den Kern meines wissenschaftlichen Glaubensbekenntnisses. Allein immerhin waren scheidende Grenzen vorhanden, die es gestatten von der Entwickelung dieses oder jenes Volkes für sich zu reden. Der Erfinder der Buchdruckerkunst riß die Grenzpfähle aus der Erde. Die Freizügigkeit der Gelehrten, welche bald da, bald dort lernend oder lehrend sich niederließen, vollendete das, was man das Weltbürgertum der Wissenschaft nennen könnte. Darin liegt auch die Widerlegung des Einwurfs, mit dem gleichen Rechte, mit welchem den Römern die arithmetischen Sätze des Epaphroditus abgesprochen werden, könne man leugnen, daß Johann Bolyai die absolute Geometrie aus eigenem Geiste schöpfte. Johann Bolyai war in der Tat nicht ganz unabhängig! Er war der Sohn und Schüler seines Vaters, dieser der Freund und Studiengenosse von Gauss in Göttingen, Göttingen der Sitz von Untersuchungen über die Parallelentheorie. Ich will gewiß den Ruhm Johann Bolyais, der weit über seinen Vater hinausging, nicht schmälern, aber wer möchte zweifeln, daß fremde Keime bewußt oder unbewußt in seinem Geiste fruchtbringend wurden? Johann Bolyais Leistung beweist, was sie nach H. Eneströms Meinung als unstatthaft zeigen soll, das heimliche Fortwuchern von Gedanken bis sie in geeignetem Boden zur Entwickelung gelangen, beweist den fesselnden Reiz der Erforschung jener unterirdischen Wurzeln. Gerade darin besteht aber die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Zu dem Berichte des Simplicius über die Möndchen des Hippokrates.

Von WILHELM SCHMIDT in Helmstedt.

Bis vor kurzem herrschte bekanntlich über SIMPLICIUS die Auffassung, daß er zwar ein verständiger Philosoph, aber ein ungeschickter Geometer sei; auf dem schwierigen Gebiete *abstrakter* Spekulation gestand man ihm also ein selbständiges Urteil zu, bei der leichteren Betrachtung elementarer *konkreter* Gebilde versagte man es ihm. Da erschien RUDIOS Abhandlung *Der Bericht des SIMPLICIUS über die Quadraturen des ANTIPHON und des HIPPOKRATES* (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 7—62),[1]) welche die Grundlagen der bisherigen ungünstigen Beurteilung unter gründlicher Erläuterung des ganzen Berichtes des SIMPLICIUS und unter Prüfung aller einschlägigen Fragen erschütterte. Freilich meint TANNERY, *SIMPLICIUS et la quadrature du cercle* (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 342—349), dadurch sei an der Sache nicht viel geändert. So sehr ich nun auch die großen Verdienste dieses Gelehrten um die Geschichte der exakten Wissenschaft und die der antiken Mathematik insbesondere zu schätzen und mich sonst auch vielfach in Übereinstimmung mit ihm weiß, so muß ich ihm hier widersprechen. Denn erstens, ist es wirklich so unerheblich, von den zahlreichen Irrtümern BRETSCHNEIDERS, auf den die Mehrzahl der Historiker der Mathematik zurückgeht, viele bisher nicht beachtete berichtigt zu haben? Sodann aber läßt sich entschieden die bisherige Gesamtauffassung nicht halten. Kann es auch etwas Natürlicheres geben als daß ein anerkannt tüchtiger Philosoph seine Urteilsfähigkeit erst recht bei konkreten Größen nicht verleugnet?

Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir versuchen, durch Betrachtung eines Abschnittes, der von den bisher erörterten Fragen des SIMPLICIUSschen Berichtes aus HIPPOKRATES-EUDEMOS unabhängig ist, zunächst einen festen Boden zu gewinnen.

1) Diese Abhandlung wird im folgenden kurz als „*Der Bericht*“ zitiert.

1. Ich wähle dazu 58, 1 ff. (bei Diels; = Rudio, *Der Bericht*, S. 15, Z. 6 ff. v. u.).[1])

(58, 1 Diels:) „Es gibt aber noch eine solche Beweisführung, die den Kreis durch Möndchen zu quadrieren glaubt, eine einfältigere und obendrein eine, die (von Alexander) nicht darauf hin geprüft wird, wodurch eigentlich der Trugschluß in ihr entstanden ist.[2]) (58, 3 D.:) Diejenigen nämlich, die eine Quadratur des Möndchens über der Seite des Quadrates fanden, glaubten auch dadurch die Quadratur des Kreises gefunden zu haben, in der Meinnng, daß der ganze Kreis in Möndchen zerlegt werden könne. Denn indem sie das dem Möndchen gleiche Quadrat so oft vervielfachten, als die Anzahl aller der Möndchen beträgt, in die der Kreis zerlegt worden ist, glaubten sie, daß das diesen Möndchen gleiche Quadrat anch dem Kreise gleich sei, indem sie dabei fälschlich annahmen, daß der ganze Kreis in Möndchen zerlegt werden könne. Denn bei der Zerlegung des Kreises in die Möndchen bleibt immer inwendig ein mittleres, nach beiden Seiten ausgebogenes Stück übrig, das von den auf beiden Seiten befindlichen Umrissen des Möndchens eingeschlossen ist. Und da dieses weder ein Möndchen ist noch quadriert wird, so dürfte wohl auch der ganze Kreis nicht quadriert werden. (58, 13 D.:) Nicht geschickt aber ist der Einspruch gegen die so beschaffene Quadratur.[3]) Denn wer (einmal wirklich) den Kreis durch die Möndchen quadriert, für den ist es *noch kein* Vorteil, den ganzen Kreis in Möndchen zu zerlegen. Denn selbst dann nicht einmal, wenn dies möglich wäre, selbst dann nicht wird auf diese Weise der Kreis durch die Möndchen quadriert; denn nicht von jedem Möndchen wurde bewiesen, daß es quadriert werde (58, 17 Diels).“

So muß die Übersetzung dieses Abschnittes lauten; daran ist nicht zu rütteln. Ferner stellen wir fest, daß 58, 1—2 eine Bemerkung des Simplicius und 58, 3—12 ein freies Referat desselben aus Alexander ist (so auch Rudio). Mit 58, 13 setzt die weitere Kritik des Simplicius ein; darin herrscht Übereinstimmung.

Welche Folgerung ergibt sich nun aus obigen Worten? Daß Alexander sich der Situation nicht gewachsen zeigt, daß er den springenden Punkt bei dem Fehlschlnsse nicht erfaßt hat. Simplicius dagegen

1) Ich benutze hierbei Rudios Übersetzung, indem ich die wenigen von mir vorgenommenen Änderungen in gesperrtem Drucke gebe. Mit den Änderungen erklärt sich auch Rudio völlig einverstauden.

2) Ich lese mit den Hss. παρά-τί (infolge wovon).

3) Ἔνστασις ist mathematischer und philosophischer Terminus technicus für „Widerspruch“ u. dgl. Wer Belege verlangt, findet sie dutzendweise bei Simplicius *Phys.* u. sonst, Proklos *In Euclid.*, Sextus Empiricus u. a.

hat den Kern der Sache getroffen, indem er mit allem Nachdruck darauf hinweist, daß mit dieser Quadratur, die Möglichkeit der Zerlegung des Kreises in *n* Möndchen vorausgesetzt, nichts gewonnen sei, da sie ja die Art des Möndchens außer acht lasse. Man könne doch eben nur das Möndchen über der Quadratseite quadrieren, nicht jedes beliebige Möndchen. Daß Alexander dieses Sachverhältnis in seiner Kritik unterlassen hat hervorzuheben, damit ist Simplicius unzufrieden. Während Alexander in breiter Ausführung das Trügerische der Voraussetzung nachzuweisen sucht, so erscheint dies dem Simplicius als etwas Sekundäres, ja als etwas Gleichgültiges, jedenfalls nicht als das Entscheidende. Und darin hat er recht. Er selbst quält sich daher auch gar nicht damit ab, wie man sich überhaupt eine Zerlegung in *n* Möndchen + Mittelstück (*τι ἐντὸς μέσον ἀμφίκυρτον*) vorstellen soll, obwohl er andeutet, daß er so etwas eigentlich für unmöglich hält.

Ich sollte meinen, daß sich Simplicius hier in sehr günstigem Lichte zeigt. Wäre er der ungeschickte Mathematiker, für den man ihn vor Rudio auszugeben beliebte, so würde er sich vielleicht mit Alexanders Kritik begnügt haben. So aber ist Simplicius beinahe unwillig darüber, wie wenig Alexander die Hauptsache erkannt hat.

Eine weitere Stelle, die das selbständige Urteil des Simplicius dartut, ist das Zwiegespräch zwischen Ammonius und Simplicius. Diese Stelle ist zwar im Hinblick auf das *ὅσον ἐπὶ τούτῳ* (soweit es darauf ankommt) von Tannery bemängelt, aber meines Erachtens muß man auch hier anerkennen, daß Simplicius, wie Rudio (*Zur Rehabilitation des Simplicius;* Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 13—18) treffend nachgewiesen hat, die Sache gut begriffen hat.

Nachdem wir nun gesehen haben, daß es dem Simplicius auch in mathematischen Dingen gar nicht an einem gesunden Urteile fehlt, wird es nicht mehr erlaubt sein, überall wo man im Texte geglaubt hat Anstöße zu finden, sie ohne weiteres auf Rechnung der Ungeschicklichkeit des Simplicius zu setzen. Vielmehr haben wir nns zu fragen, ob an den angefochtenen Stellen nicht durch anderweitige Erklärung oder durch leichte Änderung des Textes die angebliche Ungeschicklichkeit beseitigt werden kann.

2. Da ist nun zunächst von Tannery S. 344 auf 55, 16 (Diels) *ἀρχὴν εἶναι* verwiesen. Daß *ἀρχὴν* hier nicht „Grundsatz“ bedeuten kann, liegt auf der Hand. Es heißt, wie schon Rudio (*Der Bericht*, Anm. 31) ahnte („prinzipiell“), „überhaupt, durchaus“, namentlich wie hier bei negativen Begriffen. Abgesehen von der stilistischen Härte, welche die erste Auffassung mit sich brächte, ist der Gebrauch von *ἀρχὴν* in der zweiten Bedeutung nicht nur sonst etwas Gewöhnliches, sondern auch dem Simplicius



selber durchaus geläufig. Das *εἶναι* vor *εὐθεῖαν* alsdann zu streichen bietet wegen des unmittelbar vorhergehenden *εἶναι* keine Schwierigkeit, zumal ja die Überlieferung in der Aldina abweicht; es ist durch Verschreiben wiederholt. Simplicius hat also ohne Zweifel gesagt: „Besser ist es also zu sagen, es sei überhaupt unmöglich, daß eine Gerade sich mit einem Kreisbogen decke".[1]) Somit hat der mit *οὐχ ὡς . . . φησιν* begonnene zielbewußte Anlauf einen durchaus wirksamen Abschluß.

3. Ferner hat Tannery 69, 31 das *ἀορίστων* („auf unbestimmten Sehnen") dem Simplicius zur Last gelegt. Wie aber der Zusammenhang lehrt, will Simplicius beweisen, daß Hippokrates die innere Peripherie der Möndchen nicht unbestimmt gelassen habe. Ihre Bestimmtheit ergebe sich aus der Ähnlichkeit des inneren Segmentes mit den äußeren oder, was dasselbe ist, aus dem gegenseitigen Verhältnisse der Quadrate ihrer Sehnen. Bei den (äußeren) Segmenten über den Seiten eines Quadrates der ersten Quadratur des Hippokrates ist nun dieses Verhältnis allgemein gegeben, bei den anderen Quadraturen ist es in jedem Einzelfalle näher bezeichnet. Dadurch ist ja tatsächlich auch die innere Peripherie bestimmt. Wie kann daher Simplicius gesagt haben, die äußeren Segmente der zweiten bis vierten Quadratur lägen auf unbestimmten Sehnen? Nein, das scheint mir in Anbetracht dessen, was er beweisen wollte und konnte und was er doch wahrlich mit hinreichender Deutlichkeit ausgesprochen hatte, geradezu ausgeschlossen. Daß der Fehler in den Worten *ἐπὶ ἀορίστων* einem Abschreiber, nicht dem Simplicius anzurechnen ist, beweist sonst auch 69, 34 das *ὡρισμένοις*. Ich zweifle nicht, daß es 69, 31 ursprünglich *ἐπὶ ⟨οὐκ⟩ ἀορίστων* hieß: „auf nicht unbestimmten Sehnen", d. h. auf Sehnen, die in der mathematischen Kunstsprache zwar keinen bestimmten Namen haben, aber gleichwohl nicht willkürlich, sondern durchaus bestimmt sind.[2]). Ob nicht auch 69, 34 das *ὡρισμένοις πως* („irgendwie bestimmt" Rudio) aus *ὡρισμένοις πάντως* („durchaus bestimmt") entstellt ist, steht dahin; Rudio glaubt, daß *πάντως* gut zu *καὶ αὐτοῖς* (= et ipsis ebenfalls) passe.

4. Die Schwierigkeiten sodann, welche entstehen, wenn man 61, 12/13 *τμήματα* als „Segmente" faßt, sind unverkennbar. Zwei Segmente daraufhin zu prüfen, ob sie n^{te} Teile eines Kreises seien, war gewiß für die Zeit des Hippokrates unmöglich. Die Vermutung aber, daß es in älterer Zeit kein besonderes Wort für „Sektor" gegeben habe, scheint mir sprachlich keineswegs zu gewagt, hier sachlich notwendig. Da S. 61 (Diels)

1) Der Text lautete also ursprünglich: *ἀρχὴν εἶναι ἀδύνατον τὸ εὐθεῖαν ἐφαρμόσαι περιφερείᾳ.* Umstellungen wie *τὸ ἀδύνατον* statt *ἀδύνατον τὸ* sind in den Hss. unzählig.

2) Vgl. zum Ausdruck Simpl. *Phys.* 24, 28: *οὐκ ἀόριστον.*

vorher und nachher τμήματα stets im Sinne der Segmente gebraucht wird, so müßte allerdings Hippokrates, um seinen Lesern verständlich zu werden, nebenbei einen Hinweis gegeben haben, um anzudeuten, daß die τμήματα hier im Sinne der Sektoren gemeint sind. Dieser Hinweis scheint mir nun tatsächlich in dem Zusatze τριτημορίῳ (Drittelkreis) zu liegen. Wie soll man sich damals einen Drittelkreis anders als einen Sektor von 120° vorgestellt haben! Wird doch auch der Viertelkreis, τὸ τεταρτημόριον, nur als Sektor von 90° gedacht! Nicht minder zeigt das διὸ und der Hinweis auf die gleichen Winkel, daß dem Hippokrates die Beziehung des Peripheriewinkels zum Zentriwinkel bekannt war. Wie hätte denn Hippokrates ohne diese Kenntnis seinen Satz von der Proportionalität der Segmente und der Quadrate ihrer Grundlinien in elementarer Weise beweisen können? Freilich hieß der Sektor später regelmäßig τομεύς, und wenn es bei Archimedes, *Opera* ed. Heiberg, I, 184, 16 τμήματος statt τομέως überliefert ist, so ist es mit Recht verbessert worden. Aber daß τμῆμα trotzdem in weiterem Sinne, nicht bloß in dem des Segments gebraucht worden ist, zeigt doch 55, 27 die Bezeichnung des Möndchens als τμῆμα, wie Rudio (*Der Bericht*, Anm. 37; *Zur Rehabilitation des Simplicius* S. 17) mit Grund hervorhebt. Wenn nun wirklich an den fraglichen Stellen die Bedeutung Sektor zu Grunde liegt, so versteht sich von selbst, daß der Bericht des Eudemos nicht erst 61, 14, sondern 61, 11 mit ὡς γὰρ einsetzt. Gehörten die Worte von ὡς γὰρ bis διὸ dem Simplicius, so wäre es unbegreiflich, weshalb er hier eine so ungeschickte Definition der ähnlichen Segmente vorausschickte, da ihm doch die richtige des Euklid 61, 32 bekannt ist.

5. Bei dem dritten Möndchen (65, 7—23 Diels) ist es augenscheinlich, daß der Kernpunkt der Beweisführung die Ähnlichkeit der beiden inneren mit den drei äußeren Segmenten ist (abgesehen von dem gegenseitigen Verhältnis der beiderseitigen Sehnen). Es ist Rudios Verdienst, dies betont zu haben. Ein Zweifel daran ist nicht erlaubt; die Sache ist ja evident. Nur fragt es sich, ob die Herstellung des genauen Wortlautes möglich ist. Usener und Rudio verschieben einen Satz; darin kann ich nichts Gewaltsames finden. Der Satz war vermutlich zuerst durch ein Versehen ausgelassen, dann an ungenauer Stelle auf dem Rande nachgetragen und ist darauf von dem nächsten Schreiber an falscher Stelle eingeschoben. Mir scheint nichts sicherer als die Rückversetzung jenes Satzes an seine ursprüngliche Stelle. Ebenso wenig gewaltsam ist ferner 65, 7 die Annahme einer Lücke. Statt der von Rudio (*Der Bericht*, S. 56) vorgeschlagenen Ergänzung könnte man, da 65, 8 ὅμοιον im Singular steht, auch an eine Ergänzung denken, die diesem Umstande Rechnung trüge, z. B. unter Verwendung des Ausdruckes ⟨ἑκάτερον τῶν⟩ *EZ ZH* ὅμοιον „jedes der (beiden Segmente)

EZ ZH ähnlich usw." [1]) Fraglich bleibt freilich der weitere Wortlaut. RUDIO glaubt, daß ⟨δῆλον ὅτι ἑκάτερον τῶν⟩ *EZ ZH* ὅμοιον usw. ausreiche, der Sache nach; zu dem Wortlaute hat er sich noch nicht endgültig bekannt. Dabei bleibt es dem Leser überlassen, den Grund für die Ähnlichkeit der Segmente selber zu finden. Wenn das für HIPPOKRATES auch aus der Figur hervorging, dürfen wir das auch für die Leser des EUDEMOS ohne weiteres voraussetzen? Man vermißt die Angabe des Grundes doch ungern. Und ich weiß nicht, ob RUDIOS Hinweis (*Der Bericht*, S. 48) auf das ungleiche Verhalten des EUDEMOS bei der Quadratur des Möndchens, die er das eine Mal übergehe, das andere Mal demonstriere, genügt, um das Schweigen des EUDEMOS bezw. das Fehlen der Begründung in unsern Texten zu erklären. Aber weitere Möglichkeiten, die Lücke zu ergänzen, namentlich eben durch eine entsprechende Begründung der Ähnlichkeit der Segmente, mögen unerörtert bleiben, da sie für die Hauptsache von untergeordneter Bedeutung sind.

6. Hinsichtlich des Abschnittes 66, 14 ff. (DIELS = RUDIOS Übersetzung S. 23, Z. 7 v. u.) hält RUDIO an der in Anm. 95 S. 57 gegebenen Auffassung fest. Er weist also 66, 14 (ὅτι δὲ ἀμβλεῖα = RUDIO 23, Z. 7 v. u. „Daß aber der Winkel") bis 66, 22 (δυνάμει = RUDIO 24, Z. 2 v. o. „zu *KZ*") auch jetzt noch dem SIMPLICIUS zu. Dem hat bereits TANNERY widersprochen. Daß SIMPLICIUS vereinzelt die alte Weise der Buchstabenbezeichnung angewandt haben könne, gibt TANNERY zu, mit gutem Grunde; denn es läßt sich z. B. aus SIMPLICIUS, *Phys.* 674, 11 (κενὸν τὸ ἐφ' οὗ Z) nachweisen, daß dieser die ältere Ausdrucksweise gebraucht hat, selbst wo seine Vorlage (ARISTOTELES, *Phys.* 215^b 23 hat τὸ Z κενόν!) ihn nicht dazu nötigte, vorausgesetzt, daß er nicht etwa eine andere Lesart in seiner AISRTOTELES-Ausgabe gehabt hat als wir. Aber einen Abschnitt, in dem wie hier die alte Ausdrucksweise so häufig wiederkehre, dem SIMPLICIUS zuzuweisen, scheint TANNERY „alle Grenzen zu überschreiten". RUDIO meint dagegen, ob einmal, ob sechsmal, das sei einerlei. Aber noch ein weiteres Bedenken hat TANNERY. 66, 14/15 wiesen die Worte: „zeigt er so" (δείκνυσιν οὕτως) darauf hin, daß diese Worte nicht von SIMPLICIUS stammen könnten. Dem muß man zustimmen. Ehe ich TANNERYS Ausführungen gelesen hatte, habe ich dasselbe Bedenken gehabt und konnte in dem Subjekte von δείκνυσιν (zeigt er) nur die Quelle des SIMPLICIUS, nämlich EUDEMOS erkennen. Wenn SIMPLICIUS 66, 17 das ὡς δείξω (wie ich zeigen werde) gehörte, so hat er seine Absicht nicht zur Ausführung gebracht, er müßte also den Nachweis der Stumpfheit des Winkels *Z* ver-

1) Die Hss. schreiben vielfach beispielsweise *ΔZΓ* statt *ΔZ ZΓ*. Warum soll hier nicht das noch vorhandene, im Texte mit Unrecht eingeklammerte *EZH* als *EZ ZH* gemeint sein?

gessen haben, während er 63, 8 die Stumpfheit von ΓAB erwiesen hat. Gehört es, wie ich glaube, dem Hippokrates-Eudemos, so könnte die angekündigte Beweisstelle beim Exzerpieren ausgefallen sein. Das „Folglich" (66, 21 ὥστε, Rudio 24, 2) in unmittelbarem Anschlusse an 66, 12 (ἀμβλεῖαν εἶναι, Rudio 23, 10 v. u. „ein stumpfer ist") ist ohne Zweifel unlogisch. Einige Mittelglieder müßten jedenfalls, wie auch Rudio (*Der Bericht*, S. 59) zugibt, bei Hippokrates-Eudemos gestanden haben. Daraus würde folgen, daß Simplicius nicht bloß wie sonst seinem Exzerpt etwas hinzugefügt, sondern den Wortlaut selber auch wesentlich umgestaltet hätte. Rudio bürdet seinem Schützlinge damit eine willkürliche Behandlung des Eudemos auf. Ein solches Verfahren des Simplicius widerspricht aber seiner 60, 28 deutlich ausgesprochenen Absicht, nur wenige Zusätze zu machen (ὀλίγα τινα προστιθεὶς ⟨εἰς⟩ σαφήνειαν). Rudios Unvermögen, bei seiner Auffassung den Text des Eudemos herauszuheben, spricht nicht für ihre Richtigkeit.

Der Beweis, den Rudio unter Verwendung der in den Hss. stehenden Relation $BE > 2\,BZ$ entwickelt, ist freilich korrekt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich $EK \cdot BK = EB \cdot KZ$ und weiter unter Heranziehung der Relationen $BK = KE$ und $BE > 2BZ$ (weil $KB > BZ$, $EZ > EK$, also $EZ > BZ$) die Relation $EK^2 > 2KZ^2$. Indessen wird auch hier die Stumpfheit des Winkels Z nicht bewiesen, sondern nur als bewiesen angenommen.

Diesen ganzen Beweis anderseits für Hippokrates in Anspruch zu nehmen, ist auch nicht zulässig. Rudio meint, Hippokrates habe die Relation $BK^2 > 2KZ^2$ aus der Figur entnommen. Das ist für jemand, zu dessen alltäglichem „Handwerkszeuge" der Satz gehörte, daß die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite in der Potenz größer ist als die beiden anderen zusammengenommen, nicht so unwahrscheinlich.

Unter diesen Umständen möchte ich für Hippokrates-Eudemos folgenden Wortlaut vorschlagen (66, 14 ff. Diels; = Rudio 23, Z. 7 v. u.): „Daß aber der Winkel EKH stumpf ist, beweist er so: Da die Gerade EZ in der Potenz andertbalbmal so groß ist als die Radien, die Gerade KB aber größer ist als die Gerade BZ, weil auch der Winkel bei Z größer ist, wie ich zeigen werde, und anderseits BK gleich KE ist, so ist klar, daß (66, 18 Diels:), *wenn* die Gerade BK mehr als doppelt so groß (in der Potenz) als die Gerade BZ, (wenn) also auch die Gerade KE mehr als doppelt so groß in der Potenz ist als KZ, während die Gerade EZ in der Potenz anderthalbmal so groß ist als die Gerade EK, (so ist klar,) daß also die Gerade EZ in der Potenz größer als die Geraden EK und KZ zusammen".

Damit hätten wir für Hippokrates-Eudemos folgende Relationen:

$$
\begin{array}{l}
1)\ EZ^2 = \tfrac{3}{2} EK^2 \\
2)\ KB > BZ, \text{ weil } Z > R \\
3)\ BK = KE \\
\hline
4)\ BK^2 > 2BZ^2 \\
5)\ KE^2 > 2KZ^2 \\
6)\ EZ^2 = \tfrac{3}{2} EK^2 \\
\hline
\quad EZ^2 > EK^2 + KZ^2
\end{array}
$$

Es ist augenscheinlich, daß diese Ordnung der Relationen auch für Hippokrates die denkbar kürzeste war. In 4) hätte Hippokrates von vornherein auch $BK^2 > 2KZ^2$ schreiben können. Daß er den Leser an Relation 1)—3) erinnert, ist wohl auch natürlich. 66, 18 sagt Hippokrates nicht „weil“ (*διότι*), sondern „wenn“ (*ἐάν*), weil er eben die Stumpfheit des Winkels in Wirklichkeit noch nicht erwiesen hat, sondern erst erweisen wollte (*ὡς δείξω*), aber schon jetzt als erwiesen annimmt.

Diese kurze Fassung läßt sich freilich nur unter einiger Änderung des Textes gewinnen. Indem ich für die Einzelheiten auf den griechischen Text[1]) verweise, genügt es hier zu bemerken, daß sie im wesentlichen der Ausscheidung der Ähnlichkeit der Dreiecke verdankt wird, also der Ausschaltung der Worte: (66, 20 Diels; = 24, 1 Rudio) „wegen der Ähn-

1) Der griechische Text hekommt danach folgendes Anssehen: 66, 15 *ἐπεὶ ἡ μὲν ἐφ' ἧ EZ ἡμιολία ἐστὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει, ἡ δὲ ἐφ' ἧ KB μείζων τῆς ἐφ' ἧ BZ, διότι καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Z μείζων, ὡς δείξω, ἴση δὲ ἡ BK τῇ KE, φανερὸν ὅτι.* (66, 18:) *ἐὰν* (statt *κἂν*) *ἡ ἐφ' ἧ BK* (Usener statt *BE*) *μείζων ᾖ τῆς ἐφ' ἧ BZ ἢ διπλασία* [*μήκει*] *καὶ* (66, 19:) *ἡ ἐφ' ἧ KE* [*ὥστε*] *τῆς ἐφ' ἧ KZ ἄρα μείζων ἢ διπλασία* [*μήκει* (66, 20) *καὶ*] *δυνάμει*, [*διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων τῶν BEK BKZ* . (66, 21) *ἔστι γὰρ ὡς ἡ EB πρὸς BK, οὕτως ἡ EK πρὸς KZ · ὥστε ἡ ἐφ'* (66, 22) *ἧ EK μείζων ἐστὶ τῆς ἐφ' ἧ KZ ἢ διπλασία δυνάμει*], *ἡ δὲ ἐφ' ἧ* (66, 23) *EZ ἡμιολία δυνάμει τῆς ἐφ' ἧ EK*, (hier beginnt der Folgerungssatz) *ἡ ἄρα ἐφ' ἧ EZ μείζων ἐστὶ δυνάμει τῶν ἐφ' αἷς EK, KZ.* Alle eingeklammerten Worte sind fremde Zutat. Die Entstehung der Textverderbnisse denke ich mir so: Das unsinnige *μήκει καὶ* 66, 19 20 ist durch Verschreiben eines mit dem Auge anf das erste *διπλασία* 66, 18 abirrenden Schreibers entstanden. Ursprünglich stand freilich 66, 18 nach *διπλασία* weder *μήκει* noch *δυνάμει*, vielmehr war bei dem engen Znsammenhange der 66, 18/19 stehenden Relationen, wie auch sonst zuweilen, *δυνάμει* aus 66, 20 zu ergänzen. Aber gerade der Umstand, daß diese Ergänzung nicht erkannt wnrde, war für einen nnwissenden Schreiher die Veranlassnng gewesen, 66, 18 *μήκει* zn interpolieren. So entstand die nnsinnige Relation $BK > 2BZ$. Ein anderer, mehr mathematisch gebildeter Schreiber erkannte die Unrichtigkeit dieser Relation, änderte *BK* in *BE* und fügte, um die nene Relation $BE > 2BZ$ mit der von ihm erkannten Ähnlichkeit der Dreiecke zwecks eines Beweises für die Relation $EK^2 > 2KZ^2$ zu kombinieren, 66, 20 die Worte *διὰ τὴν ὁμοιότητα . . . δυνάμει* 66, 22 hinzn. Daß die Überlieferung des Textes ohne Änderungen nicht zn halten ist, darüber sind alle (Usener-Diels, Tannery, Rudio) einig. Anf die Zahl der Änderungen kommt es dabei nicht an; entscheidend ist die sachliche Notwendigkeit nnd sprachliche sowie paläographische Wahrscheinlichkoit.

lichkeit der Dreiecke BEK und BKZ. Denn so wie EB zu BK, ebenso verhält sich EK zu KZ. Folglich ist die Gerade EK in der Potenz mehr als doppelt so groß als die Gerade KZ". Aber statt der Relation $BK^2 > 2BZ^2$ hatte sich durch einen unwissenden Interpolator — Spuren von Interpolation liegen klar zu Tage — die unmögliche Relation $BK > 2BZ$ eingeschlichen. Die Unrichtigkeit derselben erkannte ein mathematisch gebildeter Interpolator, änderte sie in $BE > 2BZ$, da er aus der Voraussetzung die Relationen $BK = KE$, $KB > BZ$ und $EZ > EK$ kannte, und kombinierte folgerichtig damit die von ihm erkannte Ähnlichkeit der Dreiecke, um die Relation $EK^2 > 2KZ^2$ zu erweisen. Dieser Interpolator hatte also schon gar nicht mehr den originalen Wortlaut des Hippokrates, wie wir ihn annehmen, vor Augen.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß wir auf diese Weise einen wirklichen Text für Hippokrates-Eudemos bekommen, wie ihn sachliche Erwägungen zu fordern scheinen, während Rudio (vgl. Übers. Anm. 95, S. 59) ihm ohne die durchgreifendsten, mehr oder weniger der Willkür unterworfenen Änderungen von 66, 14 bis 66, 21 auch nicht ein einziges Wort zuzuweisen vermag.

Für die Beurteilung sei es der Selbständigkeit des Urteils, sei es der vermeintlichen Ungeschicklichkeit des Simplicius aber kommt der hier behandelte Abschnitt überhaupt nicht in Frage. Denn auch Tannery ist gerecht genug, „die offenkundigen Fehler (des Textes) nicht auf Rechnung des Kommentators zu setzen“.

Der Verfasser des Buches „Gründe der Tafeln des Chowârezmî".

Von Heinrich Suter in Zürich.

In meinen *Nachträgen und Berichtigungen* zu dem Buche *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, die in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, **14**, 1902, p. 157—185, erschienen sind, habe ich p. 170 einen Zusatz zu Art. 218 des genannten Buches über el-Bîrûnî gegeben, und darin das von ihm selbst verfaßte Verzeichnis seiner bis zum Ende des 65. Lebensjahres geschriebenen Werke nach der Textausgabe der *„Chronologie orientalischer Völker"* durch E. Sachau (p. XXXVIII—XLVIII) teilweise aufgenommen. Als erstes Werk ist hier angegeben: „Über die Fehler der Tafeln des Chowârezmî". Ich dachte im Momente der Abfassung jenes Zusatzes zu Art. 218 nicht an die *„Gründe der Tafeln des Chowârezmî,"* verfaßt von Muḥ. ben el-Muṯannâ (im hebr. Text steht el-Matanî, nicht vokalisiert)[1], und auch nicht daran, daß das arabische *'illa*, pl. *'ilal*, das ich durch „Fehler" übersetzte, auch „Ursachen, Gründe" bedeutet. Ich übersetzte auch den Titel nicht vollständig, indem ich die nachfolgenden Worte nicht für wichtig hielt, er lautet wörtlich: „Ich verfaßte zu den Tafeln des Chowârezmî ihre Gründe (Begründungen) und zeichnete auf 250 Blättern die nützlichen Fragen und richtigen Antworten (dazu) auf." Was ist dies anderes als das von Abraham ben Esra ins Hebräische übersetzte Werk *„Gründe der Tafeln des Chowârezmî"*, in Fragen und Antworten abgefaßt von dem „berühmten Mathematiker und Astronomen Muḥ. ben el-Matanî"? Dieser berühmte Mathematiker und Astronom ist also ohne Zweifel Muḥ. ben Aḥmed el-Bîrûnî, mit

1) Vergl. M. Steinschneider, *Hebr. Übersetzungen*, p. 572—574, u. Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellschaft, **24**, 1870, p. 353—356, der Name Muṯannâ ist eine Konjektur Steinschneiders. — Siehe auch meine *Nachträge u. Berichtigungen*, p. 158.

dem Beinamen Abû'l-Raiḥân, gest. 1048. — Leider ist der Anfang des hebräischen Textes der beiden noch vorhandenen Mss.[1]) in seinen Eigennamen so entstellt, daß man unsern Gelehrten kaum mehr herausfinden kann. Der Hauptname „Muḥammed“ ist allerdings vorhanden (wenigstens im Ms. von Parma, dasjenige von Oxford scheint eine andere Übersetzung, oder eine starke Umarbeitnng derjenigen Ibn Esras zu sein); dann folgt „ben el-Matanî“; ich vermute nun, ohne übrigens denjenigen vorgreifen zu wollen, die mit der hebräischen Paläographie besser bekannt sind als ich, daß nach „ben“ ausgefallen sei „Aḥmed“, nnd daß „el-Matanî“ entstanden sei aus „el-Bîrûnî“; dies liegt nicht so weit ab: das hebräische *î* nach dem *b* kann mit letzterem leicht zu *m*, und das *û* nach dem *r* mit letzterem leicht zu *t* verschmolzen sein; vielleicht findet ein anderer als ich in den übrigen hebräischen Namen anch noch die Kunje el-Bîrûnîs, Abû'l-Raiḥân heraus; von einem Vater- oder Großvaternamen ʿAbdelkerîm wissen die arabischen Qnellen nichts.

El-Bîrûnî war bekanntlich über die wissenschaftlichen Kenntnisse der Inder sehr gut unterrichtet, und selbst einer der größten nnd gründlichsten Gelehrten, die in arabischer Sprache geschrieben haben; um so mehr wäre es zu bedauern, wenn infolge des verstümmelten Zustandes der beiden hebräischen Mss. die Kenntnis dieses Werkes des berühmten Persers[2]) uns für immer vorenthalten bleiben sollte; eine Vergleichung desselben mit der wahrscheinlich noch in Oxford und Paris vorhandenen lateinischen Übersetznng der Tafeln des Chowârezmî durch Atelhard von Bath würde uns wohl interessante Aufschlüsse über die gegenseitigen Beziehungen zwischen griechischer, indischer und arabischer Astronomie bringen. Arabisch scheint das Buch leider, wie so manches andere dieses Gelehrten, nicht mehr vorhanden zu sein.

El-Bîrûnî hat sich noch in zwei anderen Werken mit Muḥ. ben Mûsâ el-Chowârezmî beschäftigt, dessen engerer Landsmann er ja ge-

1) Nach M. Steinschneider, l. c., in Parma (de Rossi 212) u. in Oxford (Bodl., Michael 835).

2) Hr. Cantor schreibt in seinen *Vorlesungen*, I_2, p. 668: „Dieser Schriftsteller ist von arabischem Geschlechte im nordwestlichen Indien zur Welt gekommen“; er folgt hierin Kremer, *Kulturgeschichte des Orients*, II, p. 424. Wie Kremer dieses schreiben konnte, ist uns nnbegreiflich; Birûnî ist der ansgesprochenste Iranier, der je in arabischer Sprache geschrieben hat; E. Sachau schreibt in seiner Einleitung zur Ansgabe der *Chronologie* Bîrûnîs, p. XXVII: „Er steht dem Islâm und der Rolle des arabischen Volkes in der Weltgeschichte kühl gegenüber, nnd sieht in den Arabern nur die Zerstörer eranischer Nationalität und Größe. — — Er stellt das eranische Volkstum in seinen verschiedenen Unterarten den aus der arabischen Wüste gekommenen, nngebildeten Barbaren, welche die Herrlichkeit des Sassanidenreiches zertrümmerten, gegenüber.“



wesen ist, die Titel des zweiten und dritten Buches seines Verzeichnisses lauten: „Die Aufhebung (Entkräftigung) der Verläumdung durch Beibringung von Beweisen zu den Regeln (wörtl. Operationen) EL-CHOWÂREZMÎS in seinen Tafeln, in 360 Blättern; es ist dies eine Widerlegung einer Schrift des Arztes ABÛ ṬALḤA über diesen Gegenstand". — „Eine Schrift der Vermittlung zwischen EL-CHOWÂREZMÎ und ABÛ'L-ḤASAN EL-AHWÂZÎ[1]), welcher den erstern in einem Buche mit Unrecht angegriffen hatte, in 600 Blättern."

1) Vergl. SUTER, *Die Mathematiker u. Astronomen der Araber u. ihre Werke*, p. 57, Art. 123.

Hermannus Dalmata als Übersetzer astronomischer Arbeiten.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

Die von Herrn Eneström gestellte Anfrage [1]), ob Hermannus secundus (Dalmata) wirklich astronomische oder mathematische Arbeiten übersetzte und welche diese Arbeiten sind, läßt sich wegen der einander widersprechenden Angaben der Quellen noch nicht ganz entscheidend beantworten; jedoch werde ich mitteilen, was ich in Bezug auf diese Frage weiß, obschon das Meiste schon in Steinschneiders *Hebräischen Übersetzungen* S. 534—535 und 568—569 zusammengestellt worden ist. Es handelt sich, wie es in der Anfrage angegeben wird, in der Tat nur um zwei Werke, die lateinischen Übersetzungen von Ptolemaios' *Planisphaerium* und Abu Maaschars *Introductorium majus.*

Die erste dieser Übersetzungen kenne ich aus drei Hss. und zwar den Cod. Regin. 1285, 14. saec.; Vatic. 3096, 14. saec.; Parmens. 954, 15. saec. Sie findet sich übrigens in Dresden Db. 86, 14. saec.; Paris. 7214, 14. saec.; Paris. 7377 B, 14—15. saec.; Paris. 7413, 14. saec. Von diesen geben Parm. 954, [2]) Dresden Db. 86 [3]) und Paris. 7214 und 7413 so viel ich weiß, keine Anfschlüsse über den Übersetzer oder die Jahreszahl der Übersetzung.

In Vatic. 3096 f. 3r—11v fehlt sowohl die Überschrift als die Vorrede des lateinischen Übersetzers. Der Text fängt also mit den Worten an: *Cum sit possibile, o Syre* [4]) . . ., und schließt: . . . *cum circulis meridianis signa distingventibus.* Nach diesem Schluß folgt dann als Unterschrift: *Explicit liber Anno domini M̊ C̊ quadragesimo t° kl'. Junii Toleto translatus*, d. h. Toledo 1143.

1) Biblioth. Mathem. 8_3, 1902, p. 410—411.

2) In dieser Hs. ist der Titel des Textes (f. 106r—115v): *De vtilitate Astrolabij.* Ob ein Subskriptum da ist, kann ich leider nicht angeben, da ich nur den Schluß des nachfolgenden Kommentars des Maslama al-Madjriti notiert habe.

3) Vgl. Curtzes Beschreibung dieser Hs. in Zeitschr. für Mathem. 28, 1883 Hist. Abt. p. 9.

4) Statt o *Syre* hat die Hs. wie gewöhnlich *iesure.*

In Regin. 1285 [1]) f. 153r—160v ist die Überschrift: *Planisperium* PTOLOMEI HERMANNI SECUNDI *translatio*. Darauf folgt die Vorrede des Übersetzers: *Quemadmodum* PTOLOMEUS *et ante eum nonnulli* ... und dann der Text, derselbe wie in der vorigen Hs., und zwar mit der Unterschrift: *Explicit liber anno domini MCXLIII kal'. iunii Tolose translatus*, d. h. Tolosa in Spanien 1143.

In Paris. 7377 B ist nach JOURDAIN [2]) die Überschrift: *Planispherium* PTOLEMAEI *translatus de arabico in latinum per* HERMANNUM SECUNDUM; dann folgt Vorrede, Text und eine Unterschrift, welche nach JOURDAINS Angaben offenbar genau dieselbe ist wie die des vorgehenden Cod. Regin. 1285.

Nach dieser leider keineswegs vollständigen Untersuchung der Hss. ist die Übersetzung von PTOLEMAIOS' *Planisphaerium* unzweifelhaft dem HERMANNUS DALMATA zu vindizieren und 1143 als die richtige Jahreszahl der Übersetzung festzustellen.

Nun aber die Druckausgaben: Die vom Jahre 1507 ist mir nicht zugänglich gewesen, Herr A. v. BRAUNMÜHL hat aber ein in München befindliches Exemplar dieser Ausgabe genau untersucht und mir das Resultat seiner Untersuchung gütigst zur Verfügung gestellt. Es zeigt sich, daß in dieser Ausgabe weder von einem Übersetzer noch von einer Jahreszahl der Übersetzung geredet wird. [3]) In der Ausgabe vom Jahre 1558 fehlt sowohl Vorrede als Überschrift; die Unterschrift ist: *Facta est translatio haec Tolosae Cal. junii anno Domini MCXLIIII.* In der Ausgabe endlich vom Jahre 1536 stehen Vorrede und Text ganz wie in den oben genannten Hss., die Überschrift aber heißt: RODULPHI BRUGENSIS *ad* THEODORICHUM PLATONICUM *in traductionem planisphaerij* CLAUDIJ PTOLEMAEI *Praefatio* und die Unterschrift: *Facta est translatio haec Tholosae Calendas*

1) Diese ausgezeichnete Hs., welche aus derselben Zeit und Schreibschule stammt wie der berühmte Cod. Paris. 9335 (vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 63—75), hat schon NARDUCCI beschrieben; vgl. STEINSCHNEIDER, l. c. — Gelegentlich bemerke ich eine Subskription fol. ult. im Cod. Digby 47: *Iste liber est* JOHANNIS FONTANA *physici Veneti*, durch welche meine Vermutung bezüglich des Besitzers des hier genannten Cod. Paris. 9335 bestätigt wird (vgl. Abh. z. Gesch. d. mathem. Wissensch. 14, 1902, p. 137.)

2) CH. JOURDAIN, *Recherches sur l'âge et l'origine des traductions latines d'*ARISTOTE (Paris 1843), p. 103.

3) In der Inhaltsangabe fol. 1 steht als 6. Stück: *Planisphaerium* CLAUDII PTOLEMAEI *noviter recognitum et diligentissime emendatum a* MARCO *Monacho Caelestino* BENEVENTANO. Zwischen der *Geographie* und dem *Planisphaerium* des PTOLEMAIOS steht ein Brief: MARCUS *Monachus Caelestinus* BENEVENTANUS JOANNI BADUARIO *Patritio Veneto, Senatus Veneti apud Pont. Max. Oratori Sal.* Gleich nach diesem Briefe folgt der Text: *Cum sit possibile o* SIRE ... mit der Unterschrift: „*Explicit Planisphaerium* PTOLEMAEI *recognitum diligentissime a* MARCO BENEVENTANO *Monacho Caelestinorum, quod antea in multis etiam antiquis exemplaribus latinis corruptissimum reperiebatur* ...“.

Junij anno domini MCXLIIII. Also wird in dieser Ausgabe wenigstens die Vorrede dem Rudolphus Brugensis beigelegt, und wie in der vorigen ist 1144 statt 1143 als Übersetzungsjahr angegeben.[1])

Die Erörterungen sämtlicher neueren Autoren und Bibliographen[2]) können wir nun, glaube ich, ruhig beiseite lassen; sie ruhen sicher ausschließlich auf den hier aufgeführten Quellen, nennen wenigstens keine andere.

Von Interesse für die Entscheidung der vorliegenden Frage ist es, daß in einem Passus der Vorrede der bekannte Robertus Retinensis (oder Cataneus) in einer Weise erwähnt wird, die man eher von Hermannus, dem Kollegen Robertus', als von dem jüngeren Rudolphus, Hermannus' Schüler erwarten sollte; es heißt nämlich[3]): *Tuam ergo virtutem quasi proprium speculum intuentes, ego et unicus atque illustris Robertus Cataneus, nequiciae licet displicere plurimum possit, perpetuum habemus propositum.* Diese Äußerung müssen wir damit zusammenhalten, daß der Abt Petrus Cluniacensis den Robertus im Jahre 1141 in Spanien kennen lernte und ihn bewog in Gemeinschaft mit Hermannus den Koran zu übersetzen, daß derselbe Petrus in einem Briefe an Abt Bernhard von Clairvaux bezengt, daß Robertus und Hermannus damals in Spanien mit astronomischen Arbeiten beschäftigt waren: *Quos in Hispania circa Hiberum* [Ebro] *Astrologicae arti studentes inveni*[4]), und daß die Koranübersetzung dem Abte Petrus im Jahre 1143 nach Frankreich übersandt wurde. Von Bedeutung wird es dann ebenfalls, daß im Cod. Borbon. VIII. C. 50[5]) das *Proemium in libro essentiarum Hermanni Philosophi* mit den Worten schließt: *De essentiis liber Hermanni secundi explicit anno domini M̊C̊X̊L̊III Bit'ni*ⁿ (?) *perfectvs.* Zum dritten Male begegnet uns hier die Jahreszahl 1143, und es scheint also wirklich, daß Hermannus und Robertus in diesem Jahre mehrere Übersetzungen vollendet und nach Frankreich übersandt haben.

Ganz allein gegen alle diese Urkunden steht also die *Planisphaerium*-Ausgabe vom Jahre 1536, wo die Vorrede dem Rudolphus Brugensis zugeschrieben wird. Nun ist aber die Möglichkeit, daß die Übersetzung dem Hermannus, die Vorrede dem Rudolphus gehöre, ausgeschlossen; denn letztere schließt mit den Worten: . . . *his habitis, ne diu differamus,*

1) Die Zahl 1144 erklärt sich vielleicht dadurch, daß t⁰ (tertio) als 4⁰ (quarto) gelesen wurde.

2) Zu vermeiden ist namentlich Wüstenfelds ganz irre leitende Behandlung der hieher gehörenden Fragen in seinen *Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische*, p. 29 und 50—53.

3) Vgl. Jourdain, l. c. p. 104.

4) Vgl. Jourdain, l. c. p. 102—103 und Wüstenfeld, l. c. p. 44—45.

5) Ob diese Hs. früher untersucht worden ist, weiß ich nicht; ich kenne sie nur von Autopsie.

ab ipsis eius verbis tractatus initium statuamus, non alia transferendi lege, quam qua id ipsum Mastlem in arabicam transtulit; also hat der Übersetzer selbst die Vorrede geschrieben; und bis etwa Handschriften auftauchen, die mit der Angabe der Ausgabe von 1536 übereinstimmen, ist diese Angabe als minderwertig zu betrachten, und dies um so mehr, weil wir mehrere Hss. besitzen, in denen kein Übersetzer genannt wird, so daß der Herausgeber, welcher nur eine derartige Hs. besaß, darauf hingewiesen war, entweder — wie es in den Drucken 1507 und 1558 geschieht — keinen Übersetzer zu nennen oder zu conjizieren.

Eine weitere Bestätigung dafür, daß in der Tat Hermannus und nicht Rudolphus das *Planisphaerium* übersetzte, ergibt der Vergleich mit der zweiten dem Hermannus beigelegten Übersetzung eines astronomischen Werkes, der kürzeren nämlich der zwei lateinischen Übersetzungen von Abu Maaschars *Introductorium majus*[1]). Durch Vergleich der Vorreden der zwei Werke beweist nämlich Steinschneider, daß der Übersetzer der beiden Texte derselbe ist. Daß aber Hermannus Dalmata der Übersetzer des *Introductorium* ist, behauptet ausdrücklich die Überschrift desselben in dem bisher unbeachteten Cod. Ampl. Q. 363, 14. saec.: *Astrologie Album. Albalachi Herm. Sec. translatio*[2]). Der Vollständigkeit wegen füge ich hinzu, daß das *Introductorium* sich auch im obengenannten Cod. Borbon. VIII. C. 50, fol. 1r—55v findet, und zwar direkt vor dem *Liber Hermanni secundi de essentiis*, leider aber mit einer unleserlichen Unterschrift. Nach dem *Liber de essentiis* folgt dann in derselben Hs. Rudolphus Brugensis' Buch über das Astrolabium mit der vom Cod. Digby 51, fol. 26 ff. her bekannten Vorrede, in welcher auf die Planisphärienübersetzung deutlich hingewiesen wird[3]).

Bis auf weiteres ist nach diesen Auseinandersetzungen Hermannus Secundus (Dalmata) als der Übersetzer von sowohl Ptolemaios' *Planisphaerium* als Abu Maaschars *Introductorium majus* und 1143 als das Vollendungsjahr der beiden Übersetzungen zu betrachten.

---

1) Gedruckt wurde diese Übersetzung in den Jahren 1489, 1495 und 1506, und zwar ohne Angabe des Übersetzers; die andere Übersetzung ist von Johannes Hispalensis erledigt.

2) Vgl. Schum, *Beschreibendes Verzeichniss der Amplonianischen Handschriften-Sammlung zu Erfurt* (Berlin 1887), p. 608.

3) Vgl. Steinschneider, l. c. p. 534—535 u. 568—569.

Der Astronom Cyprianus Leovitius (1514—1574) und seine Schriften.

Von Jos. Mayer in Freising.

Über die Lebensumstände des Leovitius hat Wydra in seinem Werkchen *Historia matheseos in Bohemia et Moravia cultae* (2. Aufl. Leipzig 1778) ziemlich ausführliche Nachrichten gegeben.

Nach Wydra erblickte Cyprianus Leovitius, auf böhmisch Lwowiczky, z Lwowicz das Licht der Welt im Jahre 1514 zu Königgrätz (Reginaehradecii) in Böhmen als der erste Sohn des Edelmannes und späteren Bürgermeisters Joh. Karásek. Der Sohn nahm den latinisierten Namen Cyprianus an, weil der böhmisch „Karasek“[1]) genannte Fisch *cyprinus carassius* heißt. Das Prädikat Leovitius a Leonicia-„Lvovicky ze Lvovic“ erhielt die Familie im Jahre 1547 vom Kaiser Ferdinand I. Als Geburtsjahr des Leovitius ist bei Wydra ausdrücklich das Jahr 1514 genannt, während in allen bezüglichen Werken als solches das Jahr 1524 bezeichnet wird.[2]) Veranlassung dazu mag gegeben haben eine Dedikation von einem Samuel Quichelbergus in des Leovitius großem Werke *Ephemeridum novum atque insigne opus* . . ., welche lautet: „D. O. M. Posteritatique Sacrum . . . Augustae Vindelicor. Anno Christianae salutis M. D. LVI. Recuperatarum et extensarum literarum in Europa (sumpto ab hoc prae-

1) Karásek heißt die Karausche = Gareissel, ein Fisch, der zum Geschlechte der Karpfen gehört.

2) Poggendorff zitiert wenigstens in seinem *Biogr.-literarischen Handwörterbuch* nach Jöcher u. Weidler: „geb. 1524 . . . Leonicia (?) b. Hradisch Böhmen.“ Weidler sagt *(Historia astronomiae)*: „C. L. a Leonicia, Hradicensis, ex Leovitia, nobili in Bohemia familia, oriundus . . .“ In der *Biographie universelle ancienne et moderne* (von Michaud): „Leowitz (Ciprien), en latin Leovitius, fameux astronome ou plutot astrologue, naquit dans les 16e siècle, à Leonicia, près de Hradisch en Bohême.“ Wolf *(Geschichte der Astronomie* p. 301*)*: „Leovitius wurde 1524 zu *Leonicia* in Böhmen geboren“ n. a. Nach Mitteilung des Dekanatamtes in Königgrätz fangen die dortigen Matrikel erst mit dem Jahre 1667 an, da die früheren verbrannt sind.

sente centenario christiano exordio) anno LVI. cum LEOVITIUS aetatis annum ageret XXXII". Aber wahrscheinlich findet sich hier ein Druckfehler, so daß es statt „XXXII" wohl „XXXXII" heißen muß. Merkwürdigerweise ist anch WYDRA aus demselben Grunde einer Irrung verfallen, indem er bei Anführung dieses Werkes über die Ephemeriden vom Jahre *1557* als dem Jahre, in welchem das Werk *gedruckt* wurde, anch obige Ausdrncksweise „cnm aetatis secundum et trigesimum annnm ageret" gebrancht, obgleich er eingangs als Geburtsjahr das Jahr 1514 angegeben hat. Daß LEOVITIUS im Jahre 1514 und nicht 1524 geboren ist, dürfte ferner aus folgendem hervorgehen: 1) In der Widmung seines Werkes *Eclipsium omnium* ... an den Kurfürsten OTTO HEINRICH spricht er von einer fast totalen Verfinsterung der Sonne im Widder, welche er im Jahre 1540 in Breslau beobachtet habe, die in ihrem Entstehen schauerlich anzuschauen war und welcher eine sehr drückende Hitze mit großer Dürre und Teuerung der Lebensmittel unmittelbar folgte. Es dürfte nicht anzunehmen sein, daß LEOVITIUS, der doch wohl, bevor er zu seiner weiteren Ausbildnng nach Deutschland ging, die Schulen seiner Vaterstadt absolviert haben wird, schon als 15—16jähriger Jüngling im Auslande verweilt und dort die Wirkungen von Sonnenfinsternissen verzeichnet haben soll. 2) Ist es nicht wahrscheinlich, daß LEOVITIUS schon im 27. Lebensjahre eines seiner größeren Werke, nämlich die *Tabulae positionum*, nnd in rascher Anfeinanderfolge dann die verschiedenen umfassenden Werke geschrieben hat, während er, der offenkundig schreibselige Astrolog, in dem schönsten Lebensalter (vom 31. Jahre bis zu seinem im 50. erfolgten Tode, welches Alter nur er nach jener Annahme erreicht haben müßte), von den unter 7 und 8 genannten kleineren Werken abgesehen, sich literarisch untätig verhalten hat. 3) Stellt er im Jahre 1540 oder gar schon früher dem zukünftigen Kaiser MAXIMILIAN II. das Horoskop. 4) Daß LEOVITIUS nicht 1524 geboren ist, dürfte auch daraus geschlossen werden, daß J. A. DE THOU in seiner *Histoire* (VII, 208) bemerkt: „il (LEOVITIUS) mourut fort âgé à Augsbourg le 21. de May".

„Der Vater war dem Sohne, der sich um die Wissenschaft sehr verdient machen sollte, eine Leuchte; denn bis zur Zeit der Verwaltung des Bürgermeisteramtes dnrch JOHANN mußten die Zöglinge des Hradischer Gymnasiums an bestimmten Tagen von Haus zn Haus die Gaben für den Unterhalt ihrer Lehrer sammeln, welche Einkassierung sie recordatio nannten. Da er diese Einrichtung der Wissenschaft für unwürdig und für die Bürgerschaft lästig hielt, so sorgte er durch einen Magistratsbeschluß für ein jährliches Gehalt der Lehrer." Nach dem Herkommen jener Zeit verließ CYPRIANUS den heimischen Boden und wanderte nach Deutschland, um sich in der Mathematik gründlich auszubilden. Im Jahre 1540 hielt

er sich, wie oben bemerkt, in Breslau auf, 1544 in Leipzig, wo er sich des Verkehrs mit hervorragenden Männern zu erfreuen hatte, dann bei Melanchthon in Wittenberg, wo er neben Mathematik und Astronomie auch Latein studierte, 1547 trat er in Nürnberg zu Joh. Schoner und 1551 in Augsburg zu dem Mäcen von Kunst und Wissenschaft, Georg Fugger, mit dem er am 31. August eine Sonnenfinsternis beobachtete, zu Joh. Heinzel („vir omni virtutum genere ornatissimus") und dem Philologen und Gymnasialdirektor Hieronymus Wolf in Beziehung. Insbesondere fand er Unterstützung und Förderung durch die hochedlen Familien Fugger und Rosenberg[1]) und wahrscheinlich wurde er auch durch diese an den Pfalzgrafen Otto Heinrich empfohlen, so daß dieser ihn als Mathematikprofessor in Lauingen an der Donau, seiner zeitweiligen Residenz, in seine Dienste nahm. Bei demselben muß Leovitius in großer Gunst gestanden sein; denn er beschenkte ihn mit einer goldenen Kette. Als diese Leovitius während eines Aufenthaltes in seiner Vaterstadt im Jahre 1558 trug, wurde er von einem Bürger verspottet. Er mußte darob zur Klage greifen und sich Genugtuung verschaffen. Im Jahre 1567[2]) besuchte ihn in Lauingen Tycho Brahe, der in einem Gasthause bis tief in die Nacht über astronomische Fragen sich mit ihm unterhielt und Freundschaft schloß.[3]) In Königgrätz verweilte er vorübergehend in den Jahren 1565, 1567 und 1568 zur Erledigung von Familienangelegenheiten. Sei es nun, daß die Liebe zur Heimat oder andere Gründe, unter welche die Ererbung eines Hauses aus der Hinterlassenschaft seines Vaters zu rechnen sein dürfte, in ihm die Sehnsucht nach seiner Vaterstadt wieder wachriefen, er beschloß, wie aus dem Ratsmannale seiner Vaterstadt 1568 hervorgeht, dahin zurückzukehren und wandte sich deshalb an den dortigen Magistrat mit der Bitte um die Erlaubnis, wie die anderen Bürger Bier brauen und abgabenfrei verleitgeben zu dürfen. Wenn ihm dieses Zugeständnis gemacht werde, wolle er dem dortigen Gymnasium seine besondere Sorgfalt zuwenden, öffentliche Vorlesungen halten und für seine Vaterstadt das Amt eines Gesandten beim Kaiser versehen. Unter einer anderen litera heißt es in demselben Buche, daß er gegen diese Zusicherung ohne alle Entlohnung aus bloßem Eifer zur Erhöhung des Ansehens seiner Vaterstadt und zur Ausbildung der städtischen Jugend in der Woche zwei Lektionen halten und die gesandtschaftlichen Geschäfte übernehmen wolle,

1) Bei Wydra heißt es: „Opibus nobilissimae Fuggerorum, et Rosensium familiae juvabatur." Es kann hier nur die in der Vorrede zu den Ephemeriden genannte Familie der Rosenberger gemeint sein, auf deren Kosten seine zwei größten Werke (5 u. 6 s. u.) gedruckt worden sind.

2) Nicht 1569 (*Nouvelle biogr. générale* [Firmin Didot], T. **30**, 814).

3) *Astronomiae instauratae progymnasmata* (de stella nova) 1610, p. 705—710.

ohne daß er für sich das Recht in Anspruch nehme, die Reichsversammlung zu besuchen. Auf dieses hin beschlossen Bürgermeister, Rats- und Bevollmächtigten-Kollegium „im Namen der ganzen Gemeinde, in der Erkenntnis, daß CYPRIANUS ein sehr würdiger Mann, von Gott mit besonderen Gaben ausgestattet sei, bei allen in hohem Ansehen stehe und, was vor allem hervorgehoben werden müsse, ein höchst eifriger Förderer des Wohles seiner Vaterstadt und des Staates sei, aus freien Stücken, ungezwungen, unbeschadet ihrer Rechte, ihrer Freiheit und ihrer Privilegien, daß ihm das volle Recht, Bier zu brauen, zugestanden werde, wenn er bei seinem Versprechen beharre. So entschieden im Rate selbst am Tage des hl. Fabian und Sebastian im Jahre 1568 unter dem Bürgermeister JAKOB SELIUS". Aber CYPRIANUS machte von diesem Wohlwollen seiner Mitbürger keinen Gebrauch. Er blieb bis zu seinem am 25. Mai 1574 erfolgten Tode in Lauingen. Wie der kürzlich verstorbene F. J. STUDNIČKA mir vor einem Jahre mitteilte,[1]) widmete seine Vaterstadt ihm in der hl. Geistkirche ein Epitaphium und B. STURM die Aufschrift:

Instruxere viros plures fecereque magnum
Tychonem Astrologum scripta Leovicii.
VrbanI spLenDente DIe, sIC parCa ferebat,
CarpIt Iter LethI trIste LeoVICIVs.[2])

Die großen Buchstaben geben als Zahlzeichen addiert nach der früher herkömmlichen Weise sein Todesjahr, nämlich 1574 an. WYDRA berichtet, daß er am 25. Mai 1574 in Lauingen gestorben sei, welcher Todestag bei LUPACIUS[3]) in einem eleganten Jahreszahlvers zum Ausdruck gebracht werde, wobei er die zwei letzten Verse der oben genannten Aufschrift zitiert. „Ein sinnreiches und farbenprächtiges Epitaphium haben seine Freunde ihm zum Gedächtnisse aufrichten lassen, welches BALBINUS[4]) in der Kirche des hl. Geistes gesehen zu haben erzählt, da er das Jünglingsalter noch nicht überschritten hatte, mir aber, der hiermit Alles sorgfältig beleuchtete, ist es nicht gegönnt gewesen, es zu sehen." Diese Mitteilung WYDRAS läßt Zweifel entstehen, ob die hl. Geistkirche in Königgrätz oder in Lauingen (nunmehr das Mädchen- und Knabenschulhaus) gemeint ist. An letzterem Orte ist von einem Grabsteine oder Epitaphium nichts mehr

1) Z. T. nach J. SMOLIK in der Zeitschrift Živa (1863).

2) „Die Schriften des LEOVITIUS haben mehr Männer belehrt und namentlich den Astrologen TYCHO groß gemacht. Am Urbansfeste, so wollte es das Schicksal, trat LEOVITIUS die traurige Todesreise an."

3) PROKOPIUS LUPACIUS, ein Böhme, der 1578 *Rerum bohemicarum ephemeridum seu kalendarium historicum* zu Nürnberg in 8⁰ herausgab, welches 1584 zu Prag wieder aufgelegt wurde (JÖCHER).

4) geb. 1621, gest. 1688.

zu entdecken. F. J. Studnička teilte mir noch mit: „Nach seinem Tode verzichtete seine Witwe Diana auf seine Forderungen in Königgrätz per 100 Schock Meissener Groschen und seine Brüder — er hatte deren drei — auf seine Hinterlassenschaft in Lauingen.“ Aus den Steuerbüchern daselbst ersieht man,[1]) daß er 1563—1571 3 fl 17 β 7 h Stadtsteuer und von 1572 an etwas mehr zahlte, während die Nachbarn nicht gesteigert wurden. Seine Witwe „Fraw Cyprianussen“ zahlte noch ungefähr 2 Jahre dasselbe, ein Betrag, der hinter den Ansätzen der reicheren Bürger erheblich zurückblieb, aber die Quoten der gewöhnlichen Bürger und Handwerker wohl wegen des Zuschlages des jährlichen Beisitzgeldes übersteigt. Im Jahre 1565 · ist Hr. Cyprianus v. Leowitz mit 8 fl Landsteuer angeführt.

Seine Werke, die znm Teil wiederholte Anflagen erlebten und in fremde Sprachen übersetzt wurden, sind ziemlich viele, gegenwärtig aber nur mehr sporadisch vorhanden. Ich habe sie alle und zwar teils in der Bibliothek (früher Universitätsbibliothek) zn Dillingen a. D., teils in der Münchener Staatsbibliothek, teils in der Augsburger Stadt- und Kreisbibliothek ausfindig gemacht. Indem ich sie nach der Zeit ihres Erscheinens anführe, werde ich auf ihren Inhalt, insofern derselbe weiteres Interesse erregen dürfte oder wissenschaftlichen Wert beansprucht, etwas näher eingehen.

1. Tabulae poſitionum pro variis ac diverſis poli elevationibus ad directiones neceſſario pertinentes, ſumma fide, cura et diligentia ſupputatae, atque nunc primum in lucem editae. Excudebat Augustae Vindelicorum in platea templaria divi Huldarici, Philippus Ulhardus Anno domini 1551. Menſe Octobri. In 4°.

Dieses Bnch enthält ohne Einleitung, ohne Erläuterung auf 792 Seiten sogenannte Positionstafeln für die Orte vom 33. bis zum 60. Breitengrade von $^1/_2{}^0$ zu $^1/_2{}^0$ der Polhöhe der Orte („gradus latitndinis“). „*Position*“ ist hier nicht in dem in der neneren Astronomie gebräuchlichen Sinne zu nehmen, sondern bedeutet den *Stundenwinkel* des Sternes, i. e. den zwischen seinem Deklinationskreise und dem Meridiane des Ortes gelegenen Bogen des Himmelsäquators. Derselbe wird für einen Erdort von der gegebenen geographischen Breite (φ) berechnet aus der Deklination des Sternes oder eines beliebigen Punktes des Himmelsgewölbes und mittels der sogenannten „*Polhöhe*“ des „*Positionskreises*“, d. i. des durch den Süd- und Nordpunkt des Horizonts nnd den Stern oder jenen beliebigen Punkt gehenden größten Kreises, wobei als „*Polhöhe*“ der sphärische Abstand des zunächst gelegenen Himmelspoles von diesem Kreise aufzufassen ist. Diese „*Positionen*“ sind

1) Nach Benefiziat Rückert in Lauingen.

für Polhöhen von 0^0 bis φ^0 der Positionskreise eines jeden Ortes von der geographischen Breite φ von Grad zu Grad und für Deklinationen zwischen $+32^0$ und -32^0 ebenfalls von Grad zu Grad auf Minuten genau berechnet. Die Deklinationen werden dabei bezeichnet mit „Declinatio Septentrionalis ſupra terram et Meridiana ſub terra“ und „Declinatio Meridiana ſupra terram et Septentrionalis ſub terra“. Durch den Zusatz „ſupra terram“ und „ſub terra“ ist „das Gesäß oder die Gelegenheit ob oder unter der erd“ angedeutet.[1]) Vorgenommene Stichproben sind folgende: Ich finde 1) für $\varphi = 49^0$, Polhöhe φ_1 des Positionskreises $= 34^0$ und declinatio ſeptentrionalis ſupra terram $\delta = 20^0$ den Wert $p = 50^0\ 7'$, 2) für $\varphi = 49^0$, $\varphi_1 = 34^0$, $\delta = -20^0$ (declinatio meridiana ſupra terram) den Wert $p = 21^0\ 41'$, 3) für $\varphi = 49^0$, $\varphi_1 = 49^0$, $\delta = -5^0$ $p = 84^0\ 13'$, für $\varphi = 49^0$, $\varphi_1 = 49^0$, $\delta = -27^0$ $p = 54^0\ 7'$, für $\varphi = 49^0$, $\varphi_1 = 49^0$, $\delta = -32^0$ $p = 44^0\ 2^1/_2{}'$ (3'), was mit den in den Tafeln gegebenen Werten vollständig übereinstimmt. Leovitius verweist in seinen späteren Werken wiederholt auf dieses, das übrigens nur astrologischen Zwecken, insbesondere zur Aufstellung der sog. „Direktion“ diente. Indes zeugen die angeführten Stichproben von der Genauigkeit seiner Berechnungen.

2. Tabula aſcensionum obliquarum, et poſitionum particularis, ad latitudinem grad: 48. minut: 8. In 4⁰, 8 Blätter ohne Angabe des Druckortes und der Zeit.[2]) Es sind speziell für Augsburg berechnete Tafeln. Während das Städteverzeichnis in dem Werke unter 5. die Polhöhe von Augsburg zu $48^0\ 15'$ enthält, wird sie hier mit $48^0\ 8'$ genommen. Unter *„schiefen Aufsteigungen“* („schählen aufsteigungen“) versteht man die Punkte des Himmelsäquators, angegeben in Rektaszension, welche mit den einzelnen hier in Graden gegebenen Punkten der Zeichen des Tierkreises zugleich aufgehen.

3. Tabulae directionum et profectionum clariſſimi viri ac praeſtantiſſimi mathematici, Joannis Regiomontani, non tam Astrologiae judiciariae, quàm tabulis et inſtrumentis Astronomicis variis conficiendis, plurimum utiles ac neceſſariae ... Omnia ab innumeris mendis repurgata, et in plerisque locis de integro reſtituta. His nunc primum acceſſerunt, brevis ac succincta methodus procedendi in directionibus, illuſtrata plurimis exemplis, obſervato diligenti ordine. Augsburg wie oben unter 1. 1552. Menſe Aprili. In 4⁰.

Nach dem Abdrucke des kaiserlichen Privilegs, in welchem es u. a. heißt, daß C. Leovitius die durch die Nachlässigkeit der Drucker an fast

1) Der Planet sitzt oder liegt *über* dem Horizont, wenn man durch Berechnung denselben im VII., VIII., IX., X., XI. oder XII. Hause findet; in den übrigen Häusern ist er *unter* dem Horizont.

2) u. a. 1551 erschienen.

unendlich vielen Pnnkten entstellten *Tabulae Directionum* des Joannes à Monte Regio gleichsam wieder hergestellt und mit sehr vielen Positionstafeln und Tafeln der schiefen Aufsteigungen und mit einer kurzen Anweisnng, wie die Tafeln in Verwendung genommen werden müssen, vermehrt hat, und daß er außerdem noch auf manches andere, wodurch das Studium der Astronomie nicht wenig Erleichterung finde, Bedacht genommen hat, folgt das Vorwort von Philipp Melanchthon an die Brüder Georg und Ulrich Fugger als Förderer dieses philosophischen Gegenstandes (Astronomie bezw. Astrologie) gerichtet, in dem er von der Wichtigkeit und dem Nutzen des Studinms der Natur handelt. Auch Leovitius wendet sich in seiner Vorrede an die genannten Brüder Fugger, hebt hervor, daß, obgleich Regiomontanus die Knnst, die Richtung anzngeben (dirigendi) an sich betrachtet hinreichend deutlich und klar gelehrt hat, doch die Art seiner Auseinandersetzungen mehr den Erfahreneren als den Anfängern zu entsprechen scheint, während er zugleich die Ausführung verkehrt („praepoſtero ordine") und weitläufig durchführt. Was daher jener in sehr vielen Problemen wiedergibt, das habe er an wenigen Normen (Canones) in sorgfältiger Ordnung und unter Anwendung etlicher Beispiele für die einzelnen Vorschriften der Unterweisung auseinandergesetzt; er verweist dabei zur Erleichterung dieses Zweckes auf die von ihm berechneten (unter 1 angeführten) „tabulae positionum". Bei diesen Beispielen (nach handschriftlichen Notizen die Nativitäten hervorragender Männer damaliger Zeit) weichen einige Male die von ihm benützten Polhöhen ziemlich stark von der Wahrheit ab, so nimmt er für Königgrätz 50° 0′ statt 50° 12½′, für Nürnberg 49° 30′ statt 49° 27′, während sie für Schwabach mit 49° 20′ richtig ist, wenn er nicht überhaupt bei Unsicherheit auf eine Abrundung bedacht war. Immerhin dürfen die hier angegebenen Polhöhen noch als genau bezeichnet werden gegenüber denen in den Ephemeriden des Regiomontanus (*Ephemerides sive Almanach perpetuus*, Venedig 1498).

Bevor er zu den 6 oben besprochenen Canones mit Cautionen und zahlreichen Beispielen übergeht, gibt er eine Definition des sonst immer verschwommenen Begriffs von *Direktion.*[1]) Auf zwei großen Tafeln verzeichnet er dann den Typus der Direktion zur 2. Geburtsstunde von 4 Personen. Vor den Tafeln schaltet er 4 Briefe von Ph. Melanchthon ein, vom 23. II., 1. III., 2. und 4. III. 1552, in deren erstem Melanchthon die versprochene Vorrede ankündigt und zugleich den Citharöden des Königs von Polen znr Einführung in das Haus der Fugger empfiehlt, und in deren letztem er die Übersendung eines Duplikats dieser Vorrede meldet — ein

1) Über die verschiedenen Definitionen derselben s. (nach Magini) Delambre, *Histoire de l'astronomie,* oder auch Magini, *De Astrologica ratione* (Venedig 1607), D 8₂.

Beweis von nicht besonderer Verkehrssicherheit damaliger Zeit, noch dazu zwischen zwei so verkehrsreichen Städten wie Nürnberg und Augsburg. Den Schluß des Werkes bildet ein langes Druckfehlerverzeichnis.

4. Secunda Pars tabularum directionum, continens afcenfiones zobliquas ad plures elevationes Poli extenfas, unà cum fuis tabulis pofitionum particularibus, adjecta tabula differentiarum afcenfionalium, et tabula pofitionū generali, ufsque ad. 81. grad: latitudinis, nunc primum in lucem aedita, ebenfalls in 4° ohne Angabe von Ort und Zeit der Drucklegung, auch einzeln erschienen als Fortsetzung und Ergänzung des Werkes unter 3. Es enthält auf der ersten Seite für die Polhöhen (von Orten) von 61° bis 66° inkl. und für die Sterne mit den Deklinationen von 1° bis 32°, für beide Größen von Grad zu Grad, die Aszensionaldifferenzen. „Differentia afcensionalis" ist der Abstand des Sternes vom Ostpunkte des Horizonts in Rektaszension im Momente seines Aufganges. Auf den nächsten 12 Seiten folgt eine „tabula afcenfionum obliquarum" für Ortspolhöhen von 61° bis 66° (in ganzen Graden) auf Minuten genau berechnet. „Bis hierher wollte ich diese Tafeln der schiefen Aufsteigungen berechnen. Denn die mehr nördlich gelegenen Gegenden sind ohne Kultur und öde. Sie bewohnen wenige barbarische und wilde Völker, die sich um unsere derzeitigen Bestrebungen nicht kümmern, bei welchen weder Religion noch Menschlichkeit noch Gesetze noch andere soziale Einrichtungen bestehen.[1]) . . . . Wenn man jedoch auf weitere Grade von Polhöhen die schiefen Aufsteigungen wünscht, so kann man diese unter Anwendung der Tafeln von Rektaszensionaldifferenzen, welche ich unten beigefügt habe, leicht berechnen und zusammenstellen, wobei selbstverständlich die Vorschriften des 10. Problems[2]) zu beachten sind." Eine Stichprobe für die geographische Breite $\varphi = 61^{\circ}$ ergab mir zu ♏ 20° unter Zugrundelegung von $\varepsilon = 23^{\circ}\ 29'\ 53''$ als Ekliptikschiefe[3]) für das Jahr 1551 den Wert 262° 53′ 53″, während Leovitius auf Minuten genau 262° 54′ angibt. Auf der nächsten Seite findet sich eine übersichtliche Tafel der *„Häuser"*, eigentlich der *Polhöhen*, d. i. der sphärischen Abstände des zunächst gelegenen Himmelspoles von den oberen Bögen, den *„Spitzen"* der 12 Häuser für die Horizonte von 61° bis 66° Polhöhe nach der seit Regiomontanus allgemein angenommenen Einteilung des Himmelsgewölbes in 12 Häuser. Nunmehr folgen in dem Werke besondere Tafeln der Position, welche den vorausgeschickten Aufsteigungen entsprechen, nämlich von 60½ bis 66

1) S. die fast gleichlautenden Bemerkungen in den alfonsinischen Tafeln (Mädler, *Gesch. d. Himmelsk.* II, 356).

2) Des Regiomontanus.

3) Nach Houzeau (Wolf, *Handb. d. Astr.* 375) hat Regiomontanus $\varepsilon = 23^{\circ}\ 30'\ 49''$ und Tycho $\varepsilon = 23^{\circ}\ 29'\ 46''$ genommen.

Breitengraden von $^1/_2{}^0$ zu $^1/_2{}^0$. Am Schlusse derselben bemerkt er, daß, wenn man dieselben auf weitere Grade von Polhöhen haben will, man dieselben mittels einer allgemeinen Positionstafel, welche er unten beigefügt habe, leicht berechnen und zusammenstellen könne, natürlich unter Berücksichtigung der Regeln des 29. Problems.[1]) Nach der oben angekündigten Tafel von Aszensionaldifferenzen für geographische Breiten von 67° bis 80° inkl. gibt er diese allgemeine Positionstafel („tabula positionum generalis") für geographische Breiten von 67° bis 80° inkl., hier „latitudo regionis" geheißen, und bis 32° Erhebung über den Positionskreis, „Elevatio fupra circulum pofitionis", woraus nach Eruierung des Begriffs „elevatio" als Polhöhe des Positionskreises sich ergibt, daß die berechneten Werte die Entfernungen der Schnittpunkte der Positionskreise mit dem Himmelsäquator vom Meridiane sich darstellen. Vorgenommene Proben der Genauigkeit liefern auch hier sehr befriedigende Resultate.

Die Verbesserungen der *Tabulae directionum* des Regiomontanus durch Leovitius in astronomischer und mathematischer Beziehung ließen sich nur durch eine Gegenüberstellung beider Werke nachweisen. Allein er erwähnt an keiner Stelle, welche Ausgabe derselben ihm zugrunde lag. Eine Vergleichung der Ausgabe der *Tabulae directionum* vom Jahre 1490 mit diesen Nrn. 3 und 4 läßt eine Fortführung der „tabulae differentiarum afcenfionalium" und der „afcensionum obliquarum" für Polhöhen von 61° bis 66° sowie der „tabula pofitionum generalis" für Polhöhen von 67°—80° in der Secunda pars erkennen; außerdem enthält sie eine Fortsetzung der Positionstafeln unter 1 für Breitengrade von $60^1/_2{}^0$—66°, während Regiomontanus solche nur für den 42., 45., 48. und 51. Grad nach seinem 29. Problem berechnete. Eine weitere Ausführung ist der 2. Teil in Nr. 3, „methodus procedendi in directionibus", aber rein astrologischer Natur; auch ist in die genannte Ausgabe von 1490 nicht die Sinustafel aufgenommen.[2])

5. Der Zeit des Erscheinens nach ist als nächstes seiner Werke zu nennen: **Eclipfium omnium ab anno domini 1554. ufque in annum domini 1606. accurata defcriptio et pictura, ad meridianum Auguftanum ita fupputata, ut quibufuis alijs facilimè accommodari poffit, unà cum explicatione effectuum tam generalium quàm particularium pro cujufque genefi.** Augsburg wie oben unter 1. 1556. Menfe Februario. In 2°.

In dieser Überschrift heißt es: „defcriptio et pictura". Von diesem Werke sind kolorierte und nichtkolorierte Exemplare vorhanden, und dieser

1) Des Regiomontanus.
2) S. Cantor, *Gesch. d. Math.* II², 275—276.

Umstand mag zur Bemerkung Mädlers (*Gesch. der Himmelsk.* II, 415), daß von demselben im Jahre 1557 eine weitere Auflage gedruckt wurde, Veranlassung gegeben haben. Aus Kästners Worten in seiner *Geschichte der Mathematik* II, 344—346: „Ich führe hie ein Werk von ihm (Leovitius) an, das doch auch mit astronomisch ist", und aus der kurzen Schlußbemerkung möchte hervorgehen, daß er keine weiteren von ihm kannte. Er widmet nun diesem Werke eine ziemlich eingehende Besprechung. Ich könnte auf diese verweisen, sehe mich aber des Zusammenhanges und des Zweckes dieser Abhandlung halber veranlaßt, eine solche hier vorzunehmen und etwas weiter auszugreifen.

Nach einer Widmung an den Pfalzgrafen Otto Heinrich und einem einführenden in Hexametern abgefaßten Gedichte des obengenannten Gymnasialdirektors Hieronymus Wolf teilt Leovitius in einer Vorrede mit, daß die Verfinsterungen mit größter Genauigkeit und peinlichstem Fleiße sowohl nach seinen Rechnungen als nach denen Peuerbachs und späterhin auch nach denen des Kopernikus bestimmt worden sind. Täglich angestellte Beobachtungen haben ihm Abweichungen von seinen nach den alfonsinischen (Peuerbachschen) Tafeln durchgeführten Rechnungen ergeben. Diese Abweichungen waren derart angewachsen, daß eine am 5. Juni 1555 mit Ulrich Fugger beobachtete Mondfinsternis um mehr als $\frac{1}{2}^{h}$ zu spät eintraf. Deshalb schritt er zu einer Verbesserung dieser Tafeln, aus welchen die Zeitbestimmung einer Mondfinsternis sich mit größter Genauigkeit ergibt. Bezüglich der Sonnenfinsternisse konnte er ähnliche Abweichungen nicht konstatieren, da er wenige zu beobachten Gelegenheit hatte. Die in seinem Werke ausgeführten sind daher nach Peuerbach oder Kopernikus berechnet. Zugleich kündigt er in dieser Vorrede weiter an, daß die nunmehr unter der Presse befindlichen und mit großer Mühe und unermüdlichem Eifer ausgeführten, von 1556—1606 reichenden Ephemeriden alle bisher vorhandenen an Genauigkeit und Vielseitigkeit übertreffen werden. Denn während in den bisher erschienenen der Ort der Sonne bloß auf Minuten ausgerechnet ist, sind den seinigen auch die Sekunden beigefügt. Während ferner in anderen Ephemeriden die Breiten der Planeten nur auf je 10 Tage der Monate angegeben werden und die des Mondes ganz weggelassen ist, sind in seinen die Breiten aller Planeten und des Mondes auf die einzelnen Tage bestimmt, und während schließlich in den übrigen die Aspekten des Mondes mit den Planeten nur auf Stunden und die der Planeten unter sich nicht einmal auf diese festgesetzt sind, werden in den seinigen beide auf Minuten durchgeführt. Endlich wird für die einzelnen Tage Auf- und Untergangszeit der Sonne beigefügt, ebenso die Tag- und Nachtlänge. Indem alle diese Beigaben außer der Verbesserung der alfonsinischen Rechnungen auf den Meridian von Augsburg bezogen sind, so daß sie für beliebig andere

Orte sehr leicht eingerichtet werden können, wird das große Werk noch enthalten: 1) höchst feine Figuren der Finsternisse, 2) eine sehr bequeme Art, die Himmelsfigur darznstellen mit Tafeln, aus welchen der Stand der Planeten sowohl bebufs Festsetzung ihrer Bewegung als auch Stellung des Horoskops ohne Mühe entnommen werden kann, 3) die Orte der Fixsterne vom Jahre 1349 bis 2029 genau festgestellt, 4) eine kurze Anweisung, die Nativität zu ermitteln, mit einigen neuen Beobachtungen und einer ebenso allgemeinen als der Geburt des einzelnen angepaßten Methode der Beurteilung, 5) die Nativitätszeichen der vier Jahreszeiten mit einer kurzen Erklärung der Bewegung des Weltalls nnd einiges andere. Nach dieser Vorrede bespricht er einen im Buche abgebildeten Kometen, welchen er zuerst am 7. März 9 Uhr nachmittags 1556 unweit von Vindemiatrix beobachtet und bis zum 17. März verfolgt hat, aber ohne genaue astronomische Angaben.

In dem 1. Teile des Werkes werden die einzelnen Mond- und Sonnenfinsternisse auf die Polhöhe von Augsburg reduziert sehr übersichtlich und koloriert dargestellt mittels der Himmelsfigur[1]) und mit allen astronomischen Daten, auch des Glücksrades (⊕), d. i. des Punktes, welcher in astronomischer Länge so weit vom Monde absteht, als das Horoskop (der Punkt der Ekliptik, welcher eben aufgeht) von der Sonne. Die rechte Seite enthält immer die bildliche Darstellung der Mond- bezw. Sonnenfinsternis. Merkwürdigerweise ist nach Leovitius offenbar die Mitte der Mondfinsternis dann, wenn der Mond in dem Durchschnitte seiner Bahn mit der auf der Ekliptik im Zentrum des Erdschattens errichteten senkrechten Geraden („orthogonalis occulta") oder mit der Ebene des durch diesen Punkt gehenden Breitenkreises sich befindet, d. i. im Momente der Opposition von Sonne und Mond zur Erde; er nimmt aber doch die Zeiten zwischen diesem Zeitpunkte und den Ein- und Austrittszeiten einander gleich. Auf einem in dem mir vorliegenden Exemplare vorfindlichen einzelnen Blatte desselben Papiers, in welchem das Werk gedruckt ist, befindet sich übrigens die Skizze einer Mondfinsternis in etwas größerem Maßstabe und z. T. in Aquarell, aber mit richtig angegebener Mitte. Unter den Figuren stehen Erläuterungen derselben nnd die Angaben der Zeit des Ein-, Austrittes und der Mitte der Verfinsterungen, außerdem die Bemerkung, um welche Zeit und in welcher Größe dieselben auf Grund der Peuerbachschen Tafeln auf den Meridian von Augsburg reduziert stattfinden würden. Auffallend ist ferner, daß Leovitius als Zeitunterschied der beiden Städte Augsburg und Wien, für dessen Meridian die Peuerbachschen Tafeln berechnet sind, 26 Minuten angibt. Nehme ich nach Kiepert die Differenz, welche sich jetzt zwischen dem östlichsten Punkte von Wien und dem westlichsten von

1) S. über diese u. a. Wolf, *Handb. d. Astr.* 214.



Angsburg dieser seit jener Zeit noch dazu sehr erweiterten Städte ergibt, so finde ich als diese größtmögliche bloß $22\,{}^{11}/_{30}$ Minuten. Auch die Polhöhen dieser Städte, wie er sie in einem später zu besprechenden Verzeichnisse von Städten wiedergibt, nämlich 48° 15′ für Angsburg und 48° 22′ für Wien, weichen von den tatsächlichen, 48° 21,7′ bezw. 48° 12,6′ (fast scheint eine Verwechslung bei ihm vorzuliegen) wesentlich ab.[1]) Über die Sonnenfinsternis vom Jahre 1556, welche nach den PEUERBACHschen Tafeln eine Größe von 9 Punkten (Puncta) 23 min. für Wien und für Angsburg von 9 P. 1 min. ergeben würde, bemerkt er, daß sie nach der Lehre des KOPERNIKUS unter unserem Horizonte stattfinden würde.[2]) Ähnliche, wenn auch nicht so auffallende Unterschiede, die nach beiden Theorien sich ergehen, konstatiert er gelegentlich, ebenso auch Sonnenfinsternisse, welche in unserer Gegend nicht sichtbar sind.

Der 2. Teil, „Altera pars, qua eclipsium et initia et progreſſiones et fines, una cum tempore effectuum earum deſcribuntur“, interessiert uns weniger, weil er mehr astrologische Zwecke verfolgt. Es werden die Zeiten der Verfinsterungen nach der kleinen Uhr, horologium minor[3]), die Zeiten, bis zu welchen sie ihre Wirknngen äußern, und die Orte nnd Gegenden, wo sie sichtbar sind, angegeben. Nicht unerwähnt möchte ich jedoch lassen, was er am Schlusse seiner Ausführungen bemerkt: „Nach dieser Beschreibung der Verfinsterungen will ich nun zu den Anschauungen der übrigen Autoren übergehen ... Ich will nun auch Anfang, Fortgang und Ende der Finsternis nach der Ansicht (sententia) des NIC. COPERNICUS für den Meridian von Angsburg kurz beschreiben, damit die Wißbegierigen bei mir nicht etwas vermissen. Ich habe aber nur die Sonnenfinsternisse berechnet. Denn von den Mondfinsternissen habe ich die meisten gesehen nnd aufmerksam beobachtet. Aus dieser Erfahrung nnn habe ich die Überzengung gewonnen, daß die Berechnungen derselben nach meinen Tafeln angestellt vollkommen richtig sind nnd so viel wie möglich auf den Zeitpunkt stimmen, was gerade die Eifrigen bestätigt finden werden, wenn sie den Himmel genauer beobachtet haben. Aher bei den Sonnenfinsternissen habe ich eine solche Erfahrnng nicht. Daher kann ich nichts Bestimmtes über deren Berechnungen versprechen, nnd es erscheint deshalb auch nicht ratsam, aus so wenigen Beispielen irgend eine Gewißheit festzusetzen. Demnach möge über die Zeit der Sonnenfinsternis jeder nach seinem Gut-

1) S. u. das Mannskript „tabnla domorum coeleſtinm ... ad ...“.

2) Dabei gebraucht er zur Angabe der Größe der Finsternis statt „pnncta ecliptica“ und „minut.“ die Bezeichnnng mittels „digiti ecliptici“ und „scrup“. (1 digitns = 60 scrup.)

3) Nach welcher von Mittag bis Mitternacht und von Mitternacht bis Mittag je 12 Stunden gezählt wurden.

dünken entscheiden, ob er lieber der Rechnung des Kopernikus oder Peuerbach oder der meinigen folgen will." Daran schließt sich ein großes Verzeichnis der hervorragendsten Städte Europas in alphabetischer Ordnung mit Angabe ihrer geographischen Breite und der Meridiandifferenz zwischen dem Meridian von Augsburg und der betreffenden Stadt in Uhrzeit sowie in Bogenmaß der Mondbewegung ausgedrückt, um die Zeit einer Mond- oder Sonnenfinsternis und den wahren Ort des Mondes für jeden dieser Erdorte bestimmen zu können. Um aber denselben zur Zeit einer Finsternis für eine andere Stadt anzugeben, wird nicht die parallaktische Verschiebung des Mondes für Augsburg und diese Stadt addiert oder subtrahiert, sondern der Bogen, welchen der Mond in der Differenz der Ortszeiten beider Städte am Himmelsgewölbe beschreibt, wodurch natürlich immer ein etwas größerer Wert der Verschiebung sich ergibt. Unschwer seien die Zeiten der Verfinsterungen statt auf die Zeit der halben oder kleineren Uhr (dimidii horologii, auch minoris horologii) auf die der großen Uhr (majoris horologii) zurückzuführen, wobei wir erfahren, daß damals in Breslau und Prag die Zeit mit dem Untergange der Sonne zu zählen angefangen wurde, in Nürnberg aber der Tag mit dem Aufgange der Sonne, die Nacht mit dem Sonnenuntergange.

Den Schluß bildet eine neue Tafel der Tageslängen für Polhöhen von 35° bis 63°.

Die Kontrolle des richtigen Eintreffens der von ihm berechneten Mondfinsternisse geschah nach seinen eigenen Aussagen Tycho[1]) gegenüber durch Beobachtung derselben mittels sorgfältig konstruierter Uhren besonders der Fugger, bezüglich der Sonnenfinsternisse konnte, wie er selbst gesteht, eine solche nicht geübt werden. Jedoch wird seine Autorität über die Schilderung der Sonnenfinsternis von 1530. III. 29 durch Kepler[2]) angerufen, indem er sagt: „Zwar ergibt die Rechnung nach Tycho dieselbe nicht als total, jedoch Cyprianus nennt sie auch eine schwarze, ob aus dem Augenschein, weiß ich nicht."

6. Ephemeridum novum atque insigne opus ab anno domini 1556. usque in 1606. accuratissime supputatum: cui praeter alia omnia. . . . Ausgburg wie oben unter 1. 1557. Mense Martio. In 2°.

Der Inhalt des Werkes wird mit großem Pomp eingeführt. In der Vorrede äußert sich Leovitius: „Außer dem wahrhaft königlichen Werke der alfonsinischen Tafeln existierten alte Ephemeriden von Regiomontanus als Manuskript desselben, die mir insofern zur Unterstützung dienten, als in ihnen die Grundlage für die einzelnen Bewegungen der Himmelskörper auf das Jahr 1449 festgelegt ist. Als mir diese der hochangesehene,

1) *Astronomiae instauratae progymnasmata* (de stella nova), 1610, p. 705—710.
2) J. Kepleri *Opera omnia* ed. Frisch; *Astronomiae pars optica* cap. III. 2 p. 315.

scharfsinnige und mit den gründlichsten Kenntnissen in verschiedenen Wissenschaften reich ausgestattete JOH. FUGGER mitgeteilt hatte, hielt ich es wegen des hohen Ansehens des Verfassers für angezeigt, denselben zu folgen und zwar um so mehr, als auch die Tafeln von JOH. SCHÖNER ganz mit ihnen übereinstimmen, ausgenommen die Bewegung des Mondes, über welche ein ausführlicheres Rechnungsverfahren in meinen Tafeln über die Berechnungen der Bewegung sowohl nach der Meinung des REGIOMONTANUS als nach meiner gegeben wird.“ Eigentümlicherweise bezieht sich LEOVITIUS auf dieses Manuskript des REGIOMONTANUS, während ihm doch die 1474 (1475) oder wenigstens die 1498 erschienenen Ephemeriden desselben (s. o.) bekannt sein mußten. Hat er vielleicht dem REGIOMONTANUS selbst mehr vertrant als dem eigentlichen Bearbeiter und Herausgeber jener, dem Heilbronner Mathematiker JOH. SANTRITTER?

Nachdem der Inhalt des großen Werkes schon unter 5 dnrch LEOVITIUS selbst skizziert ist, erübrigt noch einiger Beigaben und Randglossen in dem mir zur Hand gekommenen Exemplare der Münchener Staatsbibliothek Erwähnung zn tun. Demselben ist vorgebunden ein handschriftlicher Auszug über die wichtigsten Ereignisse aus der Natur und Geschichte vom Jahre 454 nach † bis zum Jahre 1555 aus der Manßfeldischen Chronik (ed. von CYRIACUS SPANGENBERG, Eisleben 1572) und im Werke selbst finden sich verschiedene handschriftliche Hinweise darauf, daß die Tafeln des LEOVITIUS sich bei ORIGANUS (DAVID TOST) finden, welches Plagiat zu kontrollieren mir unmöglich war, da von dessen zahlreichen Bänden nur die Foliobände 13, 14 und 15 in der Münchener Staatsbibliothek vorhanden sind. Indes bezichtigt diesen ORIGANUS auch MAGINI des Plagiats und wirft ihm verschiedene Irrtümer vor.[1])

Über dieses sein größtes Werk haben die hervorragendsten Astronomen seiner und späterer Zeit, TYCHO und KEPLER, etwas verschiedene Urteile gefällt. Indem ersterer einerseits seiner schöpferischen Geschicklichkeit nnd seiner großen, unermüdlichen Arbeitskraft, mit welcher er viele Canonen anfgestellt und die Ephemeriden vieler Jahre berechnet nnd damit die Astronomie nach dieser Seite wie kein anderer bereichert hat, alles Lob spendet, bedanert er andererseits diese vergebliche vieljährige und angestrengte Arbeit, da die alfonsinischen Tafeln, denen er allzusehr vertrante, und auch die kopernikanischen nicht erfüllen, was sie versprechen, und die Messungen der Stellungen der Planeten nicht hinreichend genau festgestellt sind.[2]) KEPLER hingegen schreibt in einem Briefe an HERWART 1602[3]): „LEOVITIUS hat uns an ihrer Stelle (der alfonsinischen) einen möglichst hinreichenden

1) DELAMBRE, *Hist. de l'astr. mod.* I, 310.
2) *Astr. inst. prog.* ebenda.
3) J. KEPLERI *Opera omnia* ed. FRISCH III, 694.

Ersatz geliefert", bemerkt aber wohl auch bezüglich der alfonsinischen, daß er sie wenig kenne, weil sie keinen Nutzen bringen, daß ihrer nicht viel Erwähnung geschehe, und daß nach Reinhold dieselben von den wahren Tatsachen in vielen Stücken sehr stark abweichen, nnd nach Wolf[1]) stützt sich die Berechnung der Keplerschen Ephemeriden auf die entsprechenden Arbeiten von Stadius, Magini und Leovitius. Indes weichen die ersten, hauptsächlich nach dem kopernikanischen Systeme berechneten und 1551 erschienenen, die prutenischen Reinholds, auch nicht unbedeutend von den wahren Stellungen ab, wie es mit Rücksicht auf die Zurückführung derselben auf das Zentrum des exzentrischen Kreises, der Bahn der Erde, als den mittleren Sonnenort statt auf den wahren und die gleichförmige Bewegung in demselben statt der ungleichförmigen in der Ellipse nicht anders zu erwarten war.

7. Im Gegensatze zu dem vorgenannten Werke unscheinbar seiner Größe nach, auf 52 Blättern nur in 4°, präsentiert sich das Werkchen, welches das nicht geringe Aufsehen, das Leovitius im großen Publikum hervorrief, begründete, nämlich **De conjunctionibus magnis inſignioribus ſuperiorum planetarum, Solis defectionibus, et Cometis, in quarta Monarchia, cum eorundem effectuum hiſtorica expoſitione. His ad calcem acceſſit Prognoſticon ab anno Domini 1564. in Viginti ſequentes annos.** Laugingae ad Danubium excudebat Emmannel Salczer a. d. M.D.L.XIIII. Mit einer Widmung an den Kaiser Maximilian II.

Den Beginn seiner Abhandlung macht er mit der Einteilung der Triangel, die nacb der Zahl nnd Art der Elemente eine vierfältige ist. Der 1. ist der feurige, der 2. der irdische, der 3. der luftige, der 4. der wässerige.[2]) Auf diese Einteilung beziehe er die allgemeine Herrschaft der Triangel, so daß nunmebr in Betracht zu ziehen ist, wann der einzelne Bestand und Geltung hatte. Angefügt wird jedem eine besondere Bescbreibnng der großen Konjunktionen der oberen Planeten, welche stattfanden oder nacbher erwartet werden, wobei kurz deren Wirkungen an augenfälligen Beispielen aus der Geschichte gezeigt werden . . . Er greife mit dem Beginne dieses Werkes nicht weiter zurück als auf das römische Reich, dessen langsames Siechtum wir vor Augen haben, und das der Reihe nach das 4. und nach der Weissagung Daniels das letzte sein wird.

Aus dem Prognostikon vom Jahre 1564 bis auf die kommenden 20 Jahre möchte ich nnr den Schluß anfübren: „Der Monat Mai des Jahres 1583 wird eine große Konjunktion der oberen Planeten im äußersten Ende

1) *Gesch. d. Astr.* p. 303.

2) Es lassen sich in den Tierkreis nur 4 Triangel einzeichnen, so daß Zeichen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind: Der 1. ist ♈, ♌, ♐, der 2. ♉, ♍, ♑, der 3. ♊, ♎, ♒, der 4. ♋, ♏, ♓ [E. Mayer, *Handb. der Astrologie*].

der Fische bringen, welcher im kommenden Jahre 1584 die größte Vereinigung oder Anhänfung beinahe aller Planeten im Widder um das Ende des Monats März und den Anfang April folgen wird. Und was noch mehr ist, bald nachber wird eine Sonnenfinsternis gesehen werden im 20. Grade des Stiers in der Nähe des Hauptes Algol, des gewaltsamsten und gefährlichsten Fixsterns, unter der Herrschaft der Venus, während 5 Planeten im Widder vereint sind und gegen das 12. Haus[1]) hin sich erstrecken. Da eine solche Konstellation der Gestirne in einem feurigen Zeichen stattfindet, so vermute ich die Erscheinung eines ungeheuren Kometen und verschiedene auffallende Erscheinungeu. Daher werden vielfältige und verschiedene Wirkungen aus mehreren Ursachen entstehen. . . . . . Diese meine mutmaßlichen Deutungen, welche mit den wisseuschaftlich begründeten Prophezeiungen der ältesten Astronomen vollkommen übereinstimmen, habe ich, welchen Wert man ihnen auch beilegeu mag, veröffentlichen wollen. Deren deutsche Fassung habe ich meinem Werke der Ephemeriden vor 7 Jahren einverleibt. Dieselbeu lauten in lateinischer Sprache wiedergegeben folgendermassen:

Post mille expletos á partu uirginis annos,
Et post quingentos rurfus ab orbe datos:
Octogefimus octauus mirabilis annus
Ingruet, is fecum tristia fata feret.
Si non hoc anno totus malus occidet orbis,
Si uon in nihilum terra fretumque ruet:
Cuncta tamen mundi furfum ibunt atque retrorfum
Imperia, et luctus undique grandis erit.
Vel brevis ita.
Mille salutis agat, quingentos mundus et annos,
Octauus decies, bisque quaternus eat:
Et tibi ucl muudi ruitura notabitur aetas,
Omnia uel miris cladibus acta cadent.[2])

Dieses Werkchen wnrde, wie oben bemerkt, 1564 lateinisch gedruckt in Lauingen in 4⁰, ferner ebenda im selben Jahre unter dem Titel: „Grundliche | Klerliche beschreibung | und Historischer bericht | der fürnemsten grossen znsammenkunfft der obereu Planeten | der Sonnen Finsternussen |

1) Das 12. Haus hieß das 4. Fallhaus, der böse Geist.

2) „Nach vollen 1000 Jahren von der Geburt der Jungfrau un und nach 500 weiteren von diesem Zeitraum an wird das 88. merkwürdige Jahr eintreffen; daselbe wird traurige Schicksale bringen. Wenn auch in diesem Jahre nicht der ganze schlechte Erdkreis zugrunde geht, wenu auch nicht die Erde und das Meer in das Nichts zurückfallen, so werden doch alle Reiche der Welt umgestürzt werden und wird große Trauer überall sein.“ Oder kürzer: „1500 Jahre des Heils wird die Welt bestehen und 10mal wird das 8. und 2mal das 4. kommen, dann wird unsere alte Welt dem Untergange verfallen und alles durch schauerliche Verheerung zusammenstürzen.“

der Cometen | und derselben wirkung | so sich in der vierden Monarchien erzeigt und begeben | sampt einem Prognostico von dem 1564. Jar | bis auff nach volgend zweinzig Jar werende | gesteldt und beschrieben". Dieser deutschen Ausgabe ist noch eine salbungsvolle, mit Ermahnungen an den Leser zur Buße und Einkehr, Bibelsprüchen aus Daniel und einem Citat aus Platos Dialog gewürzte „Beschlußrede" beigefügt. Bayle berichtet, daß es schon im nächsten Jahre ins Französische übersetzt wurde. Nach Michaud (*Biogr. univ.*) und *Nouvelle biographie générale* (Firmin Didot Frères) wurde es 1573 in London, 1586 in 4° in Wittenberg (in München vorhanden unter dem Titel *Opus insigne de magnis superiorum planetarum conjunctionibus*), 1618 in 4° in Marburg aufgelegt, nach *Bibliogr. générale de l'astronomie par* J. C. Houzeau *et* A. Lancaster (I, Nr. 5579 p. 832 und Nr. 5644 p. 837) im Anschluß an des R. Goclenius *Acroteleution astrologicum*, 1568 in 12° ins Französische übersetzt. In dieser Sprache erschien es aber auch unter dem Titel *Préditions pour trente cinq ans des choses plus memorables* in 8° in Lyon 1574. Nach F. J. Studnička war es auch ins Böhmische übersetzt. Die beiden Teile wurden auch einzeln in verschiedenen Jahren herausgegeben. Die wiederholte Auflage desselben und zwar in verschiedenen Sprachen zeugt von der großen Abnahme, welche dasselbe gefunden hat. Dieses ist unstreitig in erster Linie auf die Prophezeiung des Weltunterganges im Jahre 1588 (nicht 1584, wie fast durchgehends gesagt wird) zurückzuführen. Dieselbe verursachte in der ganzen zivilisierten Welt eine merkwürdig große Erregung. Auch in seiner Vaterstadt rief sie, wie mir F. J. Studnička schrieb, einen derartig großen Schrecken hervor, daß die Stadtväter in einer am 11. Juli 1584 (?) anberaumten Sitzung beschlossen, in der Stadtkirche Predigten, Bittgänge u. dgl. Akte abzuhalten, um sich darauf vorzubereiten. Sollte der Dechant nicht dafür sein, so soll er in den Carcer abgeführt werden. So schloß ihr Dekret. Diese Prophezeiung war es aber auch, was Leovitius in den Augen vieler dem Fluche der Lächerlichkeit anheim fallen ließ. Übrigens war Leovitius nicht der erste, der den Weltuntergang für das Jahr 1588 (1584) prophezeit hatte, sagt er ja selbst, daß sie mit den wissenschaftlich ganz begründeten Prophezeiungen der ältesten Astronomen übereinstimmen. Nach Wydra wenigstens hatte sich dieselbe schon ein Regiomontanus und Schoner angeeignet; Leovitius suchte sie seinerseits astronomisch und astrologisch zu begründen.

8. Über die bereits am 7. November 1572 gesehene, aber von Tycho erst vom 11. November[1]) an beobachtete stella nova, nach ihm „stella nova

1) Wolf sagt (*Handb. der Astr.*) wie die meisten Schriftsteller richtig „11. November", ein anderes Mal aber „9. November".

Tychonis" benannt, wurden vom 25. November an auch durch Leovitius Beobachtungen angestellt, über welche er ein Schriftchen in lateinischer und deutscher Sprache erscheinen ließ, welch' letzteres („Verfertiget den 20. Februarij | im Jar 1573") betitelt ist: **Von dem newen Stern. Bericht Cypriani von Leowitz Mathematici zu Laugingen | von dem newen Stern oder Cometen | welcher gesehen ist worden im Nouember vnd December des 1572. auch im Januario vnd Februario des 1573. Jars.** Mit Kayserlicher Majestet Gnad vnd Freyheit nicht nachzutrucken. Getruckt zu Laugingen an der Donav | im Jar 1573."

Nicht weniger als durch sein unter 7 genanntes Werkchen wurde er durch dieses Traktätchen — es hat nur 4 Seiten Inhalt und noch dazu wenig wissenschaftlichen — viel genannt. Ja es bildete sich im Verlaufe der Zeit über ihn die Legende, daß er diesen Sterne mit dem „Sterne der drei Weisen aus dem Morgenlande" in Zusammenhang zu bringen trachtete, spricht ja noch O. Warnatsch in der Zeitschrift Natur und Offenbarung, Bd. 42 (1896), die Vermutung aus, Leovitius habe sich dazu und astrologischer Zwecke halber durch Kometenerscheinnngen der Jahre 945 und 1264[1]), die historisch nachgewiesen seien, verleiten lassen, und hielt diese Behauptung noch ein Astronom der Neuzeit, Klinkerfues, der Beachtung wert. Aus des Leovitius Schriftchen aber ergibt sich über die Sternerscheinungen der Jahre 945 und 1264, daß er ein geschriebenes Buch als Quelle hatte, nicht, wie Mädler berichtet, „eine alte Nürnberger Chronik, die jedoch wenigstens gegenwärtig nicht mehr existiert", ferner daß er „des Sternes der drei Weisen" keine Erwähnung macht. Da nun die spärlichen arabischen und chinesischen Berichte über das Auftreten von *neuen Sternen* damals kaum bekannt gewesen sein dürften, so könnte Leovitius seine Mitteilung nur aus einer geschriebenen Chronik geschöpft haben. Jedoch selbst die oben genannte gedruckte umfangreiche Mansfelder Chronik schweigt sich über das Jahr 945 vollständig aus. Aber auch über den Kometen von 1264 scheint Leovitius nur eine verschwommene Nachricht gehabt zu haben, denn diese Chronik berichtet darüber: „Anno 1264: Ist im Augustmonath ein grausamer schrecklich Comet erstlich und volgende 3. Monde lang am himmel gesehen worden, und ist allemal vor der ☉anffgang nach morgen wieder erschienen." Das Sternbild der Kassiopeja, in welcher die stella nova stand und auch bei ihrem früheren Erscheinen hätte gestanden haben müssen, geht aber in unseren Breiten nicht unter. Die Mitteilung ferner, welche Pingré in seiner *Cométographie* über Kometenerscheinungen in den Jahren 945 und 1264 macht, ruhen gleichfalls auf unsicherer Basis. Denn seine Citate führen über Lubienitzky, Hevel, Licetus und Brahe schließlich wieder auf Leovitius zurück.

1) Mädler, *Gesch. d. Himmelsk.*, sagt II, 269 richtig „1264", I, 190 aber „1260".

Gegen die Art und Weise der Beobachtung dieses Sterns durch Leovitius, seine Mitteilungen über dessen Glanz, Farbe, Veränderung derselben, seine scheinbare Bewegung, Abnahme seiner Größe und die daraus gezogenen Schlußfolgerungen geht Tycho in seinen ausführlichen, ja weitläufigen Auseinandersetzungen *De stella nova anni 1572*, in welchen er dieses Schriftchen vollständig anführt, scharf zu Gericht.

9. Im Jahre 1590 erschien zu Leipzig ein astrologisches Werkchen, in welchem eine leichte Art die Nativität zu stellen gelehrt wird, nach dem Vorgange der vorzüglichsten Astronomen Joh. Stoffler und Cyprian Leovitius von Georg Cunäus, Doktor der Medizin.

10. Dem *Inventum* P. Apiani durch M. Georgium Galgemair (Augsburg 1616) ist auf 3 Seiten ein **„Inventum Cypr. Leovitii, a Leonicia. De retinenda vel abijcienda latitudine ſignificatorum et promiſſorum in directionibus“** beigefügt unter Hinweis auf Schonerus lib. 3. cap. 6.

11. Das in Ae. Strauchius, *Astrologia aphoristica* (Uitembergae 1712. in 8⁰) von M 8 bis C 3 mitgeteilte **„Cypriani Leovitii De judiciis nativitatum doctrina“** ist nur ein Abdruck des gleichen Themas aus dem Ephemeridenwerke des Leovitius a a bis a a 2. Dasselbe ist auch teilweise als Manuskript, aber nicht von der Hand des Leovitius, in der Münchener Staatsbibliothek vorhanden.

12. Das in der *Bibliogr. générale de l'astronomie par* Houzeau et Lancaster I, p. 784 Nr. 4921 als Manuskript aufgeführte und in der Nationalbibliothek in Paris vorhandene **„Liber de judiciis astrorum; praemittitur thema genethliacum Adami a Dietrichstain, nati anno 1527“** und das hierauf bezügliche ebenfalls als MS in der vatikanischen Bibliothek befindliche **„L'horoskope de Dietristain“** habe ich in den Werken des Leovitius nicht abgedruckt gefunden; jedoch ist in das vorgenannte Werk desselben a a 8 bis a a 9 ein „Exemplum genituræ secundae quae accidit anno domini 1527“ aufgenommen, das jedenfalls auf diese Geburt Bezug hat.

In dem oben zitierten Werke erwähnt Tycho Brahe, daß sehr viele zu astronomischen Rechnungen, insbesondere zur ausführlicheren und leichteren Herstellung der Tafeln des primum mobile[1]) dienliche Manuskripte des Leovitius in Augsburg in der Bibliothek der Fugger zum großen Nachteil für die Förderung der Wissenschaft verwahrt seien. Dann sind auch die Ephemeriden sehr vieler Jahre nicht bloß nach der alfonsinischen, sondern auch nach der kopernikanischen Rechnung abgeleitet (was alles

1) „Sphaera integra primi mobilis“ ist in der ptolomäischen Astronomie „Orbis unicus, in quo decem circuli imaginantur quorū praecipui sunt Aequinoctialis et Zodiacus“ (Schreckenfuchs s. u.), hier jedoch wie sonst öfter ist „Primum mobile“ eine Art sphärischer Astronomie.



ihm bei seiner Anwesenheit in Lauingen LEOVITIUS gezeigt habe) dem Lichte der Öffentlichkeit entzogen. Dieselben befinden sich nunmehr in der k. k. Hofbibliothek in Wien[1]) und zwar sind es 27 verschiedene und 2 Duplikate. Der Übersicht halber teile ich sie in 3 Gruppen: Die eine umfaßt Manuskripte zu den oben besprochenen Werken oder Teile davon, die zweite bilden hauptsächlich Tabellenwerke mit und ohne Kommentar, die der dritten sind astrologischer Natur, entweder Anweisungen zur astrologischen Wahrsagekunst (Geomantia) oder Feststellungen der Nativität verschiedener Persönlichkeiten unter den mannigfaltigsten Titeln (Nativitates, Genethliacon, judicium seu explicatio totius nativitatis, thema coeleſtis et judicium de nativitate). Ich werde nur auf die der 2. Gruppe und die beiden Dedikationswerke an Kaiser MAXIMILIAN II., welche der letzten Kategorie angehören, näher eingehen. Die Schriftform ist bei allen durchgesehenen die humanistische Minuskel, nur die „Explicatio nativitatis MAXIMILIANI II. Imp." ist in Kurrentschrift geschrieben. Ich führe sie nach der Reihe, wie sie mir übermittelt wurden, auf.

1) Nr. 10786 d. k. k. H. B.[2]): EPHEMERIDES COMPENDIOSAE QUADRINGENTORUM ANNORŨ, INCIPIENTES AB ANNO DOMINI 1349 ET EXTENDENTES SE USQUE AD ANNŨ DOMINI 1750. PER CYPRIANUM LEOVITIUM À LEONICIA BOËMUM SUPPUTATAE. Ohne Jahresangabe.

Diese Ephemeriden enthalten in rotgedruckten Tafeln handschriftlich sorgfältigst eingetragen für den 10., 20. und 31., bezw. 10., 20. und 30., bezw. 10., 20. und 28. Tag der einzelnen Monate der vorbezeichneten Jahre auf der linken Seite die Angabe der astronomischen Längen von ☉, ☽, ♄, ♃, ♂, ♀, ☿ und des aufsteigenden Mondknotens (☊) als „Motus Solis et Lunae ac Planetarum Capitisque in Zodiaco" in Graden und Minuten und auf der rechten Seite die Latitudines Planetarum ab Ecliptica in Graden und Minuten, daneben für das betreffende Jahr die Angabe der goldenen Zahl, des Sonnenzirkels, Sonntagsbuchstabens, die Daten von Quadragesima, Pascha, Pentecoste und Aventus Dõj.

Ihnen folgen „Tabulae ex quibus longitudines ac latitudines planetarum ad ſingulos menſium dies citra ullum laborem colliguntur" auf 13 Seiten, mittels welcher die angegebenen Größen für den Mittag eines beliebigen Tages der 8, 9, 10 und 11tägigen Intervalle auf Min. genau berechnet werden können.

Diesem gebundenen Tabellenwerke liegt eine auf 4 Blättern gefertigte

1) Nach gefälliger Mitteilung der Direktion sind sie schon im 17. Jahrh. dorthin gekommen, während die Kaiserlichen Dedikationsexemplare im 16. Jahrh. der Wiener Palatina eingereiht wurden.

2) K. k. Hofbibliothek.

bandschriftliche Anweisung zur Anwendung dieser letzteren Interpolationstafeln bei.

2) Nr. 10923 der k. k. H. B.: Tabulae Astronomicae alias resolutae dictae, ex quibus tum erraticorum, tum etiam fixorum syderum, motus ad multa praeterita et futura tempora calculari possunt, pro meridiano celeberrimae civitatis Germaniae Augustae Vindelicorum constitutae. Quarum ussus extendit se etiam ad alium quemvis meridianum, praeceptis doctrinae in hoc consultis. In gratiam Generosi ac Magnifici viri D. Georgij Fuggeri, Domini in Kyrchberg et Weysenhorn ũ Domini ac Mecaenatis sui perpetua fide et observantia colendissimi. Per Cyprianum Leovicium à leonicia. Ohne Jahresangabe.

Diese Arbeit beginnt mit einer sebr elementaren Einleitung, nämlich über die vier Operationen mit Bogenteilen (°, ', ", ‴, ⁗, '''''), eine weitere über die Bestimmung des mittleren Standes der Planeten, der „Anges" der Planeten zu einer bestimmten Zeit, des Argumentes der Sonne, des mittleren Argumentes der drei oberen Planeten und dann der drei unteren (☾, ♀, ☿), des mittleren Zentrums der 5 Planeten (außer ☾), des Mondes speziell, über den Ort des gemeinschaftlichen „Aux" zu einer beliebig gegebenen Zeit, über den wahren Ort der Fixsterne, die wahre Bewegung der Sonne und des Mondes zu einer beliebig gegebenen Zeit, über das Genzahar (Drachenkopf) des Mondes, über die wahren Bewegungen der übrigen 5 Planeten, über die Richtung, das Rückwärtsschreiten und den stationären Zustand der 5 Planeten, über die Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung des Mondes, über dasselbe sowie über die Gleichheit der Bewegung der übrigen Planeten, ob ein Planet durch die Zahl vermehrt oder vermindert wird (nämlich ob die Gleichnng seines Arguments zu seiner mittleren Bewegung addiert oder subtrahiert wird), über die Anfsuchung der Breite des Mars, eine Regel über die Sonne, über die Aufsuchung der Breite der Venns und des Merkur, ob ein Planet von den drei oberen in seiner Breite aufsteigend oder absteigend ist, dasselbe über die beiden unteren (Venus und Merkur), ob ein Planet sowohl in seinem Deferens als in seinem Epicykel aufsteigend oder absteigend ist, den Auf- und Untergang der drei oberen Planeten, der Venus, des Merkur, über die erste Erscheinung nnd das Verschwinden der drei oberen Planeten, der zwei unteren, ob ein Planet von den drei oberen sichtbar oder unsichtbar ist in den Strahlen der Sonne, dasselbe von den zwei unteren.[1])

1) Über das ptolemäische System und die der neuen Astronomie fremden Begriffe geben drei Tafeln am Schlusse des Werkes Eras. Oswaldi Schreckenfuchsii *Commentaria in novas theoricas planetarum* Georgii Purbachii (Basel 1556), eine treffliche Übersicht.

Dann folgen die nötigen Tafeln, manche bis zum Jahrg. 2060 reichend, zum Schluß eine Tafel der 33 hervorragendsten Fixsterne und des Orionnebels nach Länge, Breite (in Graden und Minuten), Größe (drei Größenklassen) und Natur (natura) mit Angabe derjenigen Planeten, deren Wirkungen sie entsprechen, von ALPHONS nach 1251 Jhr. und 5 Mt. rektifiziert. Zur Charakterisierung der Art der Bezeichnung, der Genauigkeit und Veränderlichkeit der Position sei folgendes Beispiel angeführt: Cauda Leonis 5 S (signa) 11° 38′ Länge 11° 50′ n. Br. I. Cl., Sat., Ven. und Merkur. Nach den neueren Sterntafeln ist dieser Stern β Leonis II. Cl. und hat eine Rektascenzion von 175° 47′ 54″ und eine nördliche Deklination von 15° 12′ 53,5″, welchen Werten nach meinen Berechnungen ohne Berücksichtigung der Nutation eine Länge $\lambda = 170°\ 1'\ 47''$ und eine n. Breite $\beta = 12°\ 16'\ 34''$ entspricht. Unter Zugrundelegung einer mittleren Präzession von 50,2113″ müßte sich für die Zeit von 1251 Jahr. 5 Mt. nach † eine Länge von 5 S 10° 3′ 47″ ergeben.

3) Ein anderer Band seiner Manuskripte (Nr. 10924 d. k. k. H. B.) ist betitelt: TABULA AD SCIENDUM QUOT PARTES AEQUATORIS ET EARUM SCRUPULA, SINGULIS HORIS ASTRONOMICIS AC EARUM MINUTIS, RESPONDEANT: ET È CONTRA, QUOT HORAE ASTRONOMICAE AC EARUM MINUTA, SINGULIS PARTIBUS AEQUATORIS ET EARUM SCRUPULIS und TABULA AD COGNOSCENDUM QUOT PARTES ET SCRUPULA ECLIPTICAE, SINGULIS ASCENSIONIBUS RECTIS VEL OBLIQUIS AUT DESCENSIONIBUS OBLIQUIS, RESPONDEANT, beide mit Anweisungen zu ihrem Gebrauche und Interpolationstafeln: TABULA PRO SUPPUTANDIS VARIIS TABULIS ASTRONOMICIS, VALDE UTILIS AC NECESSARIA ebenfalls mit Anweisung, um Interpolationen zwischen je 3°, 5°, 8°, 9°, 10°, 11°, 12°, 20° der Ekliptik vornehmen zu können.

4) Ein großer Band eines Manuskriptes (Nr. 10696 d. k. k. H. B.) führt den Titel: OPUS ASTRONOMICUM ABSOLUTISSIMUM, EDOCENS RATIONEM CALCULANDI MOTUS, NON TAM ERRATICARUM QUAM FIXARUM STELLARUM, AD MULTOS PRAETERITOS ET FUTUROS ANNOS.

HUIC ADJECTA EST DOCTA AC METHODICA DEMONSTRATIO, EX QUIBUSNAM FONTIBUS SEU PRINCIPIJS TABULAE ASTRONOMICAE, MOTIBUS COELESTIUM SYDERUM, CALCULANDIS COMPETENTES, IN ISTO OPERE CONTENTAE, DEDUCANTUR VEL CONSTENT, ET QUALITER ILLAE AD OMNEM MERIDIANUM DEBEANT FORMARI AC DE NOVO COMPONI, EXEMPLIS, IN SINGULA DOCTRINAE PRAECEPTA, APPLICATIS. Ebenfalls GEORG FUGGER gewidmet.

Ihr geht voraus die schon oben zu Nr. 10923 angeführte Einleitung, während sie selbst enthält: eine Anweisung zur Herstellung von Tafeln der mittleren Bewegungen der Planeten, des Drachenkopfes, der „Auges“ und der Fixsterne und des Vorwärts- und Rückwärtsschreitens der 8. Sphäre nach 1^h, 1^d, einem gemeinen Jahre, einem Schaltjahre, 10 Jhr.,

20 Jhr., 100 Jhr., 500 Jhr., 1000 Jhr., 2000 Jhr., eine Zusammenstellung von Tafeln der mittleren Argnmente der drei nnteren Planeten nach denselben Zeiten, des mittleren Argumentes der Breite des Mondes nach 1^h, 1^d, einem gemeinen Jhr., 4 Jhr. einschließlich eines Schaltjahres, eine Tafel aller vorgenannten Größen in weiter auseinander gelegenen Jahren bis zu 2000 Jhr., ferner eine Anweisung zur Herstellung von Tafeln für die mittleren Bewegungen der Planeten und der mittleren Argumente der drei unteren Planeten in den einzelnen Monaten eines gemeinen Jahres und eines Schaltjahres und des mittleren Argumentes der Breite des Mondes nach einem gemeinen Jahre und nach einem Schaltjahre, all dasselbe in den einzelnen Tagen, Stunden und Minuten und eine Anweisnng zur Herstellung von Tafeln über diese Größen für bestimmte Jahre.

Seinen Berechnungen der mittleren Bewegungen der Gestirne legt er als „radix primaria“ die Zeit Christi Geburt und den Meridian von Nürnberg zugrunde (einige Astronomen nehmen die r. pr. mit der Zeit der Erschaffung der Welt, einige die Zeit der Sündflut, andere die Zeit des Königs Nabuchodonozor). Dann folgt eine Berechnung der „Auges“ der Planeten zur Zeit Christi Gebnrt und Herstellung von Tafeln nach dieser für ein bestimmtes Jahr mit Anweisung zu deren Gebrauch, für Differenzen derselben für auseinander liegende Jahre, für die einzelnen Monate eines gemeinen-, eines Schaltjahres, der einzelnen Tage, eine Anweisung über die Berechnung der mittleren Bewegung der Planeten zu jeder gegebenen Zeit und der schon unter 2) der M S genannten astronomischen Grössen, außerdem noch die Aufsuchung der Breite des Jupiter und Saturn — weitere Ausführungen dessen, was in Nr. 10923 enthalten ist, — eine Tafel über die astronomischen Daten zur Zeit der Geburt der Fuggerschen Familienglieder, dann Tabulae Astronomicae motibus coelestium syderum competentes, pro meridiano praeclarissimae civitatis Germaniae, Normbergae, supputata. Quarum ussus extendit se etiam ad alium quemvis meridianum, praeceptis doctrinae in hoc consultis, welche zu den vorhergehenden Lehren für bestimmte Jahre, beziehnngsweise für eine gewisse Zahl von Jahren die obengenannten astronomischen Daten enthalten, dann Tafeln der Gleichungen der 8. Sphäre, der Sonne, des Mondes und der 5 übrigen Planeten, Tafeln der Breiten des Mondes und der übrigen Planeten, beide „omnium civitatum meridianis inservientes“, und zum Schluss die obengenannte Sterntafel, welche ebenfalls in Nr. 10923 sich vorfindet.

5) Nr. 10689 der k. k. H. B.: Tabulae colligendarum ex ephemeridibus latitudinum planetarū summa fide, cura, et diligentia supputatae, gleichfalls Georg Fugger gewidmet. 1553.

L. gibt hier eine Anweisung, wie durch Interpolation mittels der bei-

gefügten Tafeln aus den Ephemeriden, da dieselben die Breiten der 5 Planeten nicht für die einzelnen Tage, sondern nur für den 1., 10. und 20. Tag eines jeden Monats enthalten, für einen beliebigen Tag berechnet werden können. Einerseits aus den gewählten Beispielen, welche aus den Jahren 1520 und 1524 genommen sind, andererseits aus dem Hinweise auf seine handschriftlichen „Tabulae colligendorum ex ephemeridibus motuum planetarum ad quoduis tempus“, vollends aus der hier einmal auch beigefügten Jahreszahl (1553) kann geschlossen werden, daß sie Vorarbeiten zn seinem großen Ephemeridenwerke waren, das, wie oben erwähnt, mit dem Jahr 1556 beginnt und dieselben für die einzelnen Tage gibt.

6) Nr. 10697 der k. k. H. B.: Tabula domorum rationalium, quae ad altitudinem poli grad: 48 minut: 8 refertur, auch eine Widmung an Georg Fugger, ohne Jahreszahl.

Ein sorgfältig bearbeitetes und reichhaltiges Tafelwerk, dessen Inhalt sich auf dem Grenzgebiete zwischen Astrologie und Astronomie bewegt, insofern es eine Berechnung der Spitzen der Häuser, wie sie Regiomontanus nach seinem 14., 15. und 16. Probleme seiner *Tabulae directionum* im Gegensatze zu Ptolemaeus, Campanus und Gazulus sowie Johann von Ragusa eingeführt hat, nach Rektaszension des 10., astronomischer Länge des 11., 12., 1., 2. und 3. Hauses, sowie der schiefen Aufsteigung des 1. für die Polhöhe von 48° 8′ (Augsburg) nnd für die einzelnen Grade der Ekliptik im Momente ihrer Kulmination liefert. In zwei Stichproben für die Knlmination von ♈ 2° finde ich als Rektaszension (der Spitze) des 10. Hauses (d. i. des Kulminationspunktes des Äquators) 1° 51′, für den Ekliptikbogen (Spitze) des 11. Hauses ♉ 13° 28′ 37″. Leovitius gibt an 1° 51′ nnd ♉ 13° 28′.

7) Nr. 10694 der k. k. H. B.: Tabulae extrahendi minuta graduum eclipticae et circulorum positionum. Quae quidem ratio, ut alias valde difficilis ac laboriosa est, ita his adhibitis omnino facilis et expedita deprehenditur, Georg Fugger gewidmet, 1553, enthält ohne allen Kommentar auf den 4 ersten Seiten die Bruchteile von 1° in Minuten ansgedrückt für alle Vielfachen der Brüche $^1/_2$, $^1/_3$, ... $^1/_{60}$ bis zu einem ganzen, auf den folgenden aber die Zahlen, welche die Teile von 60′ sind, die sich aus den in Graden und Minuten gegebenen Bogen durch die anfeinanderfolgenden Zahlen dividiert ergeben — die Bogen genommen bis 5°. Z. B. gehört zu 107 beim Bogen von 4° 10′ die Zahl 26, d. h. nach nnserer Rechnung ist 4° 10′ : 107 = 60′ : 26. Was die Abrundung betrifft, so ist sie nicht nach unserer heutigen Regel in der Art durgeführt, daß bei der Division zweier Zahlen die letzte Ziffer des Quotienten um 1 erhöht wird, wenn der Rest gleich oder größer als die

Hälfte des Divisors ist, was schon Regiomontanus angewendet hat, sondern Leovitius erhöht wohl auch, aber nicht nach dieser Regel; denn er erhöht z. B. bei der Division mit 217 wohl beim Rest 183, aber nicht beim Rest 146. Es beruht dieses in Anbetracht seiner sonstigen Genauigkeit vielleicht auf einer gewissen Ausgleichnng der Resultate.

8) Nr. 10599 der k. k. H. B., in Seide gebunden nnd mit reichem Goldschnitte verziert, ist eine Dedikationsschrift an Kaiser Maximilian II. und fast wortwörtlich mit wenigen Abweichungen das Manuskript zu seinem Werke Nr. 7 in lateinischer Sprache.[1]) Nur fehlt auch hier die „Beschlussrede", dafür aber bildet den Schluss ein „Kurzes Prognostikon" vom Jahre des Herrn 1564 bis zum Ende des Jahres 1569 aus den vorhergehenden Berechnungen entnommen, worin er für Deutschland innere Kriege und Verwicklungen prophezeit, welche das Erlöschen des Septemvirats,[2]) den Verlust der Freiheiten der Fürsten und Städte und den Übergang aller Gewalt auf einen einzigen, den Kaiser, zur Folge haben werden.

9) Eine andere handschriftliche Arbeit (Nr. 10610 der k. k. H. B.), in gleicher Grösse und in gleicher Ausstattung, aber in Kurrentschrift geschrieben, enthält eine „Explicatio nativitatis Maximiliani II. imp. per Cyprianum Leovitium".

Es fehlt wohl die Jahresangabe; da jedoch in einer beigegebenen Tafel die Direktionen aller Signifikatoren (Bedeuter) zu denen ihrer Promissoren (Verheißer) für die einzelnen Jahre mit Beginn des 13. Lebensjahres des Kaisers, d. i. des Jahres 1540, dargestellt sind, so dürfte er dieses Horoskop jedenfalls vor diesem Jahre aufgestellt haben. Nun ist weder in diesem noch in dem vorausgehenden, ebenfalls ausdrücklich Maximilian II. gewidmeten handschriftlichen Exemplare, weder in der lateinischen noch in der deutschen Ausgabe seines Prognostikons eine Stelle zu finden, an welcher Leovitius demselben prophezeit, daß er Monarch von ganz Europa werde, weswegen nach Bayle[3]) der französische Geschichtschreiber Bodinus und insbesondere sein Nachbeter L. Guyon die Schale des Spottes über Leovitius ausschütteten; er sollte nach dieser Weissagung sogar über die ganze Welt regieren.[4])

Wenn sich auch schon aus dem Vorgeführten ergeben dürfte, wie weit Leovitius der Beachtung wert erachtet werden darf, so dürfte es doch nicht unangezeigt sein, von Zeitgenossen und Geschichtschreibern über ihn gefällte Urteile zu hören.

1) Es ist in der k. k. Hofbibliothek unter Nr. 10600 noch ein anderes handschriftliches Exemplar dieses Werkes vorhanden.

2) Der Kurfürstenwürden.

3) *Dictionnaire historique et critique* III, 664—665.

4) *Nouv. biogr. générale* (Firmin Didot) t. 30, 814.

Wir haben schon oben bemerkt, daß KEPLER ihn wiederholt zitiert, ja gewissermaßen als Autorität, so z. B. auch in *De stella nova in pede serpentarii* 1604 und 1605 cap. XI. p. 651[1]): „Bisher wurde gezeigt, an welchen Tagen Saturn und Jupiter, an welchen auch Merkur mit beiden zusammentreffe. Weil aber nach der Lehre des CYPRIANUS LEOVITIUS der Hinzutritt des Mars das richtige Maß einer großen Konjunktion ausmacht, so wollen wir auch die Beobachtungen dieses Planeten hinzufügen"; ferner ebenda cap. XXV. p. 703 eine große Konjunktion nach der Lehre des CYPRIANUS definierend. Auch die Worte MAGINIS[2]): „. . ufq; extenſam illarum tabularũ expoſitionẽ CYPRIANI LEOVITIJ, qui praeterea particulares etiam positionũ tabulas maximo numero auxit, et hoc precipuè nomine fit ipſius labor cōmendabilis" zeugen von dem Gewichte seines Namens. TYCHO[3]) bedauert zwar, daß LEOVITIUS den astrologischen Weissagungen allzusehr ergeben war und seine mühsamen Berechnungen der Ephemeriden nicht durch astronomische Beobachtungen mit dem Himmel in Einklang gebracht habe, nennt ihn aber einen durch Gelehrsamkeit und Geburt gleich ausgezeichneten und berühmten Mann, der des Lobes und der Erinnerung würdig sei und dessen ungeheuere Arbeiten im astronomischen Kalkul er immer empfehlenswert erachtet habe. WEIDLER[4]) bestätigt im ganzen Lob und Tadel des TYCHO und zitiert das Lob TRISSIERS (*Éloges* P. I. p. 422) über eines seiner Werke, der außerdem im 3. Band seiner *Abrégé de l'histoire des savans* das Urteil des BODINUS anführt mit den Worten: „BODINUS hat bemerkt, daß dieser Astrologe LEOWITZ einer der größten Mathematiker seines Jahrhunderts war." LEOVITIUS findet dann des öftern Erwähnung in Briefen von GIOVANNI DI STRASSOLDO, von BARTOLOMEO CHRISTINI und von PIETRO MAGNANI an ANTONIO MAGINI und von letzterem an THOMAS FINK[5]). DE THOU nennt LEOVITIUS wegen seiner Werke wiederholt einen rühmlich bekannten Astronomen.

1) J. KEPLERI *Opera omnia* ed. FRISCH.

2) *De astrologica ratione* (Venedig 1607), D 2.

3) *Astr. instauratae progymnasmata* (de stella nova), 1610, p. 705—710.

4) *Historia astronomiae* (1741), LIX A. 1556. p. 369.

5) Siehe A. FAVARO, *Carteggio inedito di* TICONE BRAHE, GIOVANNI KEPLERO *e di altri celebri astronomi e matematici dei secoli XVI. e XVII. con* GIOVANNI ANTONIO MAGINI (Bologna 1886), p. 226, 275, 306, 364, 385.

Zusammenstellung von Arbeiten, welche sich mit Steinerschen Aufgaben beschäftigen.

Von Rudolf Sturm in Breslau.

Herr Loria spricht in seinem Aufsatze über Jonquières von dem bedauerlichen Mangel einer Geschichte der Untersuchungen, welche gemacht worden sind, um die zahlreichen unbewiesenen Behauptungen in den Werken Steiners zu beweisen.[1])

Als eine Vorarbeit zu einer solchen Geschichte erlaube ich mir, eine Zusammenstellung der Notizen zu veröffentlichen, welche ich mir seit dem Erscheinen der *Gesammelten Werke* Steiners über einschlägige Arbeiten gemacht habe. Sie macht nicht den Anspruch, vollständig zu sein; ich hoffe aber, daß sie auch so schon willkommen sein und zu Ergänzungen anregen wird.

Die Steinerschen Abhandlungen mögen kurz mit den Nummern bezeichnet werden, welche sie in den Inhaltsverzeichnissen der beiden Bände der *Gesammelten Werke* tragen; bei den bekannteren ist ein abgekürzter Titel zugefügt.

Band I.

Abh. 1.

Fiedler, *Cyklographie* (Leipzig 1882), Vorrede (in der auf den Text verwiesen wird), S. IX.

2. O. Hermes, *Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf räumliche Figuren;* Journ. für Mathem. 56, 1859, 218—246.

O. Hermes, *Sätze über Tetraeder, welche dem von Desargues über ebene Dreiecke analog sind.* Progr. Cöln. Realgymn. Berlin 1856.

S. 15, 16, vgl. Abh. 9, S. 141, 142, und Bd. II Abh. 12, S. 106, 107, 113.

Abh. 2. (Einige geometrische Betrachtungen.)

Diese Abhandlung ist von mir in der Sammlung: Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 123 neu herausgegeben und mit Anmerkungen, Zusätzen und literarischen Notizen versehen worden. In den Zusätzen werden einige mit ihr zusammenhängende Lehrsätze und Aufgaben

1) G. Loria, *L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières;* Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 276.

aus andern Aufsätzen STEINERS herangezogen, bei denen es dann hier genügen mag, auf „Klassiker Nr. 123" zu verweisen.[1])

Zum MALFATTIschen Problem trage ich nach:

F. HALL, *Die älteren rein geometrischen Beweise zu STEINERS Konstruktion der MALFATTIschen Aufgabe.* Progr. Progymn. Wattenscheid 1898. 13 S. 4o.

A. WITTSTEIN, *Zur Geschichte des MALFATTIschen Problems.* Zweite Auflage. Nördlingen 1878.

FIEDLER, *Cyklographie* bezieht sich auch vielfach auf diese Abh.; ferner

G. AFFOLTER, *Zur Geometrie des Kreises und der Kugel;* Arch. der Mathem. 57, 1875, 1—61.

K. T. VAHLEN, *Über STEINERsche Kugelketten;* Zeitschr. für Mathem. 41, 1896, 153—160.

Zu S. 61:

CH. GUDERMANN, *Beweis des von Herrn STEINER aufgestellten Lehrsatzes;* Journ. für Mathem. 8, 1832, 160—168.

Verallgemeinerung der konjugierten Kreisbüschel: STEINER-SCHRÖTER, *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, 3. Aufl. (kurz: STEINER-SCHRÖTER), § 51.

Abh. 3.

S. ROBERTS, *On the figures formed by the intercepts of a system of straight lines in a plane, and on analogous relations in space of three dimensions;* Proc. of the London mathem. soc. 19, 1888, 405—422.

V. EBERHARD, *Ein Satz aus der Topologie;* Mathem. Ann. 36, 1890, 121—133.

V. EBERHARD, *Eine Klassifikation der allgemeinen Ebenensysteme;* Journ. für Mathem. 106, 1890, 89—120.

Abh. 5.

Vergl. Bd. II Abh. 16, Anm. ** auf S. 187, Anm. 13 auf S. 731.

CH. GUDERMANN, *Über die niedere Sphärik;* Journ. für Mathem. 8, 1832, 363—369 [speziell S. 367].

Abh. 6.

STEINER-SCHRÖTER, S. 255.

Abh. 7.

1, 2. TH. CLAUSEN, *Auflösung der Aufgaben 1 und 2;* Journ. für Mathem. 6, 1830, 404—407.

O. G. D. AUBERT, *Bemerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen ...;* Journ. für Mathem. 5, 1830, 163—173.

3. Vergl. Abh. 11, Aufg. 4.

---

1) In Anm. 3 habe ich dort nicht richtig gesagt, daß das Manuskript zu dem in der Einleitung von STEINER erwähnten fast druckfertigen Werke: „Das Schneiden der Kreise in der Ebene, der Kugeln im Raume und der Kreise auf der Kugelfläche" nicht gefunden ist. Tatsächlich ist dasselbe, wie Herr F. BÜTZBERGER in einem Aufsatze: *Zum 100jährigen Geburtstage STEINERS* (Zeitschr. für mathem. Unterr. 27, 1896, 161—171) mitgeteilt hat, von ihm in Bern gefunden worden, und man darf hoffen, daß dies Werk bald erscheinen wird.

4. Mit dieser Aufgabe wollen wir mehrere andere Aufgaben und Lehrsätze zusammenstellen: Abh. 8, Lehrs. 11; Abh. 11, Lehrs. 6—8; Abh. 18, vierter Absatz; *System. Entw.*, Anhang 80)—83); darüber: Klassiker Nr. 123, S. 112.

Fiedler, *Cyklographie*, z. B. Vorrede XI.

5—9. F. Heinen, *Auflösung der Aufgaben ...*; Journ. für Mathem. 3, 1828, 285—300.

7. Remy, *Beweis zweier Lehrsätze;* Journ. für Mathem. 3, 1828, 84—85. Steiner-Schröter, S. 296.

8. Vergl. Abh. 16, Nr. 19.

O. Hermes, *Das Fünfflach und Fünfeck im Raume entsprechend dem Vierseit und Viereck der Ebene;* Journ. für Mathem. 56, 1859, 247—262. Steiner-Schröter, S. 296.

Fiedler, *Cyklographie* Nr. 180.

9. Vergl. Abh. 16, Nr. 9 und Bd. II Abh. 24, Nr. 3.

10. Vergl. *System. Entw.*, Anhang 78).

12. Vergl. Abh. 18, sechster Absatz.

Klassiker Nr. 123, S. 110.

Abh. 8.

In der Originalabhandlung haben die Lehrsätze andere Nummern, die in älteren Arbeiten zitiert sind, und zwar 1—6 die Nummern 25—30, 8—11 die Nummern 31—34.[1])

3. Klassiker Nr. 123, S. 108.

8. Vergl. Abh. 15, § 1.

5. Vergl. Abh. 16, Nr. 19.

5—10. F. Heinen, *Auflösung der Aufgaben ...*; Journ. für Mathem. 3, 1828, 285—300.

11. Vergl. Abh. 7, Aufg. 4.

Abh. 9.

Vergl. Abh. 1 und in Bd. II Abh. 12.

Abh. 10 (Treffgeraden von 4 Geraden).

Vergl. *System. Entw.*, Art. 57.

---

1) Der Lehrsatz 7 steht nicht in der Originalabhandlung; aber in Abh. 15. — Bei dieser Zusammenstellung habe ich einen Mangel der *Ges. Werke* vielfach empfunden, daß nämlich die Seiten des Originals nicht, wie das z. B. jetzt in den Klassikern der ex. Wiss. geschieht, angegeben sind. Stellen, welche in älteren Arbeiten nach der Seite des Originals zitiert werden, sind in den *Werken* nur mühsam zu finden. So habe ich es aufgegeben, die in Baltzers *Elementen der Mathematik*, Bd. II erwähnten Stellen Steiners aufzusuchen, und begnüge mich, hier zu erwähnen, daß sich in diesen *Elementen* manche Beweise Steinerscher Sätze befinden. Willkommen wäre es auch gewesen, wenn man schon aus den Inhaltsverzeichnissen ersehen könnte, wo die Originalabhandlung steht; zumal viele Überschriften wenig aussagen.

Abh. 11.

Im Original 54—65 statt 1—12.

1. Vergl. Abh. 16.
   EBERTY, *Beweis der Lehrsätze*...; Journ. für Mathem. 5, 1830, 107—109.
3. Vergl. *System. Entw.*, Anh. 79).
4. R. STURM, *Liniengeometrie* I, S. 35 Anm.
   R. STURM, *Berichtigungen zu STEINERS Gesammelten Werken*; Zeitschr. für Mathem. 45, 1900, 235—240.

6—8. Vergl. Abh. 7, Aufg. 4.

10. TH. CLAUSEN, *Beweis des Lehrsatzes No. 63*; Journ. für Mathem. 7, 1831, 33—34.
    F. HEINEN, *Einiges in Bezug auf den . . . Lehrsatz*; Journ. für Mathem. 18, 1838, 176—184.
11. REMY, *Beweis zweier Lehrsätze*; Journ. für Mathem. 3, 1828, 84—85.

Abh. 12.

E. CESARO, *Studio di trasversali*; Giorn. di matem. 22, 1884, 240—242.

Abh. 14.

Im Original 11—27 statt 1—17.

1. CH. GUDERMANN, *Combinatorisch-analytische Abhandlung, enthaltend den Beweis der vier Summationsformeln*; Journ. für Mathem. 5, 1830, 402—403.

2, 7. FIEDLER, *Cyklographie*, Vorr. VII, VIII.

5. TH. SCHERRER, *Beweise einiger geometrischer Sätze*; Journ. für Mathem. 6, 1830, 98—99.
6. D. C. L. LEHMUS, *Beweis des Lehrsatzes*...; Journ. für Mathem. 3, 1828, 279.
   REMY, *Beweis des Lehrsatzes* . . .; Journ. für Mathem. 3, 1828, 280.
   Ungenannt, *Beweis des Lehrsatzes* . . .; Journ. für Mathem. 3, 1828, 281—284.

14, 15. BAUER, *Auflösung der Aufgaben 24, 25*; Journ. für Mathem. 19, 1839, 227—230.
STEINER-SCHRÖTER, Nr. 223, 238.

12—15. Vergl. *System. Entw.*, S. 439.

Abh. 15.

Eine Erweiterung von § 1 in Bd. II Abh. 35, § 11. — § 2. Vergl. Abh. 8, Lehrs. 4. — GERGONNES Satz S. 188 ist falsch; vergl.:

R. STURM, *Über einen vermeintlich richtigen Satz von GERGONNE*; Arch. der Mathem. 5_3, 1903, 9—10.

Abh. 16.

Verschiedene Sätze sind von STEINER selbst in den „Geometrischen Constructionen“. (Bd. I, S. 461, vergl. S. 492) bewiesen, ferner in STEINER-SCHRÖTER; auch FIEDLERS *Cyklographie* hat Beziehungen insbesondere zu 6.

Abh. 18.

Erster Absatz. Vergl. Bd. II Abh. 46, S. 704.

A. Ehlert, *Zu den Eigenschaften des vollständigen Vierseits;* Arch. der Mathem. **69**, 1883, 332—336.

J. Mention, *Démonstration d'un théorème de Steiner;* Nouv. ann. de mathém. 1_2, 1862, 16—20, 65—67.

B. Sporer, *Geometrische Sätze;* Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886, 43—49.

Zweiter Absatz. Vergl. Abh. **14**, Lehrs. 7, 8.

Dritter Absatz, verbessert in *System. Entw.*, Anh. 54).

Vierter Absatz. Vergl. Abh. **7**, Aufg. 4.

Fünfter Absatz. Vergl. den genannten Anh. 76).

O. Hermes, *Über Anzahl und Form von Vielflachen.* Progr. Cöln. Gymn. Berlin 1894. 30 S. 4°.

O. Hermes, *Verzeichnis der einfachsten Vielflache.* Progr. Cöln. Gymn. Berlin 1896. 24 S. 4°.

O. Hermes, *Die Formen der Vielflache;* Journ. für Mathem. **120**, 1899, 27—59, 305—353.

Sechster Absatz. Vergl. Abh. **7**, Lehrs. 12.

Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander (zum dritten Male abgedruckt in den Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. **82**, **83**, herausgegeben mit Anm. von A. von Oettingen).

S. 407. Anm. P. Muth, *Über Tetraederpaare;* Zeitschr. für Mathem. **37**, 1892, 117—122.

Anhang.

1) Schällibaum, *Auflösung der Aufgabe 1;* Journ. f. Mathem. **18**, 1838, 127—133.

3) J. Plücker, *Lehrsätze;* Journ. für Mathem. **9**, 1832, 411—412.

J. Plücker, *Analytisch-geometrische Aphorismen;* Journ. für Mathem. **11**, 1834, 26—32.

Bauer, *Beweise einiger geometrischer Lehrsätze;* Journ. für Mathem. **19**, 1839, 205—230 [speziell 214].

P. H. Schoute, *Ein Steinersches Problem;* Journ. für Mathem. **101**, 1887, 154—161.

Steiner-Schröter, Anhang Nr. 100.

8), 9) z. B. Schröter, *Oberfl. 2. Ordn.*, § 31, 32.

10) A. Kramer, *Auflösung der 10. Aufgabe;* Journ. für Mathem. **18**, 1838, 185—188.

Steiner-Schröter, § 24.

15) (Tetraedraler Complex.) Leider in Anm. 25) S. 527 (sowie in Schröters *Oberfl. 2. Ordn.*, S. 233) falsch beantwortet, richtig schon vorher durch Reye in der ersten Auflage der *Geometrie der Lage* (1868), Bd. II, Vortr. 15 (3. Aufl.[1]) Bd. III, Vortrag 1).

H. Müller, *Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung;* Mathem. Ann. **1**, 1869, 407—423 [speziell S. 413].

R. Sturm, *Das Problem der räumlichen Projectivität;* Mathem. Ann. **6**, 1873, 513—550 [speziell § I].

---

1) Sonst wird von diesem jetzt dreibändigen Werke von II und III die 3. Aufl., von I die 4. Auflage zitiert.

R. STURM, *Liniengeom.* Bd. I, letzter Abschnitt.

16), 24), 27) BAUER, *Beweis des . . . Lehrsatzes;* Journ. für Mathem. 19, 1839, 209—210, 211—212, 213—214.

30), 31) W. LUDWIG, *Über die Ebenen, welche aus einer Fläche zweiten Grades einem gegebenen Kegelschnitte ähnliche Kegelschnitte ausschneiden.* Diss. Breslau 1898. 74 S. 8⁰.

34) Vergl. Bd. II, S. 633.

REYE, *Geometrie der Lage* II, 15. Vortr.

35)—37) REYE, *Geometrie der Lage* I, 18. Vortr.

39) Vergl. Bd. II Abh. 45, III 3.

F. KROES, *Untersuchung des Systems unter einander ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umgeschrieben sind.* Diss. Göttingen 1881.

44) SCHÄLLIBAUM, *Über die 44. Aufgabe . . .;* Journ. für Mathem. 18, 1838, 134—141.

46) z. B. STEINER-SCHRÖTER, Nr. 105.

47), 48) z. B. L. CREMONA, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven* § 15, 22 und S. 274.

STEINER-SCHRÖTER, § 63.

50), 51) L. CREMONA, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen,* Nr. 139.

REYE, *Geom. der Lage* III, 16. bis 18. Vortr., Anhang Nr. 71 und 81 ff.

52) Vergl. die allgemeineren Sätze Bd. II Abh. 31, 1a) und Abh. 34, § 11 I 1).

STEINER-SCHRÖTER, Nr. 87.

54) (Verallgemeinerung des PASCALschen Satzes.) Es genüge, STEINER-SCHRÖTER, § 28, Nr. 114 und Anh. Aufg. 31, sowie SALMON-FIEDLERS *Analytische Geometrie der Kegelschnitte* (5. Aufl.), § 287 und den zugehörigen Literatur-Nachweis 78) anzuführen; dazu:

CREMONA-REYE in REYE, *Geom. der Lage* III, S. 183.

F. LINDEMANN, *Über das PASCALsche Sechseck;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in München (Mathem. Kl.) 32, 1902, 153—161.

59) z. B. O. HESSE, *Anal. Geom. des Raumes* (3. Aufl.), S. 120.

60), 61) Vergl. Bd. II Abh. 47.

O. HESSE, *Über die lineäre Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpunkte derselben gegeben sind;* Journ. für Mathem. 26, 1843, 147—154.

F. SEYDEWITZ, *Construction und Classification der Flächen des zweiten Grades mittelst projectivischer Gebilde;* Arch. der Mathem. 9, 1847, 158—214.

M. CHASLES, *Principe des correspondances entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en géométrie;* Comptes rendus Paris 41, 1855, 1097—1107 [speziell S. 1103].

H. SCHRÖTER, *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova;* Journ. für Mathem. 62, 1863, 215—231.

H. SCHRÖTER, *Oberfl. 2. Ordn.,* § 53.

TH. REYE, *Geom. der Lage* III, S. 24, 26, 32.

R. STURM, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades;* Mathem. Ann. 1, 1869, 533—574.

H. Picquet, *Quelques problèmes sur les surfaces du second degré;* Journ. für Mathem. 73, 1871, 365—369.

H. Picquet, *Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré;* Journ. für Mathem. 99, 1885, 225—232.

R. Heger, *Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten;* Zeitschr. für Mathem. 25, 1880, 98—100.

C. Hossfeld, *Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten von denen acht imaginär sind;* Zeitschr. für Mathem. 33, 1888, 187.

J. Thomae, *Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten;* Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 44, 1892, 543—545.

Salmon-Fiedler, *Raumgeometrie* (2. Aufl.) 1, Nr. 135.

P. Serret, *Géométrie de direction* (Paris 1869), insbes. Kap. III[1]), IV, XI, XIII.

Th. Reye, *Über Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme;* Journ. für Mathem. 77, 1874, 269—288 [speziell S. 271].

Th. Reye, *Geom. der Lage* II, Anh. Nr. 58 ff.

F. London, *Über constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen 2. Ordnung;* Mathem. Ann. 38, 1891, 334—368.

62) Poncelet, *Traité des propr. proj.* (2. Aufl.) Bd. I, S. 386; Bd. II, S. 90.

Hesse, *Anal. Geom. des Raumes* (3. Aufl.), 16. Vorl.

Salmon-Fiedler, *Raumgeom.* 1, Nr. 135.

Schröter, *Oberfl. 2. Ordnung,* § 71.

63) 7 Punkte:

M. Chasles, *Sur la surface et sur la courbe à double courbure lieux des sommets des cônes du second ordre qui divisent harmoniquement six ou sept segments rectilignes pris sur autant de droites dans l'espace;* Comptes rendus Paris 52, 1861, 1157—1162 [speziell S. 1158].

R. Sturm, *Flächen 3. Ordn.,* S. 37.

R. Sturm, *Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung;* Journ. für Mathem. 70, 1869, 212—240.

R. Sturm, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades;* Mathem. Ann. 1, 1869, 533—574.

Reye, *Geom. der Lage* III, 15. Vortr.

Salmon-Fiedler, *Raumgeom.* 1, Nr. 234.

Cremona, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen,* Nr. 130.

Schröter, *Oberfl. 2. Ordnung,* § 72.

6 Punkte:

Th. Weddle, *On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane;* Cambridge and Dublin mathem. journ. 5, 1850, 58—69.

M. Chasles, a. a. O.

A. Cayley, *Sur les cônes du second ordre qui passent par six points donnés;* Comptes rendus Paris 52, 1861, 1216—1218.

R. Sturm, *Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades;* Mathem. Ann. 1, 1869, 533—574.

F. Caspary, *Nouvelles manières d'exprimer, au moyen des fonctions hyper-*

1) Das in Kap. III § 1 ohne genaueres Zitat besprochene „Theorème de Steiner" in den *Werken* zu finden, ist mir nicht gelungen. Vergl. auch Steiner-Schröter, Anh. Nr. 38.

elliptiques de première espèce, les coordonnées d'un point de la surface du quatrième degré décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points; Bullet. d. sc. mathém. 15_2, 1891, 308—317.

E. Laguerre, *Sur les cônes du second degré qui passent par 6 points donnés dans l'espace;* Bullet. de la soc. mathém. de France 1, 1872, 71—75.

Allgemeines für ein Gebüsch:

Reye, *Geom. der Lage* III, 16. Vortr.

Salmon-Fiedler, *Raumgeom.* I, Nr. 233.

Cremona, *Grundzüge*, Nr. 139.

64), 65), 66), 73) A. Cayley, *On the surfaces each the locus of the vertex of a cone which passes through m given points and touches 6 — m given lines;* Proceed. of the London mathem. soc. 4, 1873, 11—47.

C. Hierholzer, *Über Kegelschnitte im Raume;* Mathem. Ann. 2, 1870, 563—586.

H. G. Zeuthen, *Sur la détermination des caractéristiques de surfaces du second ordre;* Nouv. ann. de mathém. 7_2, 1868, 385—403.

J. Lüroth, *Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden;* Journ. für Mathem. 68, 1868, 185—190.

H. Schubert, *Zur Theorie der Charakteristiken;* Journ. für Mathem. 71, 1870, 366—386.

H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879), S. 95, 104, 105.

67) G. Affolter, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung;* Arch. der Mathem. 56, 1874, 113—132.

R. Sturm, *Über die 27 Geraden der cubischen Fläche;* Mathem. Ann. 23, 1884, 289—310 [speziell S. 304].

68a) J. B. Eck, *Über die Vertheilung der Axen der Rotationsflächen zweiten Grades, welche durch gegebene Punkte gehen.* Diss. (Münster) Bonn 1890. 145 S. 8⁰ [speziell S. 139, 142].

72) H. Vogt, *Über die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren;* Journ. für Mathem. 92, 1882, 328—342.

75) Th. Reye, *Geom. der Lage* II, 20. Vortr.

R. Sturm, *Liniengeometrie* II, Nr. 309, 310.

76) Vergl. Abh. 18, fünfter Abschnitt.

78) Vergl. Abh. 7, Lehrs. 10.

R. Baltzer, *Elemente der Mathem.* II, 5. Buch, § 6, 10 (mit älterer Literatur).

H. Vogt, *Das Tetroeder mit Höhenschnittpunkt.* Progr. Friedrichs-Gymn Breslau 1881.

H. Schröter, *Oberfl. 2. Ordnung*, § 13, 14.

79) Vergl. Abh. 11, Lehrs. 3.

80)—83) Vergl. Abh. 7, Aufg. 4.

Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises sind auch in der Sammlung Klassiker der exakten Wissenschaften erschienen (Nr. 60), ebenfalls mit Anmerkungen herausgegeben von A. von Oettingen.

Band II.

Abh. 2.

C. G. J. Jacobi, *Über den Steinerschen Satz von den Primzahlen;* Journ. für Mathem. 14, 1835, 64—65.

Abh. 3.

1, 2, 3. M. A. Stern, *Beweis dreier Lehrsätze;* Journ. für Mathem. 14, 1835, 76—79.

4. Vergl. Abh. 11, 12.

M. C. Dippe, *Aufgaben;* Journ. für Mathem. 16, 1837, 74—75.

6. Steiner-Schröter, Nr. 232.

Abh. 4.

G. Loria, *Spez. alg. und transsc. ebene Kurven* (Leipzig 1902), 3. Abschn. Kap. 13.

Abh. 5.

1, 4, 14, 15. Dippe, *Über einige Aufgaben;* Journ. für Mathem. 16, 1837, 65, 66—68, 68—73.

2, 3. Vergl. Abh. 6 und 12.

4, 6, 7. Vergl. Abh. 6 und 16.

5. Vergl. Abh. 16.

R. A. Luchterhandt, *Beweis der Lehrsätze . . .;* Journ. für Mathem. 18, 1838, 213—219 [speziell S. 216].

8. Schällibaum, *Beweis eines . . . Lehrsatzes;* Journ. für Mathem. 16, 1837, 82—85.

R. Sturm, *Würfel und reguläres Tedraeder als Maximum und Minimum;* Journ. für Mathem. 97, 1884, 1—13 [speziell S. 8].

14. Vergl. Schluß von Abh. 8.

E. Cesaro, *Les lignes barycentriques;* Nouv. ann. de mathém. 5_3, 1886, 511—520.

Abh. 6.

1. E. Fasbender, *Beweis eines . . . Lehrsatzes;* Journ. für Mathem. 25, 1843, 186—188.

3, 4. K. H. Schellbach, *Auflösung der Aufgaben . . .;* Journ. für Mathem. 16, 1837, 360—362.

R. A. Luchterhandt, *Beweis der Lehrsätze . . .;* Journ. für Mathem. 18, 1838, 213—219.

5. Brune, *Auflösung der Aufgabe Nr. 5;* Jonrn. für Mathem. 16, 1837, 80—81.

K. H. Schellbach, *Auflösung der Aufgaben . . .;* Journ. für Mathem. 16, 1837, 360—362.

6, 7, 8. Vergl. Abh. 16, 17.

Abh. 7.

Vergl. die Abhandlungen 16, 17, ferner Anm. 8)[1]) auf S. 727 und den Schluß der Anm. 15).

E. Fasbender, *Auflösung einiger . . . Aufgaben;* Journ. für Mathem. 33, 1846, 366—370.

17 Anm. Vergl. Abh. 17, Nr. 62.

---

1) Die Notiz in Anm. 8), die sich auf die Klammer in Nr. 7 dieser Abhandlnng bezieht, rührt nicht von Steiner, sondern von H. A. Schwarz her. Vergl. R. Sturm, *Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum;* Journ. für Mathem. 97, 1884, 1—13 [speziell S. 12].

Abh. 8.

Vergl. Abh. 12 und Anm. 16 S. 729.

Abh. 11 (Punkt kleinster Entfernungssumme).

Vergl. Anm. 11) S. 729.

R. Sturm, *Über den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten;* Journ. für Mathem. **97**, 1884, 49—62.

Zu der dort angegebenen Literatur trage ich nach: Torricelli, Fermat, Cavalieri, Riccati, Frisi; dazu:

Frenet, *Recueil d'exercices*, Aufg. 230, S. 144.

G. Loria, *Généralisation d'un problème de minimum classique;* Mathesis 9_2, 1899, 131—136.

M. Cantor, *Gesch. der Mathem.* (2. Aufl.) **2**, 848.

G. S. Klügel, *Mathem. Wörterbuch* **5**:2 (1831), Art. Vieleck.

Gauss und Schumacher, *Briefwechsel* III, Briefe 513—528.

Ch. Sturm, *Etant donnés trois points et un plan, trouver dans ce plan un point tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit un minimum;* Annales de mathém. **14**, 1824, 13—16.

E. Uhlich, *Altes und neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks.* Progr. Grimma 1886. 34 S. 4⁰.

K. Simon, *Über den Punkt kleinster Entfernungssumme und die Flächen* $\Sigma r_n = const.$ Diss. Halle 1887. 45 S. 8⁰.

J. N[euberg], *Bibliographie relative à un problème de Fermat;* Mathesis 2_2, 1892, 162—163.

V. Schlegel, *On the problem of the minimum sum of the distances of a point from given points;* Bullet. of the americ. mathem. soc. 1_2 1895, 33—52.

Abh. 12 (Über den Krümmungsschwerpunkt).

Vergl. Abh. 1 und 9 in Bd. I.

F. Seydewitz, *Einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung;* Arch. der Mathem. **8**, 1846, 174—193.

C. Neumann, *Sul baricentro di curvatura delle curve algebriche;* Annali di matem. **1**, 1868, 280—282.

C. Neumann, *Sul baricentro di curvatura delle superficie algebriche;* Annali di matem. **1**, 1868, 283—284.

R. Sturm, *Über den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten;* Journ. für Mathem. **97**, 1884, 49—62 [speziell S. 60].

Abh. 13.

W. Schell, *Curven doppelter Krümmung* (2. Aufl.), S. 57 Anm.

Abh. 15.

R. Sturm, *Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen;* Mathem. Ann. **21**, 1883, 379—384.

Abh. 16, 17 (Die großen Abhandlungen über Maximum und Minimum).

Zum Hauptsatze in der Ebene (17 in Abh. 16, 25 in Abh. 17):

F. Edler, *Vervollständigung der Steinerschen elementar-geometrischen Beweise*

für den Satz, daß der Kreis größeren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich großen Umfangs; Nachr. d. Ges. d. Wiss. in Göttingen 1882, 73—80.

Zum Hauptsatze im Raume (70 in Abh. **17**):

H. A. Schwarz, *Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens;* Nachr. d. Ges. d. Wiss. in Göttingen 1884, 1—3.

J. O. Müller, *Über die Maximaleigenschaft der Kugel.* Diss. Göttingen 1903. 51 S. 8°.

Zu 19—25, 30, 63, 64 in Abh. **16**; 3, 20 in Abh. **17**:

R. Sturm, *Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum;* Journ. für Mathem. **96**, 1884, 36—77.

E. Lampe, *Über das Minimum des Inhalts eines Vierecks bei gegebenen Seiten;* Journ. für Mathem. **96**, 1884, 78—80.

Zu 30 und 47 I in Abh. **17**:

R. Sturm, *Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum;* Journ. für Mathem. **97**, 1884, 1—13.

J. Lange, *Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima;* Arch. der Mathem. 2_2, 1885, 430—435.

L. Certo, *Sui poligoni piani semplici;* Giorn. di matem. **23**, 1885, 366—367.

L. Certo, *Sull' n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato;* Giorn. di matem. **26**, 1888, 46—60.

R. E. Allardice, *On some properties of the quadrilateral;* Proceed. of the mathem. soc. of Edinburgh 8, 1890, 27—29,

E. Neovius, *Über eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums;* Nachr. d. Ges. d. Wiss. in Göttingen 1887, 407—410.

25 in Abh. **16**:

H. Umpfenbach, *Beweis, daß ein Vieleck mit gegebenen Seiten am größten ist, wenn seine Ecken in einem Kreis liegen;* Journ. für Mathem. **25**, 1843, 184—185.

E. Fasbender, *Ein Vieleck mit gegebenen Seiten ist am größten, wenn seine Ecken in einem Kreisbogen liegen;* Journ. für Mathem. **26**, 1843, 181—182.

57 in Abh. **17**:

O. Bermann, *Über Schwerpunktsörter und Umhüllungsflächen bei Triederschnitten.* Progr. Liegnitz 1874.

O. Bermann, *Ein Minimumproblem;* Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886, 49—53, 381—382.

62 in Abh. **17**. Vergl. Abh. **7**, Nr. 17 Anm.

Salmon-Fiedler, *Raumgeom.* II, S. 74.
Reye, *Geom. der Lage* III, 8. Vortr.
Schröter, *Oberfl. 2. Ordnung*, S. 529.

Zu den isoperimetrischen Sätzen:

Baltzer, *Elem. der Mathem.* Bd. II, 4. Buch § 15.

Abh. 20.

Vielfache Beziehung zu Abh. 45, III; daher die dort erwähnten Schriften von Dörholt und Gundelfinger-Dingeldey. — Zu VIII:

P. Serret, *Géométrie de direction* (Paris 1869), Nr. 218.

Abh. 21.

Steiner-Schröter, § 34 und 38.

Abh. 22.

2. Vergl. Abh. 45, III (Dörholt); *System. Entw.*, Anh. 39 (Kroes).

3. H. E. M. O. Zimmermann, *Beweis eines Lehrsatzes von Jacob Steiner;* Zeitschr. für Mathem. **31**, 1886, 121—125.

A. Cayley, *Sur un théorème relatif à huit points sur une conique;* Journ. für Mathem. **65**, 1866, 180—184.

F. Rathke, *Über zwei Configurationen von Punkten, welche sich aus fünf, resp. sechs beliebigen Punkten eines Kegelschnittes ergeben.* Diss. Marburg 1885.

6. Vergl. Abh. 46, III.

Abh. 24.

1. G. Loria, *Über einen von Steiner entdeckten Satz und einige verwandte Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung;* Zeitschr. für Mathem. **30**, 1885, 291—300.

1, 2. O. Bermann, *Beweis zweier Steinerscher Lehrsätze;* Arch. der Mathem. **53**, 1871, 129—137.

Abh. 25.

Zum Anhang: Steiner-Schröter, § 55.

Abh. 26 (Steinersche Polygone).

A. Clebsch, *Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Kurven dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. **63**, 1864, 94—121.

Ed. Weyr, *Über einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei- und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades;* Journ. für Mathem. **71**, 1870, 18—28.

Ed. Weyr, *Zusätze zu dem* [vorangehenden] *Aufsatze;* Journ. für Mathem. **73**, 1871, 87—93.

Ed. Weyr, *Über Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte;* Mathem. Ann. **3**, 1871, 235—237.

Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen* I, S. 589.

P. H. Schoute, *Die Steinerschen Polygone;* Journ. für Mathem. **95**, 1883, 105—119, 201, 317—324.

C. Küpper, *Über die Steinerschen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3 und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage;* Mathem. Ann. **24**, 1884, 1—41.

H. Schröter, *Ebene Curven 3. Ordnung,* § 31.

V. Eberhard, *Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steinerschen Schließungsproblemen bei den*

ebenen Curven dritter Ordnung; Zeitschr. für Mathem. 32, 1887, 65—82, 129—144.

R. Sturm, *Liniengeometrie* 1, Nr. 31.

B. Sporer, *Einiges über gewisse Kreissysteme;* Mathem. naturw. Mittheil. (Stuttgart) 2, 1887, 107—111.

H. G. Zeuthen, *Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque;* Mathem. Ann. 40, 1892, 99—124 [speziell § IV].

E. Czuber, *Die Steinerschen Polygone;* Journ. für Mathem. 114, 1895, 312—332

Abh. 27.

Vergl. Abh. 46, III.

Abh. 28.

Die bei Abh. 46 genannte Dissertation von Pyrkosch.

Abh. 29.

Vergl. Abh. 34, § 3; Abh. 41, S. 618—619; Abh. 45, S. 666; Abh. 46, S. 711—714.

W. Fiedler, *Geometrische Mittheilungen;* Vierteljahrsschr. d. naturf. Ges. in Zürich 29, 1884, 332—365.

W. Fiedler, *Cyklographie,* Vorrede und § 170.

W. Fiedler, *Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen;* Acta Mathem. 5, 1884, 331—408 [speziell S. 390 ff].

§ 2, 5. Vergl. Abh. 35, § 12.

§ 6. Zu der richtigen Zahl 3264 an Stelle der Steinerschen 7776 (Anm. 25 S. 739) auch:

H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie,* S. 97 und 338 Lit. Nachr. 31.

Abh. 30.

C. Rodenberg, *Über ein Maximumproblem;* Zeitschr. für Mathem. 24, 1879, 63—64.

Abh. 31.

1. E. de Jonquières, *Démonstration de quelques théorèmes de Steiner;* Nouv. ann. de mathém. 20, 1861, 94—98, 190—196.

Steiner-Schröter, Nr. 87, 295.

J. K. Meister, *Über die Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Polardreieck, bezw. durch Flächen 2. Grades mit einem gemeinsamen Polartetraeder gebildet werden. Erster Teil;* Zeitschr. für Mathem. 31, 1886, 321—347 [speziell S. 345].

1. c) d). Steiner-Schröter, Anhang 40, 41.

Zweite Abh. 31.[1])

1, 2, 3. J. F. Onstein, *Behandlung und Erweiterung der von Steiner (J. für Math. XLV 177) mitgetheilten Sätze.* Progr. Realgymn. Aachen 1887.

1) Im Inhaltsverzeichnis wegen der gleichen Überschrift mit der vorigen zusammengefaßt.

3. E. Dewulf, *Mémoire sur une transformation géométrique générale, dont un cas particulier est applicable à la cinématique;* Ann. de l'école norm. de Paris 3_3, 1886, 405—431 [speziell S. 424].

V. Retali, *Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione imaginaria delle curve del second' ordine;* Mem. dell' accad. d. sc. di Bologna 7_4, 1887, 601—637.

6. H. Schröter, *Über Curven dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 6, 1873, 85—111 [speziell S. 88].

Abh. 32.

E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik* (Leipzig 1901), Kap. 10.

Abh. 33.

B. Sporer, *Über eine besondere Transformation algebraischer Curven und damit in Verbindung stehende Sätze Jacob Steiners;* Zeitschr. für Mathem. 36, 1891, 339—348.

Abh. 34.

Vergl. Abh. 29 und die dort genannten Schriften von Fiedler.

Abh. 35 (Sich doppelt berührende Kegelschnitte).

Chasles, *Sections coniques,* insbes. Kap. XIX.

Steiner-Schröter, § 52.

§ 11 III 2. In Abh. 41 am Ende von 3 steht richtig 4 Lösungen. Dazu:

Poncelet, *Propr. projectives* (2. Aufl.), Bd. I, S. 225.

Chasles, *Sections coniques,* Nr. 497.

Steiner-Schröter, Nr. 256.

H. G. Zeuthen, *Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit* (Kopenhagen 1865), S. 33.

Th. Reye, *Geom. der Lage* I, Anh. Nr. 186.

Abh. 36.

2—11. Vergl. Abh. 38, § 15.

12—14. P. H. Schoute, *Solution d'un problème de Steiner;* Bullet. d. sc. mathém. 10_2, 1886, 242—256.

H. G. Zeuthen, *Note sur un problème de Steiner;* Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887, 82—86.

B. Sporer, *Jacob Steiners Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt;* Zeitschr. für Mathem. 37, 1892, 340—365 [speziell S. 353].

17. C. F. Geiser, *Über zwei geometrische Probleme;* Journ. für Mathem. 67, 1867, 78—89.

19, 20. Vergl. Abh. 38, § 12 II.

H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie,* S. 139, 140.

Abh. 37 (Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven).

In ihr und noch direkter in Abh. 40 sagt Steiner (1848), daß er die Formeln aufgestellt hat, die wir nach Plücker benennen, der sie vorher gefunden hat.

J. Plücker, *Theorie der algebraischen Curven* (1839).

A. Clebsch, *Über die Singularitäten algebraischer Curven;* Journ. für Mathem. 64, 1865, 98—100.

O. Henrici, *On certain formulae concerning the theory of discriminants, with applications to the theory of polar curves;* Proceed. of the London mathem. soc. 2, 1869, 104—116 [speziell S. 114].

O. Henrici, *On series of curves, especially on the singularities of their envelopes with applications to polar curves;* Proceed. of the London mathem. soc. 2, 1869, 177—195 [speziell S. 183].

Aus dieser Abhandlung ist Cremonas Buch: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (deutsch von Curtze: *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*, Greifswald 1865) entstanden.

Zum Schlusse der Abh.:

L. Berzolari, *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano;* Atti dell' accad. d. sc. di Torino 31, 1896, 476—484.

Abh. 38.

Die große Abhandlung über algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, über innere Polaren und Transversalen.

P. Güssfeld, *Über Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen;* Mathem. Ann. 2, 1869, 65—127.

A. Milinowski, *Zur Geometrie der ebenen Curven dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 78, 1874, 177—222.

K. Bobek, *Über die Steinerschen Mittelpunktscurven;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 98, 1889, 5—27, 394—418, 526—535.

§ 7. P. H. Schoute, *Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques;* Bullet. de la soc. mathém. de France 10, 1882, 219—220.

P. H. Schoute, *Solution d'un problème de Steiner;* Bullet. d. sc. mathém. 10_2, 1886, 242—256 [speziell S. 256].

§ 12, 1—III. B. Sporer, *Über eine besondere Transformation algebraischer Curven und damit in Verbindung stehende Sätze Jacob Steiners;* Zeitschr. für Mathem. 36, 1891, 339—348.

B. Sporer, *Über einige besondere Curven des dritten Grades und solche der dritten Klasse;* Zeitschr. für Mathem. 40, 1895, 159—176 [speziell S. 168, 169].

§ 15. Schoutes zweite Abhandlung (auch zu S. 589 Anm.).

§ 18, 1; § 21, 1. B. Sporer, *Über eine besondere mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Curve;* Zeitschr. für Mathem. 38, 1893, 34—47 [speziell S. 36—38].

Zum Abschnitte über Transversalen:

E. de Jonquières, *Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes;* Journ. für Mathem. 59, 1861, 313—314,

und insbesondere zu § 25—27:

B. Sporer, *Jacob Steiners Sätze über den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer algebraischen Curve;* Zeitschr. für Mathem. 37, 1892, 65—78.

B. Sporer, *Jacob Steiners Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt;* Zeitschr. für Mathem. 37, 1892, 340—365 [speziell S. 340, 346, 355, 358].

Abh. 39.

5. Vergl. Abh. 36, Nr. 12.

Abh. 40 (Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung).

O. Hesse, *Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung;* Journ. für Mathem. 49, 1854, 279—332 [gleichzeitig mit Steiner].

O. Hesse, *Zu den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung;* Journ. für Mathem. 55, 1858, 83—88.

A. Cayley, *Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre;* Journ. für Mathem. 68, 1868, 176—179.

Salmon-Fiedler, *Höh. ebene Curven* (2. Aufl.), S. 272—295, 304 ff.

S. H. Aronhold, *Über den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades;* Monatsber. der Akad. der Wiss. in Berlin 1864, 499—523.

C. F. Geiser, *Über die Steinerschen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades;* Journ. für Mathem. 72, 1870, 370—378.

C. F. Geiser, *Über die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades;* Mathem. Ann. 1, 1868, 129—138.

G. Frobenius, *Über die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung;* Journ. für Mathem. 99, 1886, 275—314.

G. Kohn, *Über die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve vierter Ordnung bestehen;* Monatsh. für Mathem. 1, 1890, 71—91, 129—158.

M. Nöther, *Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curven vierter Ordnung;* Abhandl. der Akad. d. Wiss. in München 17, 1889, 105—150.

H. Weber, *Lehrbuch der Algebra* II, 12. Abschnitt (Die Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung), 351—402.

Abh. 41.

1. B. Sporer, *Über eine besondere Transformation algebraischer Curven und damit in Verbindung stehende Sätze Jacob Steiners;* Zeitschr. für Mathem. 36, 1891, 339—348.

9 ff. Vergl. Abh. 29, S. 411—420 und Abh. 46, S. 710—714.

Abh. 42 (Über Normalen an Curven und Flächen).

In I Beziehungen zu Abh. 46, III.

Schläfli im Briefwechsel mit Steiner (S. Abh. 44), S. 76.

F. Joachimsthal, *Über die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogen werden können;* Journ. für Mathem. 59, 1861, 111—124.

A. Clebsch, *Über das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung;* Journ. für Mathem. 62, 1863, 64—109.

O. Terquem, *Sur le nombre des normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique;* Journ. de mathém. 4, 1839, 175—176.

F. August, *Geometrische Betrachtung der Normalen, welche sich von einem beliebigen Punkte auf eine algebraische Fläche fällen lassen;* Journ. für Mathem. 68, 1868, 242—245.

A. Mannheim, *Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique;* Comptes rendus Paris 70, 1870, 1025—1028.

G. Salmon, *On the number of normals which can be drawn from a given point to a given surface;* Cambridge and Dublin mathem. journ. 3, 1848, 46—47.

L. Marcks, *Bestimmung der Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche n ter Ordnung;* Mathem. Ann. 5, 1872, 27—29.

C. F. Geiser, *Sulle normali all' ellissoïde;* Annali di matem. 1_2, 1868, 317—328.

R. Sturm, *Über Fußpunkt-Curven und -Flächen, Normalen und Normalebenen;* Mathem. Ann. 6, 1873, 241—263.

R. Sturm, *Über Normalen an algebraische Flächen;* Mathem. Ann. 7, 1874, 567—582.

R. Sturm, *Zur Theorie der algebraischen Flächen;* Mathem. Ann. 9, 1876, 573—575.

G. Fouret, *Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface;* Bullet. de la soc. mathém. de France 6, 1878, 43—49.

G. Fouret, *Théorèmes sur les normales aux surfaces algébriques;* Association française; Congrès 6 (1877), 265—268.

P. H. Schoute, *Over het projecteeren op opperflakken;* Nieuw arch. voor wisk. 6, 1879, 19—48.

A. Beck, *Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen;* Mathem. Ann. 14, 1878, 207—211.

G. A. V. Peschka, *Beitrag zur Theorie der Normalflächen;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 82, 1880, 1128—1162.

G. A. V. Peschka, *Normalenfläche einer Developpabeln längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 83, 1881, 1163—1214.

G. A. V. Peschka, *Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Schnittes mit einer anderen krummen Fläche;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 84, 1882, 30—35.

G. A. V. Peschka, *Neue Eigenschaften der Normalflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 85, 1882, 381—407.

S. Roberts, *Note on normals, and the surface of centres of an algebraical surface;* Proceed. of the London mathem. soc. 4, 1873, 302—307.

S. Roberts, *Notes on normals of conics;* Proceed. of the London mathem. soc. 9, 1880, 65—75.

Th. Reye, *Geometrie der Lage* II, 15. Vortr.; III, 5. Vortr.

R. Sturm, *Liniengeometrie* I, Nr. 283; III, Nr. 873.

S. 631. Anm.

M. Bernhardt, *Über lineare Scharen von Curven und Flächen.* Diss. Tübingen 1897. 30 S. 4°.

Abh. 43 (Hypocykloide mit 3 Rückkehrpunkten).

Vergl. Abh. 45, IIIb.

H. Schröter, *Über die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde;* Journ. für Mathem. 54, 1857, 31—47.

L. Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements;* Journ. für Mathem. 64, 1865, 101—123. Anschließend: A. Clebsch, Note dazu, 124—125.

C. Intrigila, *Studio geometrico sull' ipocicloide tricuspide;* Giorn. di matem. 23, 1885, 263—284.

J. K. Meister, *Über Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Polardreieck, bezw. durch Flächen 2. Grades mit einem gemeinsamen Polartetraeder gebildet werden. Erster Teil;* Zeitschr. für Mathem. 31, 1886, 321—347 [speziell S. 331, 332].

P. Perlewitz, *Die Fusspunktlinien des umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks, elementar behandelt.* Progr. Sophien-Realgymn. Berlin 1890. 16 S. 4°.

C. Wirtz, *Die Steinersche Hypocykloide* Diss. Straßburg 1900.

G. Loria, *Spezielle algebr. und transscend. ebene Kurven,* 3. Abschn. Kap. 7, 8 und 6. Abschn. Kap. 9.

G. Battaglini, *Sopra una curva di terza classe e quarto ordine;* Giorn. di matem. 4, 1866, 214—237.

H. Siebeck, *Über die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes;* Journ. für Mathem. 66, 1866, 344—362.

F. E. Eckhardt, *Einige Sätze über Epicykloiden und Hypocykloiden;* Zeitschr. für Mathem. 15, 1870, 129—134.

L. Kiepert, *Über Epicycloiden, Hypocycloiden und daraus abgeleitete Curven;* Zeitschr. für Mathem. 17, 1872, 129—146.

W. Frahm, *Über die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung;* Zeitschr. für Mathem. 18, 1873, 363—386.

A. Milinowski, *Über die Steinersche Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten;* Zeitschr. für Mathem. 19, 1874, 115—137.

L. Painvin, *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements;* Nouv. ann. de mathém. 9_2, 1870, 202—211, 256—270.

E. Laguerre, *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés;* Nouv. ann. de mathém. 18_2, 1879, 206—218.

E. Laguerre, *Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussements;* Bullet. de la soc. mathém. de France 7, 1872, 108—123.

S. Kantor, *Die Tangentengeometrie an der Steinerschen Hypocycloide;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 78, 1878, 204—233.

S. Kantor, *Quelques théorèmes nouveaux sur l'hypocycloïde à trois rebroussements;* Bullet. d. sc. mathém. 3_2, 1879, 136—144.

P. A. Mac Mahon, *The three-cusped hypocycloid;* Messenger of mathem. 12_2, 1883, 151—157.

R. A. Roberts, *On polygons circumscribed about a tricuspidal quartic;* Proceed. of the London mathem. soc. 14, 1883, 56—62.

E. Laguerre, *Extrait d'une lettre;* Nouv. ann. de mathém. 9_2, 1870, 254—256.

H. Brocard, *Démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson;* Bullet. de la soc. mathém. de France 1, 1873, 224—228.

Abh. 44 (Flächen 3. Ordnung, 1856).

Aus dem Briefwechsel zwischen Steiner und Schläfli (herausgegeben von J. H. Graf, Bern 1899) geht hervor, daß Letzterer ein wesentlicher Mitarbeiter bei den Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung gewesen ist, und daß Steiner von den Vorarbeiten der englischen Geometer Kenntnis gehabt hat.

A. Cayley and G. Salmon, *On the triple tangent planes to a surface of the third order;* Cambridge and Dublin mathem. journ. 4, 1849, 118—132, 252—260.

J. J. Sylvester, *Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms;* Cambridge and Dublin mathem. journ. 6, 1851, 186—200 [speziell S. 199].

H. Grassmann, *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen;* Journ. für Mathem. 49, 1854, 47—65.

F. Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà della superficie del terzo ordine;* Annali di sc. matem. 6, 1855, 374—379.

Diese Schriften sind vor Steiners Abhandlung erschienen.

A. Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen;* Journ. für Mathem. 58, 1861, 93—108.

A. Clebsch, *Über eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen;* Journ. für Mathem. 58, 1861, 109—126.

A. Clebsch, *Über die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 59, 1861, 193—228.

A. Clebsch, *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 65, 1866, 359—380.

A. Clebsch, *Über die Anwendung der quadratischen Substitutionen auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits;* Mathem. Ann. 4, 1871, 284—345 [speziell S. 331].

A. Clebsch, *Über die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 5, 1872, 419—421.

G. Salmon, *On quaternary cubics;* Philos. trans. London 150, 1860, 229—240.

L. Schläfli, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order; and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface;* Quart. journ. of mathem. 2, 1858, 55—65, 110—120.

L. Schläfli, *On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the absence or presence of singular points, and the reality of their lines;* Philos. trans. London 153, 1863, 193—241.

L. Schläfli, *Quand' è che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?;* Annali di matem. 5_2, 1873, 289—295.

H. Schröter, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 62, 1863, 265—280.

L. Cremona, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre;* Journ. für Mathem. 68, 1868, 1—133.[1])

1) Die *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin 1870) enthalten die Übersetzung dieser Schrift durch Curtze verbunden mit derjenigen der *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie.*

L. Cremona, *Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine;* Rendiconti dell' istit. lomb. [Milano] 3_2, 1870, 209—219.

L. Cremona, *Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell' esagramma di Pascal;* Mem. dell' accad. d. Lincei [Roma] 1_3, 1877, 854—874.

L. Cremona, *Über die Polar-Hexaeder bei den Flächen dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 13, 1878, 301—314.

R. Sturm, *Synthet. Untersuch. über Flächen 3. Ordnung* (Leipzig 1867).

R. Sturm, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 88, 1879, 213—240.

R. Sturm, *Liniengeometrie* III, Nr. 874.

R. Sturm, *Über die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 21, 1883, 457—514.

R. Sturm, *Über die 27 Geraden der cubischen Fläche;* Mathem. Ann. 23, 1884, 289—310.

R. Sturm, *Beispiele zu den Cremonaschen ebenen Transformationen;* Mathem. Ann. 26, 1885, 304—308.

Th. Reye, *Geometrie der Lage* III, 7.—13. Vortr. und Anhang S. 182.

Th. Reye, *Geometrischer Beweis des Sylvesterschen Satzes: Jede quaternäre kubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Cuben linearer Formen;* Journ. für Mathem. 78, 1874, 114—122.

Th. Reye, *Darstellung quaternärer biquadratischer Formen als Summen von zehn Biquadraten;* Journ. für Mathem, 78, 1874, 123—129.

Th. Reye, *Projectivische Erzeugung der allgemeinen Fläche dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung;* Mathem. Ann. 1, 1869, 455—466.

Th. Reye, *Beziehungen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu einer covarianten Fläche dritter Classe;* Mathem. Ann. 55, 1901, 257—264.

A. Cayley, *A memoir on the theory of reciprocal surfaces;* Philos. trans. London 159, 1869, 201—230.

A. Cayley, *A memoir on cubic surfaces;* Philos. trans. London 159, 1869, 231—326.

A. Cayley, *On the double-sixers of a cubic surface;* Quart. journ. of mathem. 10, 1870, 58—71.

G. Affolter, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung;* Arch. der Mathem. 56, 1874, 113—133.

P. Gordan, *Über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 5, 1872, 341—377.

Salmon-Fiedler, *Raumgeometrie* II, Kap. V.

F. Klein, *Über Flächen dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 6, 1873, 551—581.

F. E. Eckhardt, *Über die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen;* Mathem. Ann. 7, 1874, 591—604 [speziell S. 600].

H. G. Zeuthen, *Études des propriétés de situation des surfaces cubiques;* Mathem. Ann. 8, 1874, 1—30.

H. G. Zeuthen, *Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique;* Acta Mathem. 5, 1884, 203—204.

C. Rodenberg, *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 14, 1878, 46—110.

H. THIEME, *Zur Construction des Polarsystems einer Fläche dritter Ordnung;* Mathem. Ann. 20, 1882, 144—145.

H. THIEME, *Die Flächen dritter Ordnung als Ordnungsflächen von Polarsystemen;* Mathem. Ann. 28, 1886, 133—151.

R. DE PAOLIS, *Ricerche sulle superficie del terzo ordine;* Memorie dell' accad. dei Lincei [Roma] 10_3, 1881, 123—160.

E. CAPORALI, *Teoremi sulle superficie di terz' ordine;* Rendic. dell' accad. d sc. di Napoli 20, 1881, 122—130.

C. LE PAIGE, *Sur les surfaces du troisième ordre;* Acta Mathem. 3, 1884, 181—200.

C. LE PAIGE, *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre;* Acta Mathem. 5, 1884, 195—202.

K. KÜPPER, *Über die Flächen dritter Ordnung und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesondere über deren Geraden;* Zeitschr. für Mathem. 34, 1889, 129—160 [speziell S. 149].

V. MARTINETTI, *Sopra alcune configurazioni piane;* Annali di matem. 14_2, 1886, 161—192 [speziell S. 167].

A. CAYLEY, *On Dr. Wieners Model of a cubic surface and on the construction of a double-sixer;* Trans. of the philos. soc. of Cambridge 12, 1873, 366—383.

A. CAYLEY, *Note on the theory of cubic surfaces;* Philos. magazine 27_2, 1864, 493—496.

CHR. WIENER, *Stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche 3. Ordnung mit 27 reellen Geraden.* Leipzig 1869.

F. AUGUST, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis.* Diss. Berlin 1862.

H. PICQUET, *Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième ordre;* Bullet. de la soc. mathém. de France 4, 1876, 128—148.

H. PICQUET, *Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième ordre;* Bullet. de la soc. mathém. de France 4, 1876, 153—156.

E. BELTRAMI, *Sull' equazione pentaedrale della superficie di terzo ordine;* Rendic. dell' istit. lomb. [Milano] 12, 1879, 24—36.

H. SCHRÖTER, *Lineare Constructionen zur Erzeugung der cubischen Fläche;* Journ. für Mathem. 96, 1884, 282—323.

E. BERTINI, *Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei piani tritangenti di una superficie di terz' ordine;* Annali di matem. 12_2, 1884, 301—346.

C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris 1870), S. 316.

E. PASCAL, *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di terz' ordine e sui gruppi ad esso isomorfi;* Annali di matem. 20_2, 1892, 163—226, 269—332, 21_2, 1893, 85—137.

E. PASCAL, *Sui poliedri circolari che si possono formare coi 45 piani tritangenti della superficie di terz' ordine;* Rendic. dell' istit. lomb. [Milano] 25_2, 1892, 1098—1102.

E. PASCAL, *Configurazione delle 36 bisestuple gobbe formate colle 27 rette della superficie di terz' ordine;* Rendic. dell' istit. lomb. [Milano] 25_2, 1892, 1103—1106.

E. PASCAL, *Configurazione delle 216 quintuple gobbe di seconda specie formate colle 27 rette della superficie di terz' ordine;* Rendic. dell' istit. lomb. [Milano] 25_2, 1892, 1136—1139.

F. Klein, *Sur la résolution par les fonctions hyperelliptiques de l'équation du 27e degré dont dépend la détermination des 27 droites d'une surface cubique;* Journ. de mathém. 4_4, 1888, 169—176.

H. Burkhardt, *Zur Reduktion des Problemes der 27 Geraden der allgemeinen Fläche 3. Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Funktionen $p = 2$;* Nachr. d. Ges. d. Wiss. in Göttingen 1892, 1—5.

M. Pannelli, *Sulla costruzione della superficie di terz' ordine individuata da 19 punti;* Annali di matem. 22_2, 1894, 237—260.

G. Kohn, *Über Flächen 3. Ordnung mit Knotenpunkten;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 96, 1887, 1298—1304.

G. Kohn, *Beweis eines Satzes von Cayley;* Monatsh. für Mathem. 2, 1891, 343—344.

G. Kohn, *Über eine neue Erzeugung der Flächen 3. Ordnung;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 99, 1890, 683—691.

G. Kohn, *Über die Sextupel von geraden Linien, welche von sämtlichen Punkten einer kubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden;* Monatsh. für Mathem. 2, 1891, 293—310.

G. Bauer, *Die Hessesche Determinante der Hesseschen Fläche einer Fläche dritter Ordnung;* Abh. der Akad. d. Wiss. in München 14, 1883, 77—90.

K. Rohn, *Über die Raumkurven auf der Fläche dritter Ordnung;* Ber. der sächs. Ges. d. Wiss. [Leipzig] 46, 1894, 84—119.

P. H. Schoute, *Recherche de la position des 27 droites d'une surface cubique les unes par rapport aux autres, à l'aide de la représentation sur un plan;* Verslagen der akad. d. wet. te Amsterdam 1892—1893, 143—144.

G. Humbert, *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du 3e ordre;* Journ. de l'éc. polyt. [Paris] 64, 1894, 123—149.

A. Milinowski, *Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 89, 1880, 136—150.

S. Kantor, *Über eine eindeutige Abbildung der Flächen dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 95, 1883, 147—164.

F. Schur, *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung;* Journ. für Mathem. 95, 1883, 207—217.

C. Rodenberg, *Das Pentaeder der Fläche dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten.* Diss. Göttingen 1874.

K. Bobek, *Zur Klassifikation der Flächen dritter Ordnung;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Mathem. Cl.) 96, 1887, 355—386.

F. London, *Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde;* Mathem. Ann. 44, 1894, 375—412.

F. London, *Die Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte 1 als Erzeugniß trilinearer Grundgebilde;* Mathem. Ann. 45, 1894, 545—597.

G. Herting, *Über die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Curven.* Diss. München 1888. 108 S. 8⁰. [Auch als Programm Studienanst. St. Anna Augsburg 1887, 1888 erschienen.]

E. Ciani, *Sul pentaedro completo;* Rendic. dell' accad. dei Lincei [Roma] 7_4:1, 1891, 209—216.

E. Ascione, *Alcune considerazioni sul pentaedro completo;* Rendic. dell' accad. d. sc. di Napoli 6_2, 1892, 147—152.

H. M. Taylor, *On a special formal of the general equation of a cubic surface and on a diagram representing the twenty-seven lines on the surface;* Phil. trans. London 185, 1895, 37—69.

A. Clebsch, *Mittheilung über eine Fläche dritter Ordnung;* Nachr. der Ges. d. Wiss. in Göttingen 1872, 402—403.

F. E. Eckhardt, *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steiner'schen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumcurven;* Mathem. Ann. 5, 1872, 30—49.

F. E. Eckhardt, *Über diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden;* Mathem. Ann. 10, 1876, 227—272.

E. Ciani, *Sulle superficie cubiche la cui Hessiana si spezza;* Rendic. dell' accad. d. Lincei [Roma] 6_4: 2, 1890, 55—63.

E. Ciani, *Sulla superficie diagonale di Clebsch;* Rendic. dell' accad. d. Lincei [Roma] 7_4: 1, 1891, 209—216.

E. Ciani, *Sopra le Hessiane delle superficie cubiche;* Rendic. dell' istit. lomb. [Milano] 26_2, 1893, 498—507, 523—533, 557—567.

E. Ciani, *Sopra quelle superficie cubiche le quali si possono riguardare come parti della Hessiana di un' altra superficie cubica;* Rendic. dell' ist. lomb. [Milano] 27_2, 1894, 222—233.

H. W. Richmond, *A symmetrical system of equations of the lines of a cubic surface which has a conical point;* Quart. journ. of mathem. 23, 1889, 170—179.

J. Borgmeyer, *Geometrische Untersuchung über den Ort der Fusspunkte der Lote, welche von einem Punkte auf die Strahlen einer linearen Congruenz gefällt werden.* Diss. Münster 1893. 51 S. 8⁰.

H. Thieme, *Über eine besondere Fläche dritter Ordnung mit 4 Knotenpunkten;* Zeitschr. für Mathem. 40, 1895, 362—369.

Abh. 45, I.

R. Molke, *Über diejenigen Sätze Jacob Steiners, welche sich auf die durch einen Punkt gehenden Transversalen einer Curve nter Ordnung beziehen.* Diss. Breslau 1897. 81 S.

Abh. 45, II.

H. E. M. O. Zimmermann, *Beweis einiger Sätze von Jacob Steiner;* Zeitschr. für Mathem. 32, 1887, 373—377.

M. Bernhardt, *Über lineare Scharen von Curven und Flächen.* Diss. Tübingen 1897. 30 S. 4⁰.

Abh. 45, III.

1—7. K. Dörholt, *Über einem Dreieck ein- und umgeschriebene Kegelschnitte.* Diss. Münster 1884.

Gundelfinger-Dingeldey, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte* (Leipzig 1895), S. 295 ff.

3. Vergl. *System. Entw.*, Anh. Aufg. 39).

5. Steiner-Schröter, Nr. 213.

8, 9. Steiner-Schröter, Nr. 199, 220, 233.

Abh. 45, IV.

E. de Jonquières, *Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. Construction de ces coniques. Théorèmes relatifs à un contact d'une série de coniques et d'un faisceau de droites;* Journ. de mathém. 5_2, 1859, 49—56.

C. F. Geiser, *Über die Normalen der Kegelschnitte;* Journ. für Mathem. 65, 1866, 381—383.

R. Sturm, *Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum;* Journ. für Mathem. 96, 1884, 46—78 [speziell S. 76].

B. Sporer, *Über die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben und allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven;* Zeitschr. für Mathem. 35, 1890, 237—246, 293—306.

A. Wiman, *Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind;* Zeitschr. für Mathem. 40, 1895, 296—301.

Abh. 46.

I, III, X—XV. R. Pyrkosch, *Über Poncelet'sche Dreiecke, besonders solche, welche confocalen Kegelschnitten ein- und umgeschrieben sind.* Diss. Breslau 1897. 63 S. 8⁰.

F. X. Stoll, *Über einige Sätze J. Steiners;* Zeitschr. für Mathem. 33, 1888, 78—108.

II. B. Sporer, *Beweis eines Satzes von Jacob Steiner über die Krümmungskreise einer Ellipse;* Zeitschr. für Mathem. 40, 1895, 123—124.

XIV. Vergl. Abh. **30**, S. 411—420 und Abh. **41**, S. 618, 619.

Abh. 48, 1 (Steinersche Fläche).

E. E. Kummer, *Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen;* Journ. für Mathem. 64, 1865, 66—76.

K. Weierstrass, *Note zur vorstehenden Abhandlung;* Journ. für Mathem. 64, 1865, 77—78.

H. Schröter, *Über die Steinersche Fläche vierten Grades;* Journ. für Mathem. 64, 1865, 79—94.

L. Cremona, *Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents;* Journ. für Mathem. 63, 1864, 315—328.

L. Cremona, *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano;* Rendic. dell' istit. lomb. [Milano] 4, 1867, 15—23.

A. Cayley, *Note sur la surface du quatrième ordre de Steiner;* Journ. für Mathem. 64, 1865, 172—174.

A. Clebsch, *Über die Steinersche Fläche;* Journ. für Mathem. 67, 1867, 1—22.

C. F. Geiser, *Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades;* Journ. für Mathem. 69, 1868, 197—221.

Th. Reye, *Geometrie der Lage* III, 16. Vortr.

R. Sturm, *Über die römische Fläche von Steiner;* Mathem. Ann. 3, 1870, 76—123.

S. Lie, *Petite contribution à la théorie de la surface Steinérienne;* Arch. for Mathem. 3, 1878, 84—92.

F. Gerbaldi, *La superficie di Steiner, studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche.* Turin 1881. 61 S. 8⁰.

L. Berzolari, *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart' ordine.* Annali di matem. 20_2, 1892, 101—162.

A. Brambilla, *Intorno alla superficie di Steiner. Estensione di una proprietà della superficie di Steiner;* Rend. dell' accad. d. sc. di Napoli 4_3, 1898, 19—22, 300—303.

D. Montesano, *La superficie di Steiner;* Rend. dell' accad. d. sc. di Napoli 5_3, 1899, 88—98.

F. London, *Die Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte 1 als Erzeugnis trilinearer Grundgebilde;* Mathem. Ann. 45, 1894, 545—597.

E. Picard, *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales;* Journ. für Mathem. 100, 1886, 71—78.

E. Lampe, *Über ein Analogon im Raume zu einer speciellen Hypocykloiden-Bewegung;* Journ. für Mathem. 100, 1886, 359—363 [speziell S. 361].

G. B. Guccia, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali;* Rendic. del circ. matem. di Palermo 1, 1886, 165—168.

P. H. Schoute, *Solution of question 8840;* Educ. times 47, 1887, 40.

L. Renner, *Über die Gruppe der 24 Collineationen, durch welche ein ebenes Viereck oder Vierkant in sich selbst übergeht.* Diss. Strassburg 1896. 26 S. 8⁰.

A. Goller, *Über die Steinersche Fläche.* Diss. München 1902. 69 S. 4⁰.

R. Sturm, *Liniengeometrie* II, Nr. 453, 454.

A. Cayley, *On Steiners surface;* Proceed. of the London mathem. soc. 5, 1874, 14—25.

Th. Moutard, *Sur la surface de Steiner;* Bullet. de la soc. philomath. de Paris 2, 1865, 66—67.

F. E. Eckhardt, *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steinerschen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumcurven;* Mathem. Ann. 5, 1872, 30—49.

E. Laguerre, *Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner;* Nouv. ann. de mathém. 11_2, 1872, 319—327, 337—347, 418—428; 12_2, 1873, 55—71.

E. Laguerre, *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner;* Bullet. de la soc. mathém. de France 1, 1872, 21—26.

J. Rosanes, *Über Systeme von Kegelschnitten;* Mathem. Ann. 6, 1873, 264—312 [speziell S. 303].

K. Th. Vahlen, *Über die Steinersche Fläche;* Acta. Mathem. 19, 1895, 199—200.

Abh. 48, II.

R. Sturm, *Liniengeometrie* III, Nr. 764.

* * *

Zur Ergänzung verweise ich noch auf:

R. Sturm, *Berichtigungen zu Steiners Gesammelten Werken;* Zeitschr. für Mathem. 45, 1900, 235—240.

Die zahlreichsten gar nicht oder nur wenig berührten Probleme finden sich wohl in den großen Abhandlungen über Maximum und Minimum, aus denen auch schon eine Steinersche Preisaufgabe gestellt worden ist, und in dem Aufsatze über Curven mit einem Mittelpunkte usw., überhaupt in solchen Aufsätzen, welche metrische Eigenschaften besprechen.

Zum Schluß habe ich noch zu erwähnen, daß der Herausgeber dieser Zeitschrift, Herr G. Eneström, erheblich an dieser Zusammenstellung mitgearbeitet hat, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Peter Guthrie Tait, his life and works.

By Alexander Macfarlane in South Bethlehem.

With the portrait of P. G. Tait as frontispiece.

„The life of a genuine scientific man, is, from the commou point of view, almost always uneventful. Engrossed with the paramount claims of iuquiries raised high above the domain of mere humau passions, he is with difficulty tempted to come forward in political discussious, eveu when they are of national importance and he regards with surprise, if not with contempt, the petty municipal squabbles in which local notoriety is so eagerly sought. To him the discovery of a uew law of nature, or even of a uew experimeutal fact, or the inveution of a novel mathematical method, no matter who has been the first to reach it, is an event of an order altogether differeut from, aud higher than, those which are so profusely chrouicled in the newspapers. It is something true and good for ever, uot a mere temporary outcome of craft or expediency. With few exceptions, such men pass their life unnoticed by, almost unknown to, the mass of eveu their educated countrymeu. Yet it is they who, far more than any autocrats or statesmen, are really mouldiug the history of the times to come.“ Such are the opening sentences of Tait's memoir on the life and works of Rankine, and uo sentences could better describe his own mode of life and way of thinking.

Peter Guthrie Tait was born at Dalkeith, uear Ediuburgh, Scotland, April 28, 1831. Dalkeith is one of the seats of the Duke of Buccleuch, aud his father was then the Duke's private secretary. He was educated principally at the Ediuburgh academy; and it is related that on his receiving the highest prize the headmaster declared „magnificent intellect, magnificeut intellect“. A schoolfellow, little understood by the boys in general but appreciated by Tait, was none other than Clerk Maxwell, the famous electrician. From the academy the two friends entered the university of Edinburgh together, and attended the same classes — mathematics with Kelland, and physics with Forbes. At Edinburgh Maxwell continued his studies for several years; but Tait left

after one year for Cambridge, where he became a student of St. Peter's college at the age of 18. He had the advantage of training under WILLIAM HOPKINS, the most skillful coach of the time, with the result that he graduated as senior wrangler, and carried off the first Smith's prize (1852). The senior examiner in the tripos examination was CAYLEY. Appointed a mathematical tutor by his college and awarded a fellowship, TAIT proceeded with his friend W. J. STEELE, second wrangler of the same year, to prepare a treatise on *Dynamics of a particle*; which was published in 1856.

But meanwhile, in 1854, TAIT had been appointed professor of mathematics in the Queen's college, Belfast. His colleague in the chair of chemistry was ANDREWS, the discoverer of the critical temperature in gases. Under the guidance of ANDREWS, TAIT became an enthnsiastic experimenter, and the two together made a research on the nature of ozone. About this time two celebrated mathematical books were printed in Dublin — *The laws of thought* by GEORGE BOOLE, professor of mathematics in the Queen's college, Cork; and *Lectures on quaternions* by Sir W. R. HAMILTON, professor of astronomy in the university of Dublin. Both were studied by TAIT; the former left some influence, the latter exerted a paramount influence on his future scientific work. He narrates himself how he picked up the *Lectures* to take with him on a vacation tour as a kind of provision for wet days. The volume proved fascinating even on fair days, not only in vacation but in term time. When he returned to Belfast, he continned his experimental work with ANDREWS in spare hours of the day, but his spare hours at night were devoted to quaternions. He soon mastered the method sufficiently to write memoirs for the Qnarterly journal of mathematics, and the Messenger of mathematics; and a volnme of examples in qnaternions was an idea which naturally suggested itself to the author of *Dynamics of a particle.* There were, however, to TAIT'S mind numerous obscure points in the theory, and to elucidate them he wished to correspond with HAMILTON directly. His friend ANDREWS wrote to HAMILTON asking the favor; in this way a correspondence originated which continued till HAMILTON'S death in 1865. In 1859 TAIT met HAMILTON personally at the meeting of the British association in Aberdeen; on which occasion he introduced another disciple, CLERK MAXWELL, then professor of physics at Aberdeen.

The year following, 1860, on FORBES resigning the chair of physics at Edinburgh, the former schoolmates and fellow students, TAIT and MAXWELL, both became candidates; the choice of the electors fell on the energetic professor of mathematics at Belfast. This contest, it is pleasant to say, did not diminish their friendship: on the contrary it increased as

the years rolled hy. TAIT dnhhed MAXWELL $\frac{dp}{dt}$, for according to thermodynamics

$$\frac{dp}{dt} = JCM$$

(where C denotes CARNOT's function) the initials of MAXWELL's name. On the other hand MAXWELL denoted THOMSON by T and TAIT by T'; so that it became customary to qnote THOMSON and TAIT's *Treatise on natural philosophy* as T and T'.

So then at the age of 29 years, TAIT was placed in one of the finest positions in Great Britain for scientific work — a position which he occupied for the long period of 41 years. His principal duty as professor was to teach the elements of physics to the students in arts; who, when they came to him, were generally in their senior year, and in number from 150 to 200. The conrse emhraced about 100 lectures, extending over the winter session; six months of the year were free from the routine of teaching. In his lectures he aimed at imparting sound principles rather than minute information; and he generally employed to demonstrate the fundamental facts of physics those experiments by which they were first established. But he was not satisfied with mere long-range teaching. About 1870 he followed the example of Sir WILLIAM THOMSON, at Glasgow, in institnting a practical class. It was TAIT's idea that each student taking the class should be instructed how to nse a variety of physical instrnments, and then should be set to work upon some real experimental problem. Much of this research work was done in the summer session of the University; and it was then that Professor TAIT carried out most of his own experimental researches. A still greater development consisted in the institution of an advanced class, where the lectnres provided an introduction and guide to the *Treatise on natural philosophy*. In later years the work of teaching was mnch increased by the addition of a course of lectnres for medical students in the summer session, and by other developments in the university.

Professor TAIT was tall, well-built and athletic. His temperament was sanguine and huoyant, and to the last there was a delightful hoyishness in his nature. For many years the only sign of age was baldness; to protect his head, while lecturing, it was his custom to wear a velvet skull cap. He dressed in sack-coat and soft felt hat, carried a cane, and walked energetically bnt with the air of a man who was solving a mathematical problem. He was very punctual in his class-work; a gifted lecturer, and in every respect an inspiring teacher.

Before leaving Belfast he married Miss MARGARET PORTER, a sister of the late Master of St. Peter's college, Cambridge; and in his domestic

relations he was very fortunate and happy. His mode of life at Edinburgh was in a manner a continuation of that at Belfast; he attended to his professorial duties and experimental research during the day; and he worked in his library well on into the night. It was his custom to do much of his writing standing at a plane wooden desk, and the shelves and books were all arranged for work rather than ornament.

He did not, especially in his later years, take any extensive part in the administrative work of the university; but in the affairs of the Royal society of Edinburgh he was for many years the gniding spirit. Through his administration of the duties of general secretary, the society advanced rapidly in prestige and usefulness.

He travelled little, and was not easily indnced to break in upon his routine; had it been otherwise, he could never have acccomplished so great an amount of hard scientific work. For many years it was his custom to spend the long vacation at Saint Andrews, on the opposite coast of Fife, where there is a famons golfing course. Whatever he did take up, whether work or play, it was his natnre to pursue with enthusiasm. He was a great golfer, long before the game became popular beyond the bounds of Scotland. He noticed the phenomena of the game with the eye of the physicist, and some of his finest researches owe their origin to this pastime.

Professor TAIT's family consisted of four sons and two daughters.

About nine years ago Professor TAIT's health began to fail before the close of the arduous winter session; but to re-establish it a vacation on the links at St. Andrews was sufficient. He had been endowed with a splendid physique, but he had drawn on that endowment lavishly for the sake of science. On the war breaking out in South Africa in 1899, one of his sons was ordered with his regiment to the field of action, and was killed in the operations at the Modder River. The death of this generous and talented son was a serious blow to Professor TAIT, already in failing health; a year afterwards he resigned his appointment. He had often looked forward to devoting his retirement to quaternionic researches, but that period when it did come proved exceedingly short — three months. But, true to that desire, two days before his death he filled a sheet of foolscap with notes concerning the linear and vector function. He died 4 July 1901.

In 1898 the Cambridge university press began the reprinting in collected form of his *Scientific papers*. Two volumes appeared under his own editing; a third and concluding volume is still in preparation. After he went to Edinburgh almost all his scientific papers were printed in the Transactions or Proceedings of the Edinburgh society. Portraits of TAIT hang in the halls of the Edinburgh society and of St. Peter's

college at Cambridge; and it has been proposed to erect a physical laboratory at Edinburgh in honor of his memory.

In future times Tait will be best known for his work in the quaternion analysis. Had it not been for his expositions, developments and applications, Hamilton's invention would be today, in all probability, a mathematical curiosity; and there are those who think that, now Tait is gone, such will ere long be its fate. But I venture to think that Hamilton himself will prove the better prophet: for he wrote to Tait: „Could anything be simpler or more satisfactory? Don't you feel, as well as think, that we are on the right track, and shall be thanked hereafter? Never mind when".

We have seen that, while professor of mathematics at Belfast, Tait prepared a collection of examples, with some necessary introduction to the method. On removing to Edinburgh in 1860 he wished to publish at once, but at Hamilton's desire he delayed publication till the *Elements* should appear, for Hamilton on account of their correspondence wished to have priority of pnblication in matters of principle. Hamilton died in 1865, leaving his volume nearly but not quite finished; it was published in 1866, and Tait's *Treatise* appeared in 1867. The second edition of the *Treatise* appeared in 1873, and the third in 1890. Taking the third edition, we find that Chapters VII to X comprise the original collection of examples; chapters I to V form the introduction; chapters XI to XII contain physical applications, and chapter VI is a new one contributed by Cayley on the analytical theory of qnaternions. The chapters on physical applications embody the principal results of the papers which he contributed to the Quarterly journal of mathematics and the Royal society of Edinburgh. The titles of the more original papers are *Formulae connected with small continuous displacements of the particles of a medium; On the rotation of a rigid body about a fixed point; On Green's and other allied theorems; On orthogonal isothermal surfaces;* and *On Minding's theorem.* The third contains what he estimated as one of his finest contributions to the analysis — the development of processes of definite integration, of the kinds required in physics, applicable to quaternion variables. He arrives at the following expressions in terms of surface-integrals for the volume, and the line, integrals of a quaternion:

$$\iiint \nabla q \, d\varsigma = \iint U\nu \cdot q ds,$$

and

$$\int d\varrho q = \iint ds \, V(U\nu \nabla) q.$$

Here ∇ denotes the vector operator $\frac{d}{dx} i + \frac{d}{dy} j + \frac{d}{dz} k$ discovered by

Hamilton, and named „nabla" by Robertson Smith on account of its resemblance to an Assyrian harp. In recognition of the importance of Tait's applications of the symbol, and the primary meaning of the name applied to it, Maxwell addressed one of his poems to Tait as „the chief musician upon nabla".

The fifth chapter deals with another branch of the analysis to which he made important contributions — the solution of quaternion equations of the first degree. Hamilton solved this problem completely, arriving at the theory of the linear vector function: here and in chapter X of Kelland and Tait's *Introduction to quaternions*, Tait applies it to the analysis of strains. A series of his latest papers and indeed his very latest notes are on this subject.

The first four chapters are the least satisfactory part of the book, due to some extent to the fact that Hamilton desired Tait to go on to applications, leaving the establishment of the principles to his *Elements*. Unfortunately Tait in his turn gave the same advice to the critical student; from which it has followed that the principles of the quaternion analysis, presenting as they do many points of the greatest novelty and importance to the algebraist, have never been thoroughly discussed. With some, they are above discussion; with others, beneath discussion; there have been too few who have regarded them as a very important subject for discussion. I think that the introduction of the *Treatise* may be criticized in the following points. The associative law is established by means of the properties of spherical conics. Elsewhere (*Scientific papers*, vol. II, p. 157) Tait quotes with approval a dictum of De Morgan's to the effect that „No primary considerations connected with the subject of *Probability* can be, or ought to be, received if they depend upon the results of a complicated mathematical analysis". Apply this, *mutatis mutandis* to the proof referred to. Again, in proving that vectors may be identified with quadrantal versors, the geometrical proof which is applied to the product forms such as ij is abandoned in the case of the square forms such as ii, and reference is given to a mere dictum. The proof given that a sum of vectors is necessarily commutative must be fallacious; for a sum of vector logarithms cannot be any more commutative than the factors of which they are the logarithms. Again exponential functions of vectors are omitted. Now on the one hand every formula in quaternions is said to have a meaning in spherical trigonometry; and on the other hand $e^{\sqrt{-1}\,x}$ plays as important a part in circular trigonometry as $\cos x + \sqrt{-1} \sin x$ (which is a degraded quaternion); hence it is probable that the exponential function of a vector plays a leading part in any adequate space-algebra.

M. Hoüel in his exposition of qnaternions in *Théorie élémentaire des quantités complexes*, restores the natural order in writing the product $\alpha\beta$, introduces small capitals to denote vectors, and gothic letters for the characteristics S, V, T, etc. He was followed by M. Laisant in his *Introduction à la méthode des quaternions.* Hamilton, although writing $\alpha\beta$, supposes β to be first and α second, in consequence of which, provided that they are unit vectors,

$$\alpha\beta = -\cos\vartheta + \sin\vartheta \cdot \varepsilon;$$

(where ε denotes the unit vector perpendicular to α and β) but when the natural order is restored

$$\alpha\beta = -\cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot \varepsilon;$$

from which it becomes evident that the obnoxious minus affecting the scalar part, likewise affects the vector part, and may therefore be more easily got rid of when it is not wanted. Hamilton's inversion of the natural order arose from a mistaken operator idea; it was, I believe, first criticised by Grassmann. The restoration of the natural order is a reform in principle, which brings the quaternion analysis much more into harmony with trigonometry and the algebra of the complex quantity. But Tait did not see it that way; and in the preface to the third edition of his *Treatise* he classes it along with the changes of type as fancied improvements in notation.

In the same preface Tait expressed his view of Gibbs' *Vector-analysis* in the following manner: „Even Professor Willard Gibbs must be ranked as one of the retarders of quaternion progress, in virtue of his pamphlet on *Vector-analysis*; a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann.“ Prof. Gibbs replied in two letters to Nature, **43**, 1891, p. 511 and **44**, 1891, p. 79. He justified his departure from quaternionic usage by maintaining that whereas the scalar product and the vector product are each fundamental notions in vector analysis: the quaternion product, the quaternion quotient, and the quaternion in general are in comparison trivial and artificial. He admitted that the quaternion afforded a convenient notation for rotations, but added that they can be conveniently represented in another way. In his second letter he made a comparison of Hamilton's and Grassmann's systems as geometrical algebras, concluding thus: „We have then as geometrical algebras published in 1844 an algebra of vectors common to Hamilton and Grassmann, augmented on Hamilton's side by the quaternion, and on Grassmann's by his algebra of points. This statement should be made with the reservation that the addition both of vectors and of points had been given by earlier writers.“

Tait's principal reply (Nature, 44, 1891, p. 105), founded on an observation of Hamilton's, is, that it was solely because Grassmann had not realized the conception of the quaternion whether as $\beta\alpha$ or as $\beta\alpha^{-1}$ that he felt those difficulties as to angles in space which he says, in the preface to the *Ausdehnungslehre* of 1844, he had not had leisure to overcome. On consulting the passage referred to, I find that Grassmann mentions that e^{a} expresses an angle operator, α denoting the angle in the geometrical sense; and that for a constant plane α can be analysed into $a\sqrt{-1}$ where a is the circular measure of the angle. He observes further that the pure imaginary with the circular measure will not suffice for angles in space, and that there are difficulties in the matter which he has not been able to surmonnt. Now the qnaternion stripped of its tensor factor expresses this notion (but in a reduced form) by its sum of a scalar and a vector, the very combination which to Professor Gibbs appears trivial and artificial. Further, an improved analytic notation for the unreduced quaternion is derived from the exponential function looked at by Grassmann, by analysing α into $\sqrt{-1}\,a\,\alpha_0$ where α_0 denotes a unit axis, the whole qnantity being an imaginary vector. The step which Grassmann failed to take was the introduction of the third element α_0 to denote the axis of the plane. As a consequence Grassmann developed his inner and outer products independently.

Mr. Heaviside for the purpose of his electrical investigations, makes use of a vector analysis which is the same in principle as that of Gibbs, differing only in some matters of notation. He describes it as ‚Quaternions without the quaternions'; which looks paradoxical at first, but in fact is an accurate description. The fundamental principles of the analysis are expressed in two sets of independent rules: namely

$$i^2 = 1 \quad j^2 = 1 \quad k^2 = 1$$

$$\text{and} \quad ij = k \quad jk = i \quad ki = j.$$

If we attempt to use these principles in conjunction so as to form a true algebra, we are led to the following principle

$$\alpha\beta = \cos\vartheta + \sin\vartheta\cdot\varepsilon,$$

where α, β and ε are all real unit vectors. When a third real unit vector γ is introduced, the product $\alpha\beta\gamma$ formed on these rules is snch that $(\alpha\beta)\gamma$ differs from $\alpha(\beta\gamma)$; a result which is in conflict with spherical trigonometry. The difficulty is removed by making the unit vector on the right-hand side imaginary, giving,

$$\alpha\beta = \cos\vartheta + \sin\vartheta\cdot\sqrt{-1}\,\varepsilon.$$

Then, for imaginary unit vectors $\sqrt{-1}\,\alpha$ and $\sqrt{-1}\,\beta$ we deduce $\sqrt{-1}\,\alpha\sqrt{-1}\,\beta = -\alpha\beta = -\cos\vartheta - \sin\vartheta\cdot\sqrt{-1}\,\varepsilon$ which as is shewn above is the fundamental principle of quaternions, when the natural order of

the factors is restored. Hence it is impossible to get rid of imaginary vectors; if we start with real vectors, the very simplest kind of product introduces them. In this way as I have elsewhere shewn at length, vector analysis logically developed is hyperboloidal analysis, while quaternions is spherical analysis; and the question is reduced to the following: ‚Which of these should be made the standard or primary system.' HAMILTON makes the spherical analysis the standard system, by supposing that every vector involves the $\sqrt{-1}$; but the hyperboloidal analysis is more suitable, as agreeing with the conventions, or choices, already made in algebraic analysis. The fundamental principles of Prof. GIBBS are logically indefensible, for further on in the analysis he is obliged to introduce imaginary vectors.

In 1894 TAIT and CAYLEY broke a lance before the Royal society of Edinburgh on coordinates versus quaternions. Prof. CAYLEY had listened to HAMILTON's original lectures on quaternions; had found the rotation operator nearly as soon as HAMILTON himself, and had contributed a chapter on the analytical theory of quaternions, what he objected to was the claim made in the preface to the first edition and reprinted in the subsequent editions to the effect that quaternions are more comprehensive and less artificial than coordinates. He remarked (Proceedings of the royal society of Edinburgh **20**, 1894, p. 272): „The imaginary of ordinary algebra, for distinction call this ϑ, has no relation whatever to the quaternion symbols i, j, k; in fact, in the general point of view, all the quantities which present themselves are, or may be, complex values $a + \vartheta b$, or, in other words, say that a scalar quantity is in general of the form $a + \vartheta b$. Thus quaternions do not properly present themselves in plane or three dimensional geometry at all; although, as will presently appear, we may use them in plane geometry; but they belong essentially to solid or three dimensional geometry, and they are most naturally applicable to the class of problems which in coordinates are dealt with by means of the three rectangular coordinates x, y, z." TAIT replied: ‚To Prof. CAYLEY quaternions are mainly a calculus, a species of analytical geometry; and, as such, essentially made up of those coordinates which he regards as ‚the natural and appropriate basis of the science'. To me quaternions are primarily a mode of representation: immensely superior to, but of essentially the same kind of usefulness as, a diagram or a model. They are, virtually, the thing represented: and are thus antecedent to, and independent of, coordinates: giving, in general, all the main relations, in the problem to which they are applied, without the necessity of appealing to coordinates at all. Coordinates may, however, easily be read into them; when anything such as metrical or numerical detail is to be gained thereby'.

It may be observed that Cayley had no conception of the quaternion method as analytical spherical trigonometry; he could not rise above solid geometry and did not see that it degenerates under the appropriate conditions to analytical circular trigonometry. So far from the quaternion symbols i, j, k having no relation to the imaginary of algebra, they involve it, being simply imaginary unit vectors. And this question may be asked: „Was it a q man or an x, y, z man who first developed the theory of the matrix?" Hamilton gave the complete theory of the matrix of the third order five years before Cayley published his *Memoir on matrices.*

Another of the principal contributions which Tait made to pure mathematics is his investigation of knots. He was led into the research by Kelvin's vortex theory of the structure of matter. He reasoned that if the atoms are vortex rings, their differences in kind which give rise to differences in their spectra must depend on a greater or less complexity in the form of the ring or closed filament, and this difference would depend on the knottiness of the ring. Hence the main question which he took up and answered was: How many different forms of knot are there with any given small number of crossings? The further question of determining which of these are kinetically stable he left to the originator of the hypothesis.

By a knot he meant any form which may be given to a cord by passing it through itself and then joining the ends. Any knot has an even number of crossings (double points only being considered); and if one imagines himself to go round the cord he will alternately go over and under the part of the cord which he meets at the crossing. If the only difference is that the cord followed starts under instead of over, the knot so obtained is the perversion of the other; but the two may be the same after all, in which case the knot is said to be amphicheiral. He devised the following notation for a knot. Starting at any crossing in anyone of the four directions denote the odd crossings by A, B, C, D etc.; the nature of the knot will depend on the manner in which these letters appear in the even places. This notation will in general give four different schemes for the same knot; but in the simpler cases, these are often identical, two and two, sometimes all four. He enunciates rules to be applied to the notation to eliminate impossible and reducible forms; for example, no letter can follow itself, or can occur more than twice. Let A, B, C denote the odd crossings of the trefoil knot; then the even ones must be C, A, B for otherwise a letter would follow itself. Hence there is only one case, but two forms, as the perversion is not deformable into the original. For four crossings let A, B, C, D denote them taken oddly;

then the above two rules limit the even places to C, D, A, B; and D, A, B, C. Hence the two notations $ACBD\ CADB$ and $ADBA\ CBDC$; but these are not different knots, for the formulae differ only in the starting point of the cycle. Hence for four crossings there is only one form; and it is an amphicheiral one. By this method TAIT found the different forms of knot for orders 3, 4, 5, 6 and 7. The investigation was extended to orders 8, 9 and 10 by KIRKMAN and LITTLE. In this field of research TAIT'S memoirs had scarcely any predecessor excepting LISTING'S *Vorstudien zur Topologie.*

His greatest contribution to applied mathematics is the well known *Treatise on natural philosophy* written in conjunction with Sir WILLIAM THOMSON, now Lord KELVIN. The plan of the work was sketched in the year 1860 when TAIT became professor of natural philosophy at Edinburgh, his illustrious colleague having already been for 14 years the corresponding professor at Glasgow. Before 1860 JOULE had made his determination of the mechanical equivalent of heat, thus establishing the first law of Thermodynamics; THOMSON, RANKINE and CLAUSIUS had established the second law; and RANKINE had drawn the outlines of the science of Energetics. In the first edition of the *Dynamics of a particle* there is no mention of the doctrine of energy; it is probable that TAIT'S experimental work with ANDREWS led him to study the papers of THOMSON, JOULE and RANKINE. Anyhow, the main object of the projected treatise was to expound all the branches of physics from the standpoint of the doctrine of energy. The plan contemplated four volumes; the printing of the first volume began in 1862 and was completed in 1867. The other three volumes never appeared. When a second edition was called for, the matter of the first volume was increased by a number of appendices etc., and the book appeared as two separately bound parts. The great success of the work is well known in the mathematical world: a success which has been well expressed in the appellation „The *Principia* of the nineteenth century."

In several portions of the *Treatise*, the influence of quaternions is evident, but nowhere is the method introduced directly. Lord KELVIN has stated in his notice of Professor TAIT, prepared for the Royal society of Edinburgh, that the introduction of quaternions into the volume was a matter on which the joint authors took opposite views. The nearest approach is in the treatment of spherical harmonic analysis. There ∇^2 is simply defined as an abbreviation for $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$; ∇ itself is not introduced, but instead

$$\partial = \frac{x}{r}\frac{d}{dx}+\frac{y}{r}\frac{d}{dy}+\frac{z}{r}\frac{d}{dz}.$$

We can imagine TAIT, conscious of the internal consistency of the qnaternion analysis, writing

$$\nabla = \frac{d}{dx} i + \frac{d}{dy} j + \frac{d}{dz} k$$

and

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right);$$

while THOMSON, standing on the principles of algebraic analysis, objected to the qnadrantal character of $i\, j\, k$ and to the minus in ∇^2. A man cannot well make use of two conflicting systems of analysis; one or the other must be given np. I have indicated above how in my opinion the conflict in conventions can be removed.

In 1873 the joint authors published a smaller work for the use of their average student, in which only elementary mathematics is employed. It consists largely of the non-mathematical portions of the large treatise, supplemented where possible by geometrical demonstrations. It did not prove very suitable for the pass stndent, and the advanced student found the large treatise more enlightening. Some years later TAIT published a series of textbooks on properties of matter, heat, and light.

Another of TAIT's principal contributions to mathematical physics consists in a series of five memoirs, mostly critical in their nature, on the *Foundations of the kinetic theory of gases.* When writing the chapter on the natnre of heat for his textbook on heat (1884) he perceived the want of a clear elementary statement of the theory, in which all the assumptions should be explicitly stated; and, if possible, the principles should be so modified as to avoid the ontstanding conflict with the results of experiment. The deviations from the laws of BOYLE and CHARLES, shown by condensible gases, were accounted for by an attraction between the particles, so long as the volnme diminishes faster than the pressure increases; and by a repulsion between the particles when the volume does not diminish as fast as the pressure increases. He did not believe in repulsion excepting in the form of resilience after impact. He first of all gives a straightforward demonstration of CLERK MAXWELL's theorem, namely, that when two kinds of smooth spherical particles are thoronghly mixed, the particles interchange energy nntil the average kinetic energy is the same for either kind of particle. The theorem was extended by MAXWELL to the case of rigid particles of any form, where rotation is possible as well as translation, showing that the whole kinetic energy is ultimately divided equally among the various degrees of freedom. Prof. BOLTZMANN extended the investigation to cases in which the particles are supposed to be no longer rigid, bnt complex systems having a great number of degrees of freedom, arriving

at the theorem that the ultimate state will be a partition of the whole energy in eqnal shares among the classes of degrees of freedom which the individual particle-systems possess. TAIT criticized BOLTZMANN's theorem both in the style of proof, and as conflicting with experimental knowledge of the two specific heats of gases. TAIT finds the rate of equalization of average energy per particle in two mixed systems; and gives an investigation of MAXWELL's theorem that a vertical colnmn of gas, when it is in equilibrium under gravity, has the same temperature throughout. In the second memoir he takes up the problems of viscosity, thermal conductivity and diffusion. In his third memoir he takes up a simple form of molecnlar attraction; and it is by molecular attraction that part of the behaviour of a condensible gas is explained. The particles at any time under molecular force have a greater average kinetic energy than the rest. In his fonrth memoir he applies the resnlts of the third to deduce the generalised form of the law of BOYLE and CHARLES. CLAUSIUS established as a dynamical theorem

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma(mu^2) = \tfrac{3}{2}\,pv + \tfrac{1}{2}\,\Sigma(Rr),$$

where u denotes the velocity of a particle, R the attraction between two particles and r their distance apart. From it VAN DER WAALS deduced the equation

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - \beta) = \tfrac{1}{3}\,\Sigma(mu^2);$$

and, on the assumption that the righthand term is a constant multiple of the absolute temperature,

$$p = \frac{kt}{v-\beta} - \frac{a}{v^2}.$$

CLAUSIUS gave to VAN DER WAAL's equation the modified form

$$p = \frac{kt}{v-\beta} - \frac{a}{t(v+a)^2}.$$

As the resnlt of his investigations, TAIT dednced

$$pv = E + \frac{C}{v+\gamma} - \frac{A-eE}{v+\alpha},$$

where E is the part of the kinetic energy which is independent of the molecular forces. He considers E to be proportional to the absolute temperature, and so obtains

$$pv = R\left(1 + \frac{e}{v+\alpha}\right)t + \frac{C}{v+\gamma} - \frac{A}{v+\alpha}.$$

He tests the several equations by comparing them with the isothermal lines of carbonic acid obtained experimentally by ANDREWS and AMAGAT.

Professor TAIT's experiences as a golfer led him to undertake researches on impact, and the path of a rotating spherical projectile. To obtain data on the duration of impact of elastic bodies he constrncted a kind of guillotine, in which a block of wood took the place of the knife, and

a cylinder of elastic material that of the head of the victim. The circumstances of the rebound of the block and the corresponding times were recorded graphically on a revolving plate. It was found that when the velocity of impact was 16 feet per second, the duration of impact for a block of plane-tree on a cylinder of vulcanite was about $1/_{500}$th sec., for vulcanized india-rubber about $1/_{130}$th sec., for cork $1/_{70}$th sec. The duration of impact increased when the velocity was reduced, excepting in the case of cork; for which the duration at first increased and afterwards decreased as the velocity was gradually reduced. A second memoir gives the duration of impact for steel on a variety of elastic substances; and the values of the coefficients of restitution.

A well driven golf ball remains a long time in the air, considering the slight elevation of its path at starting. TAIT explained the phenomenon by supposing that the skillful player, when he strikes the ball, imparts to it a rotation round the horizontal axis which is transverse to the velocity of projection and in the direction of the front moving upwards. He thus reduced the phenomenon to that of the twisting ball, familiar to all Americans in the national game of baseball, and observed by NEWTON long ago in the game of tennis. He applied NEWTON's explanation: the conspiring of the velocities under the ball and their conflict above it produce on account of friction a residual force acting upwards normal to the direction of motion. The deflecting force is perpendicular to the velocity of translation and the axis of rotation, and he assumed that it is proportional to the magnitude of either.

When the path is very flat, he obtained, as a first approximation, the equation

$$y = \alpha x + \frac{k a^2}{V}\left(e^{\frac{x}{a}} - 1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{g a^2}{4 V^2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 1 - \frac{2x}{a}\right)$$

where y is the vertical and x the horizontal ordinate of the path; α denotes the initial inclination, V the initial velocity, a the coefficient of friction and k a constant multiple of the velocity of rotation. He found by observation that for well driven balls the time of flight is six seconds and the length of the carry 540 feet; from these data and the equation connecting them he deduced the value of a. To find V he made experiments with a kind of ballistic pendulum, into which a golf ball was driven by a skilled golfer standing at a distance of four feet. In a flight so short he was able to detect one or two complete twists on a long tape attached to the ball; thus verifying his theory experimentally. For a particular value of α (say $\alpha = 0{\cdot}24$) the value of k was deduced by means of the condition $y = 0$ when $x = 540$. By comparing this equation with the equation for the same value of α but for $k = 0$, he

showed that the ball of an unskilled player who gave the same initial inclination and velocity as a skilled player but no spin, would remain only half as long in the air and fall short by one fourth of the range. The above eqnation is an approximation to the path, only when the path is very flat. He conjectured that when the elevation and rotation are great the spherical projectile would describe a path curving upwards to a cusp, and in extreme cases forming a loop. He improved the value of his constants, made a numerical appproximation to the path for considerable elevation, and found that the path might have a cusp or even a loop. The cusp he was able to demonstrate with a golf ball, and the loop with a toy balloon of india-rubber.

Another elaborate research consists of a series of memoirs on the compressibility of water, sea water, and other liquids. He was led into this research by a practical problem propounded to him by Sir WYVILLE THOMSON, the director of the Challenger explorations of the deep sea. The observations of ocean temperature were made with thermometers whose bulbs were protected from increased pressure due to depth in the sea, bnt whose stems inclnding certain aneurisms (that is, swellings of the bore) were unprotected. Before starting, the thermometers were tested in a hydrostatic press, and from the data obtained it was concluded that their readings required to be corrected for pressure at the rate of half a degree Fahrenheit for every mile under the sea. This would mean at some of the depths explored a correction of three degrees Fahr. — a large quantity compared with any variation of the temperature of the sea. TAIT found that almost the whole of the supposed correction was due to heat produced in the compression by the press, particularly in the vulcanite board to which the thermometer was attached; and that the true correction varied from $^1/_7$ deg. Fahr. to $^1/_{20}$ deg. Fahr. according to the greater or less amount of aneurism.

By the time that he had finished the above problem, he found himself provided with apparatus which could be applied to find the answer to several questions about the compressibility of water. He asked himself the following questions. Does, as CANTON asserted, the compressibility of water diminish when the temperature is increased, while the compressibility of other common liquids increases; and further has water, as the results of PAGLIANI and VINCENTINI indicate, a minimum compressibility about 63° C.? Does, as PERKINS stated, the compressibility of water diminish as the pressure is increased? His results clearly answered the latter question in the affirmative, and he deduced from them the following formula for the average compressibility of water:

$$\frac{v_0 - v}{pv_0} = \frac{e}{\Pi + p};$$

where e and Π are constants for the particular temperature and range of pressure. As regards the former question, he was unable to command any great range of temperatures, but the data obtained at several constant pressures agreed with the result of the Italian experimenters. To M. AMAGAT he was indebted for more extensive data, the deductions from which confirmed his previous results. He also investigated whether AMAGAT's data were in agreement with the equation of VAN DER WAALS, and concluded that for the region of the critical temperature they made the constants in that equation imaginary.

The amount of conjoint work in which Professor TAIT engaged is truly remarkable. With ANDREWS he investigated the nature of ozone, with DEWAR the cause of the movements of CROOKES' radiometer; and in his experimental researches he had the cooperation of many graduates and students. With STEELE he cooperated in writing *Dynamics of a particle*, with KELVIN in writing the *Treatise on natural philosophy*, with KELLAND in preparing the *Introduction to quaternions*. In experimental research conjoint work may be necessary, and in writing scientific text-books it may be desirable; but in pure literature it is exceptional. However, TAIT cooperated with BALFOUR STEWART in writing a brochure entitled *The unseen universe: or physical speculations on a future state*, which went through many editions. As a sequel to it they wrote a novel entitled *Paradoxical philosophy*, in which however the moral is more elaborate than the plot. The kernel of the former book is contained in an anagram which was published in Nature for Oct. 15, 1874, and which interpreted reads — „Thought conceived to affect the matter of another universe simultaneously with this may explain a futnre state.“ This other universe is the unseen universe, which bears to the luminiferous ether the same relation which the latter bears to ordinary matter: it forms the substance of the human soul, which is connected with coarse matter during life, and is detached at death.

I have noticed briefly some of the principal scientific works of Professor TAIT. In his own estimation one of the greatest of them all was the direct education of some eight thousand stndents to accnrate ideas in physical science. But in this direction truly he accomplished far more; for dnring forty one years the students at the university of Edinburgh were inspired morally as well as intellectually by the noble example of a good man and a great mathematical physicist.

Über zweckmäßige Abfassung der Titel mathematischer Aufsätze.

Von G. Eneström in Stockholm.

Wenn man ein Zeitschriftenheft in die Hand nimmt, um es zu lesen oder durchzublättern, ist es immer angenehm, wenn die Titel der Aufsätze gut abgefaßt sind, so daß daraus der wesentliche Inhalt ersichtlich wird, aber notwendig ist es nicht, denn man kann ja fast ebensogut die Aufsätze selbst sogleich einsehen. Nimmt man dagegen das Zeitschriftenheft nur um zu untersuchen, ob ein gewisser, ziemlich spezieller Gegenstand dort behandelt ist oder nicht, sind genau präzisierte Titel der Aufsätze noch angenehmer, weil man dadurch viele Zeit und Mühe sparen kann, und besonders willkommen sind sie, wenn man für seinen Zweck eine große Anzahl von Zeitschriftenhefte oder Bände einzusehen hat, aber auch in diesem Falle kann man, unabhängig von der mehr oder weniger guten Abfassung der Titel, das gesuchte, wenn auch mit größerer Mühe, auffinden.

Ganz anders verhält es sich dagegen, wenn man die betreffende Zeitschrift nicht zur Verfügung hat, sondern nur die nackten Titel aus einer Bibliographie oder Zeitschriftenschau kennen lernt. In solchen Fällen kann ein schlecht abgefaßter Titel leicht dazu veranlassen, daß ein Artikel über einen gewissen speziellen Gegenstand gerade demjenigen unbekannt wird, der vielleicht den Artikel am besten zu würdigen und zu benutzen versteht. Nun gibt es freilich Mathematiker, denen es ziemlich gleichgültig ist, ob ihre Schriften von anderen Fachgenossen gelesen werden als von denen, mit welchen sie persönlich oder brieflich verkehren; für diese Verfasser genügt es, daß jeder Aufsatz eine Überschrift hat, ganz wie jeder zivilisierte Mensch einen Namen trägt, aber was diese Überschrift besagt, ist für sie von untergeordneter Bedeutung. Von diesen Mathematikern nehme ich prinzipiell Abstand, und betrachte als abgemacht, daß die Überschrift eines Aufsatzes den wesentlichen Inhalt desselben angeben soll, und zwar aus dem oben angedeuteten Grunde, daß dadurch sein Nutzen viel größer als sonst werden kann. Unter solchen Umständen

wird die Frage über zweckmäßige Abfassung der Titel mathematischer Aufsätze um so wichtiger, je mehr die Zahl der Zeitschriften zunimmt, und es dürfte nicht ganz unangebracht sein, diese Frage als eine aktuelle zu bezeichnen, wenn man auch zugeben muß, daß sie nicht eine solche ersten Ranges ist.

Wenn also der Hauptzweck des Titels ist, den wesentlichen Inhalt des betreffenden Aufsatzes anzugeben, so müssen in erster Linie solche Titel wie z. B. „Extrait d'une lettre“, „Brano di una lettera“, „Solution d'une question“ oder „Correspondance“ unbedingt verworfen werden, da sie ja gar keinen Aufschluß über den Inhalt geben; auch „Vermischte mathematische Notizen“ ist gewiß kein guter Titel. Kaum besser ist z. B. der Titel: „Über ein Theorem von Euler“, da es bekanntlich fast kein Gebiet der reinen oder angewandten Mathematik gibt, auf dem Euler nicht tätig gewesen ist. Etwas weniger schlecht ist z. B. der Titel: „Über ein Theorem von Steiner“, da Steiner sich vorzugsweise mit der synthetischen Geometrie beschäftigt hat, aber auch dieser Titel ist nicht besonders zu empfehlen, und im allgemeinen halte ich es für sehr wünschenswert, daß Artikel, die bestimmte Sätze behandeln, Titel bekommen, welche ausdrücklich aussagen, welchem Gebiete der Mathematik die Sätze angehören. Ausnahmsweise kann ein solcher Titel wie z. B.: „Über das kleine Theorem von Fermat“ gebilligt werden, da aus demselben unmittelbar hervorgeht, daß es sich um den zahlentheoretischen Satz $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ handelt.

Auf der anderen Seite genügt natürlich im allgemeinen nicht die Angabe des Gebietes allein, und dies um so weniger, je umfassender oder je mehr bearbeitet das fragliche Gebiet ist; so z. B. sind die oft vorkommenden Titel: „Zur Theorie der elliptischen Funktionen“ und „Sur un point de la théorie des fonctions“ wenn irgend möglich zu vermeiden. Überhaupt ist immer, sofern nicht besondere Gründe dagegen sprechen, im Titel der Gegenstand des Aufsatzes genau anzugeben.

Wenn es also als ein Fehler betrachtet werden muß, daß der Titel unnötig unvollständig ist, kann es auch sehr wohl eintreffen, daß man in Bezug auf die Vollständigkeit zu weit geht. Im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert war es nicht allzu selten, daß die Verfasser ihren Schriften so ausführliche Titel gaben, daß dieselben fast die ganze Titelseite ausfüllten, aber dies Verfahren wird jetzt, und zwar aus guten Gründen, als nicht empfehlenswert angesehen. In der Tat gibt es praktische Gründe, warum es angebracht ist, den Titel möglichst kurz abzufassen. Zuerst werden die Titel der Zeitschriftenartikel gewöhnlich teils auf dem Umschlag, teils im Inhaltsverzeichnis des Bandes der betreffenden Zeitschrift wiederholt, und oft werden sie auch in vielen anderen Zeitschriften

mathematischen oder literarischen Inhalts abgedruckt, so daß es schon aus diesem Grunde erwünscht ist, daß die Titel nicht unnötigerweise lang sind. Dann muß man in Betracht ziehen, daß Zitate der Titel möglichst erleichtert werden sollen, und daß die mathematischen Bibliographien weit übersichtlicher werden, wenn der Titel jeder Schrift nnr einen kleinen Raum in Anspruch nimmt.

Ganz besonderes Gewicht soll man meiner Ansicht nach daranf legen, daß die Titel nicht mathematische Formeln oder Ausdrücke enthalten, die vom typographischen Gesichtspunkte aus Schwierigkeiten darbieten. Ein Titel wie z. B. „Über die Auflösung der nnbestimmten Gleichung $ax + by = c$“ ist nicht zn beanstanden, dagegen ist der Titel: „Sur l'intégration de l'équation différentielle $(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$“ nicht zu billigen, und als ein wahres Monstrum muß der folgende Titel (vgl. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), S. 277) betrachtet werden:

Sur l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\frac{k^2\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x}{\mathrm{dn}x} + 2\nu_1\frac{\mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x}{\mathrm{cn}x} - 2\nu_2\frac{\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x}{\mathrm{sn}x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$= \left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1) + \frac{\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)\right.$$
$$+ \frac{k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1) + k^2\mathrm{sn}^2 x\,(n+\nu+\nu_1+\nu_2)$$
$$\left.(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1) + h\right]y,$$

équation où ν, ν_1, ν_2 designent des nombres quelconqnes, n, n_1, n_2, n_3 des nombres entiers positifs ou négatifs, et h nne constante arbitraire.

Dieser Titel ist besonders unangebracht, nicht nnr wegen der Länge und des schwierigen typographischen Satzes, sondern auch darum, weil es hier keinen wirklichen Grund gibt, die Beschränkungen, denen die Konstanten unterworfen sind, im Titel anzugeben.

Ausser den unnötigerweise unvollständigen und den allzu ausführlichen Titeln gibt es anch andere Arten, die vermieden werden sollen. Znweilen hat ein gewisser Umstand den Verfasser zu einem Aufsatz Anlaß gegeben, und mit Beznguahme hierauf wird ein Titel gewählt, der durchaus irreleitend ist. So z. B. gibt es eine 1809 in Upsala gedruckte Dissertation mit dem Titel: *De discrimine solutionis geometricae ex delectu principii*, die nur eine *elementare* geometrische Lösung des folgenden Problems enthält: „Eine Gerade nnd zwei Punkte A, B außerhalb derselben sind gegeben; einen Pnnkt P auf der Geraden zu finden, so daß $AP + BP$ oder $AP - BP$ von gegebener Länge sind.“ Wenn man nur den Titel dieser Schrift kennt, wird man ohne Zweifel mit Wölffing (*Mathematischer*

Bücherschatz I, S. 8) versucht sein, dieselbe als zur Philosophie der Mathematik gehörig zu betrachten.

Im vorhergehenden habe ich hauptsächlich darauf aufmerksam gemacht, auf welche Weise Titel fehlerhaft werden können, aber natürlich wäre es viel belehrender, genauer anzugeben, wie sie am besten abgefaßt werden sollen. Leider dürften solche allgemein gültige Angaben nicht möglich sein, weil zuweilen besondere Umstände in Betracht gezogen werden müssen. So z. B. kann es passend sein, für eine ausführliche Abhandlung über einen gewissen Gegenstand einen längeren Titel zu wählen, während man sich in betreff eines sehr kurzen Artikels über denselben Gegenstand mit einem knapperen Titel begnügt. Hat ein Verfasser schon früher eine Schrift über ein bestimmtes Thema veröffentlicht, so ist es vom bibliographischem Gesichtspunkte aus zu empfehlen, eine zweite Schrift über dasselbe Thema entweder als Fortsetzung der ersten ausdrücklich zu bezeichnen, oder, wenn dies aus sachlichen Gründen nicht angeht, den Titel derselben abweichend von dem der früheren abzufassen.

Solche und ähnliche Vorschriften sind dennoch meiner Ansicht nach von untergeordneter Bedeutung, das wichtigste ist, daß die Verfasser so viel als möglich versuchen, im Titel den wesentlichen Inhalt des Aufsatzes möglichst kurz anzugeben, und der Zweck dieser Zeilen ist in erster Linie die Aufmerksamkeit hierauf zu lenken.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.“

. Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1:15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1:190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1:197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—688**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144.

---

1 : 687—689. Um ausfindig zu machen, was das uns verlorene Buch des Alkhwarizmi: „Über die Vermehrung und Verminderung“ enthielt, bemerkt Herr Cantor, daß der Ausdruck „Vermehrung und Verminderung“ einmal als Überschrift einer Abhandlung (*Liber augmenti et diminutionis*) vorkommt, aus deren Inhalt man auf den der gleichbetitelten aber nicht mehr vorhandenen Arbeiten schließen zu dürfen glaubt. Auf diese Weise findet er, wenn ich seine Angabe S. 689 richtig verstanden habe, daß die Methode der Vermehrung und Verminderung mit der Regel der zwei Fehler identisch ist.

Außer dem Verfasser oder Übersetzer des *Liber augmenti et diminutionis* gibt es aber einen anderen Mathematiker des christlichen Mittelalters, der den Ausdruck „Vermehrung und Verminderung“ benutzt hat, nämlich Leonardo Pisano. Im dreizehnten Abschnitt des *Liber abaci* (S. 369 ed. Boncompagni) kommt nämlich folgender Passus vor: „Est enim alius modus elchataym, qui regula augmenti est diminucionis appellatur“, und dann folgt die Auseinandersetzung dieser „anderen“ Regel. Man sieht hieraus, daß für Leonardo die „regula augmenti et diminutionis“ nicht mit der Regel der zwei Fehler zusammenfällt, sondern eine besondere Art derselben ist, und zwar die, wo das Resultat unter der Form

$$x = \frac{e_1 n_2 + e_2 n_1}{e_1 + e_2}$$

hervortritt, während der anderen Art der Regel der zwei Fehler die Form

$$x = n_1 + \frac{n_2 - n_1}{e_1 + e_2}\, e_1$$

entspricht.

In betreff der Anm. 2) S. 689 mag darauf hingewiesen werden, daß schon LEONARDO PISANO (a. a. O. S. 318) die „regula elchataym“ richtig mit „duarum falsarum positionum regula“ übersetzt. G. ENESTRÖM.

1:694, 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748, siehe BM **1**$_3$. 1900, S. 449—500. — **1:749,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 324.

1:854. Ein anderes Exemplar des *Tractatus magistri GERNARDI* (!) *de algorismo* findet sich in Cod. reg. Su. Vat. 1261 fol. 266—289; dies Exemplar scheint vollständiger als das von Herrn CANTOR erwähnte zu sein (vergl. A. A. BJÖRNBO, Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **14**, 1902, S. 149—150). Ob GHERARDO CREMONESE Verfasser der Schrift ist, scheint freilich noch nicht zu entscheiden möglich. G. ENESTRÖM.

1:855, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144. — **2:37,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:38,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502.

2:63. Nach BONCOMPAGNI (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **2**, 1869, 426) erschien in Paris 1570 eine französische Übersetzung des *Algorithmus demonstratus* unter dem Titel *L'arithmetique demonstree tradvite et commentee par* PIERRE FORCADEL. Diese Übersetzung scheint außerordentlich selten zu sein, und zur Zeit dürfte nur ein einziges Exemplar derselben bekannt sein, nämlich das von BONCOMPAGNI erwähnte, der Universitätsbibliothek in Turin angehörige (vgl. FONTÈS, *PIERRE FORCADEL* (Mém. de l'acad. d. sc. de Toulouse **8**$_9$, 1896, 370). G. ENESTRÖM.

2:70, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502—503. — **2:97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:98,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:101.** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2:111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:116,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:122,** siehe BM **1**$_3$. 1900, S. 503—504. — **2:126, 127,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:128,** siehe BM **1**$_3$. 1900, S. 504. — **2:132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM **1**$_3$. 1900, S. 504. — **2:157, 158,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:163, 166,** siehe BM **1**$_3$. 1900, S. 504. — **2:175,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:210, 219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352—353. — **2:229, 242, 243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2:253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2:273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2:274,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:282, 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2:284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2:313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:334,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:353,** siehe

BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81.

2 : 385. Vom bibliographischen Gesichtspunkte aus dürfte die Angabe: „Ein Jahr früher gab der gleiche Pariser Drucker *Opuscula de* CHARLES DE BOUVELLES (1510) heraus" nicht ganz befriedigend sein. Schon aus sprachlichen Gründen ist es klar, dass „Opuscula de CHARLES DE BOUVELLES" *nicht* der wirkliche Titel des Buches sein kann, und die von CANTOR zitierte Quelle gibt auch ausdrücklich an, daß dem fraglichen Sammelbande ein Gesamttitel fehlt (vgl. auch *Catalogo della biblioteca di B.* BONCOMPAGNI, I, Roma 1895, S. 487). Um Mißverständnis zu vermeiden, wäre es also besser zu sagen: „Ein Jahr früher (1510) gab der gleiche Pariser Drucker einen Sammelband heraus...."

G. ENESTRÖM.

---

2 : 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 430,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481, 482,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509, $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554, 569, 572, 573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145.

---

2 : 580—581. Nach CLAVIUS wird hier über die von CARLO MARIANI gegebene Vorschrift für die Auffindung der Seite des gleichseitigen Siebenecks berichtet, aber über MARIANI selbst bemerkt Herr CANTOR nur, daß jener um das Jahr 1606 bekannter gewesen sein muß als er heute ist. Willkommener für den Leser wäre es gewiß zu erfahren, daß die betreffende Vorschrift in der Arbeit *De aequali eptipartitione peripheriae circuli* (Rom 1592, 42 Bl. 4°) vorkommt (vgl. RICCARDI, *Bibliot. matem. ital.* II, 114), und vielleicht könnte hinzugefügt werden, daß MARIANI nach RICCARDI eine Schrift *De circuli quadratura* (Cremona 1599) verfaßt hat. Im Register wird unter „MARIANUS" auf „Cremonensis" verwiesen, was wohl nicht angezeigt ist. G. ENESTRÖM.

---

2 : 582, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594, 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597, 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 614, 620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2 : 719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 721, 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 742,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358.

---

2 : 770. Nach Riccardi (*Bibliot. matem. ital.* I, 124) erschien der dritte Band der *Apiaria philosophiae mathematicae* des M. Bettini zum ersten Mal 1656 (nicht 1642, wie Cantor nach Poggendorff angibt). Diesen Band kann also G. Ph. Harsdörfer in seinem 1651 und 1653 herausgegebenen Fortsetzungen der Schwenterschen Erquickstunden kaum ausgenutzt haben.

G. Eneström.

2 : 772, 775, siehe BM **2**3, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**3, 1901, S. 148; **3**3, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM **2**3, 1901, S. 359; **4**3, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**3, 1901, S. 148.

2 : 802. Dem Berichte über den Inhalt der Huddeschen Abhandlung *De reductione aequationum* verdient hinzugefügt zu werden, daß hier, soweit bekannt ist, zum ersten Mal durch einen und denselben Buchstaben sowohl ein positiver als ein negativer Zahlwert bezeichnet wird. In seiner „XI. regula" (Descartes, *Geometria*, ed. 1659, S. 439) bemerkt Hudde nämlich: „Brevitatis causâ quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam suis signis + et —, vocabo p; 3^{tii} q; 4^{ti} r; 5^{ti} s; atque sic deinceps: et — p, — q, — s, etc. easdem quantitates designabunt, sed contrariis signis adfectas." Auf diesen Umstand dürfte H. G. Zeuthen zuerst aufmerksam gemacht haben (*Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, S. 206). Bekanntlich wird vielfach irrigerweise behauptet, Descartes habe sich schon derselben Bezeichnung bedient (vgl. z. B. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* **1**, 12).

G. Eneström.

2 : 820, 825, 840, 856, 865, siehe BM **2**3, 1901, S. 148—149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**3, 1900, S. 311. — **2 : 891,** siehe BM **1**3, 1900, S. 273.

2 : 898. Hinsichtlich der Schrift *Exercitatio geometrica de maximis et minimis* (1666) des M. A. Ricci wird bemerkt: „Es scheint, als wenn dort nur antikgeometrische Untersuchungen angestellt wären" und auf den Artikel von D. Besso: *Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci* (Periodico di matem. **8**, 1893, 1—16) verwiesen. Aber schon Biot und Lefort haben in ihrer Ausgabe des *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota* (Paris 1856, S. 274—278) darauf aufmerksam gemacht, daß Ricci in der fraglichen Schrift das Tangentenproblem für die Curve $y^m = px^n$ gelöst hat, also den von Cantor angedeuteten Satz des S. degli Angeli verallgemeinerte, und ausführlichere Auskunft hierüber gibt ebenfalls der Artikel von Besso. Man sieht daraus, daß die Methode des Ricci eigentlich rein algebraisch ist und eine unmittelbare Anwendung des Satzes, daß das Produkt $(a - x)^m\ x^n$ ein Maximum für $\frac{a-x}{x} = \frac{m}{n}$ wird, enthält; auch dieser Satz dürfte nicht ohne Interesse sein.

Bei Erwähnung der Schrift von Ricci wäre es vielleicht nicht unangezeigt hinzuzufügen, daß eine neue Auflage derselben im Jahre 1668 als Anhang zur *Logarithmotechnia* von N. Mercator veröffentlicht wurde. Nach Riccardi (*Bibliot. matem. ital.* II, 370) ist die Schrift auch in den Philos. transact. 1668 abgedruckt worden, aber diese Angabe beruht wohl auf einem Mißverständnis (an der fraglichen Stelle findet sich nur ein Bericht über die *Logarithmotechnia*).

G. Eneström.

2 : 901, siehe BM 1_3, 1900, S. 511. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM 3_3, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM 1_3, 1900, S. 511—512.

3 : 9, siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3 : 10**, siehe BM 1_3, 1900, S. 518.

3 : 11. Als Ergänzung der Notiz, daß die nachgelassene Schrift Barrows: *Lectio in qua theoremata Archimedis de sphaera et cylindro per methodum indivisibilium investigata exhibentur* 1678 herausgegeben wurde, kann hinzugefügt werden, daß der Druckort London ist, und daß die Schrift der Barrowschen Euklid-Ausgabe vom genannten Jahre angehängt wurde. Da sie aber besonderes Titelblatt und besondere Paginierung hat, ist es wohl möglich, daß Exemplare der *Lectio* allein angetroffen werden können, obgleich kein solches Exemplar mir zur Zeit bekannt ist. G. Eneström.

3 : 12, 17, 22, siehe BM 1_3, 1900, S. 512.

3 : 22. Die von S. F. Hartmann im Jahre 1679 gestellte Frage scheint noch eine Antwort veranlaßt zu haben. Nach Riccardi (*Bibliot. matem. ital.* I, 243) veröffentlichte nämlich Pietro Paolo Caravaggi (die von Cantor S. 21 angewendete Form Caravaggio dürfte weniger zu empfehlen sein) 1682 in Milano eine Schrift: *Modo di raddoppiare ogni triangulo rettilineo e conseguentemente ogni figura rettilinea, senza passare tanto nel costruire quanto nel dimostrare, i confini del primo libro d'Euclide. Problema dato in luce da Alberto Tirelli.* G. Eneström.

3 : 24. Anm. 1 ist nach A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* hinzuzufügen: Edinburgh Mathem. soc. Proceedings **10**, 1892, S. 23—24.

3 : 25. Anm. 2. Statt pag. 222 lies tome I, p. 220. Die angedeutete Stelle im 2. Bande der *Opera* des Wallis findet sich S. 470.

3 : 26, siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3 : 45—48, 49, 50**, siehe BM 1_3, 1900, S. 512—513. — **3 : 70**, siehe BM 2_3, 1901, S. 360. — **3 : 100**, siehe BM 2_3, 1901, S. 149.

3 : 112. Mit transcendenten Gleichungen hat sich Leibniz nicht nur an der von Herrn Cantor zitierten Stelle, sondern auch in seinem Briefwechsel mit Huygens beschäftigt. Als Beispiel einer transcendenten numerischen Gleichung gibt Leibniz in seinem Briefe vom 8. September 1679 (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, herausgegeb. von* C. I. Gerhardt, I [1899], S. 568) $x^x - x = 24$ an, deren Wurzel $x = 3$ ist. „Voilà donc une équation qui est *nullius certe gradus cogniti*, et dont le degré même est demandé,“ bemerkt er, und fügt hinzu: „je vous supplie, Monsieur, d'y songer un peu, car vous voyez que ce sont des véritables problèmes déterminés, et il faut bien qu'il y ait une méthode dans la nature pour les résoudre“. Diese Aufforderung an Huygens hatte indessen nur wenig Erfolg, und in seinem Antworte vom 22. November 1679 (a. a. O., S. 578) bezweifelte dieser, daß die Gleichung bestimmt war, sofern man nicht nur ganzzahlige, sondern auch gebrochene und

irrationale Wurzeln berücksichtigte. Leibniz seinerseits behauptete beweisen zu können, daß die Gleichung nur eine endliche Anzahl von Wurzeln hatte (a. a. O., S. 581), und weiter scheint der Gegenstand in seinem Briefwechsel mit Huygens nicht berührt zu werden. Fünfzehn Jahre später schrieb Leibniz an Johann Bernoulli (Brief vom 7. Juni 1674), Huygens habe diese Rechnungsart auffallend gefunden („Hugenio insolens id calculandi genus videbatur").

G. Eneström.

---

3 : 116, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 124**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408.

---

3 : 131. Nach Ball (*History of the study of mathematics at Cambridge* [1889], S. 47) erschienen 1683 Barrows *Lectiones mathematicae* nicht nur für die Jahre 1664—1666 sondern auch für das Jahr 1667. Nach Boncompagnis Bücherkatalog (I, Roma 1895, S. 30) ist eine englische Übersetzung derselben im Jahre 1734 in London unter dem Titel: *Mathematical learning: or lectures read in the public schools at the university of Cambridge* herausgegeben.

G. Eneström.

---

3 : 151, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 174**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 246**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 447, 455**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155. — **3 : 477, 479**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 521**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 565, 571, 578**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 614**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 660, 667, 689, 695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3 : 750, 758, 760, 766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 892**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen.

108. Über den Ursprung des Termes „ratio subduplicata". Bekanntlich bedient sich Eukleides (*Elementa* V, def. 9) des Ausdruckes „*λόγος διπλάσιος*", wenn er angeben will, daß zwei Größen sich wie die Quadrate zweier anderer Größen verhalten, und dieser Ausdruck wurde von den lateinischen Übersetzern des Eukleides mit „proportio duplicata" oder „ratio duplicata" wiedergegeben. Bei Nikomachos (*Introd. arithm.* I, cap. 18) findet sich der Ausdruck „*λόγος ὑποδιπλάσιος*", aber derselbe hat nicht eine entsprechende Bedeutung, sondern bezeichnet das Verhältnis zweier Größen, von denen die zweite das doppelte der ersten beträgt, und dieser Ausdruck wurde lateinisch mit „ratio subdupla" übersetzt. Auf der anderen Seite dürfte weder bei den Griechen noch im Mittelalter irgend ein Ausdruck angewendet worden sein, um zu bezeichnen, was die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts mit „ratio

subduplicata" verstanden, d. h. daß zwei Größen sich wie die Quadratwurzeln zweier anderer verhalten.

Ist es möglich anzugeben, wer zuerst den Term „ratio subduplicata" in dieser Bedeutung benutzt hat? G. ENESTRÖM.

---

109. Über die verschiedenen Auflagen und Übersetzungen von Descartes' „Géométrie". Dem wesentlichen Inhalte der DESCARTESschen *Géométrie* haben die Geschichtsschreiber der Mathematik schon seit MONTUCLA die gebührende Aufmerksamkeit gewidmet, aber vollständige und zuverlässige Auskunft über die verschiedenen Auflagen und Übersetzungen dieser Arbeit findet man, soweit mir bekannt ist, bei ihnen nicht. So z. B. dürfte es noch nicht genau untersucht worden sein, ob der ursprüngliche Text in den neuen Ausgaben irgendwo verändert worden ist, und auch die rein bibliographischen Angaben bedürfen zum Teil einer Revision, wobei u. a. festgestellt werden soll, welche Schriften den verschiedenen Ausgaben angehängt sind, wann diese Schriften verfaßt wurden und ob irgend einige derselben früher gedruckt worden sind. Um eine Untersuchung in dieser Richtung anzuregen, verzeichne ich hier die Auflagen oder Übersetzungen, die ich selbst gesehen habe, oder die meines Wissens von anderen Verfassern erwähnt worden sind.

Französische Ausgaben.

Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptique, les Météores et la Géométrie. Leyden, Maire 1637. (78) + 413 S. 4⁰. — Nach BIERENS DE HAAN (*Bibliographie néerlandaise ... sur les sciences mathématiques* [1883], S. 52) erschienen neue Auflagen des *Discours:* Amsterdam 1656, Amsterdam 1678, Paris 1724, aber diese enthalten wohl nicht die *Géométrie.*

La géométrie. Paris, Angot 1664. 119 + (8) S. 4⁰.

La géométrie divisée en trois livres. Paris 1705. 12⁰. (Siehe J. W. MÜLLER, *Auserlesene mathematische Bibliothek* [1820], S. 66.)

La géométrie. Paris 1728. (Siehe die unten angeführte Übersetzung von L. SCHLESINGER, S. V.) — Nach einem antiquarischen Bücherkataloge erschien eine Auflage in Paris 1726, möglicherweise handelt es sich um diese Ausgabe.

La géométrie augmentée des commentaires du P. RABUEL. Paris [oder Lyon?] 1730. 4⁰. (Siehe J. W. MÜLLER, a. a. O., S. 66, 67.)

La géométrie. Nouvelle édition. Paris, Hermann 1886. (5) + 91 S. 4⁰.

La géométrie [Paris, Bahl 1894]. — Ist in *La géométrie analytique d'AUGUSTE COMTE:* Nouvelle édition, Paris Bahl 1894, S. 1—111 enthalten.

Lateinische Ausgaben.

Geometria a RENATO DES CARTES 1637 gallica edita cum notis FLORIMONDI DE BEAUNE. Leyden, Maire 1649. XII + 336 + (2) S. 4⁰.

Geometria. I, II. Amsterdam, Elzevier 1659. XII + 520 S.; XIV + 424 S. — Der zweite Teil enthält Schriften von F. VAN SCHOOTEN, E. BARTHOLIN, F. DE BEAUNE, J. DE WITT.

Geometria. I, II. Amsterdam, Blaeu 1683. 4⁰.

Geometria. I, II. Frankfurt am Main, Knoch 1695. (16) + 520 S.; (8) + 468 + (1) S. — Mit Anmerkungen von JAKOB BERNOULLI.

Deutsche Übersetzung.

Die Geometrie von RENÉ DESCARTES. Deutsch herausgegeben von L. SCHLESINGER. Berlin, Mayer & Müller 1894. X + 116 S. 8⁰ + 2 Taf.

Ausserdem ist die Geometrie auch in einigen Ausgaben von DESCARTES' gesammelten Werken (z. B. die von V. COUSIN) enthalten. G. ENESTRÖM.

110. Über die Mathematiker Charpit und Français. In vielen mathematischen Arbeiten werden die französischen Mathematiker Charpit und Français erwähnt, aber biographische Notizen über sie fehlen in den gewöhnlichen Nachschlagebüchern. Am meisten bekannt ist wohl Charpit, da sein Name mit einer besonderen Methode zur Integration gewisser partieller Differentialgleichungen verbunden worden ist (siehe z. B. G. Boole, *A treatise on differential equations*, ed. 2, Cambridge 1865, S. 338, 346, 350; A. R. Forsyth, *A treatise on differential equations*, ed. 3, London 1903, S. 376—181), aber über seine Lebensumstände ist mir nur das bekannt, was Lacroix in seinem *Traité du calcul différentiel et intégral* (éd. 2, Paris 1814, tome II, S. 548) mitteilt, nämlich daß er als junger Mann kurze Zeit nach dem 30. Juni 1784 starb (dies ist das Datum der Einreichung einer von ihm verfaßten, ungedruckt gebliebenen Abhandlung an die Pariser Akademie der Wissenschaften). Überhaupt scheint die zitierte Arbeit von Lacroix die einzige Quelle unserer Kenntnis von Charpits Methode zu sein, und keine mathematische Abhandlung von ihm dürfte gedruckt sein.

Von den Brüdern Français kennt man zwar einige gedruckte Schriften (der Katalog der „Royal society" führt freilich unter J. F. Français auch solche Abhandlungen auf, die dem Bruder angehören), aber sonst nur wenig. Der eine Bruder, der zuweilen „Français de Colmar" genannt wird, war „professeur aux écoles d'artillerie" und starb nach Lacroix (a. a. O., S. 658) als Lehrer der Mathematik in Mainz, wahrscheinlich kurze Zeit vor 1812 aber jedenfalls nicht früher als 1806. Der andere Bruder J. F. Français wird 1812—1815 „professeur à l'école impériale de l'artillerie et de génie" genannt, sein Todesjahr ist mir vollständig unbekannt.

Es wäre nützlich, genaue biographische Notizen über die drei fraglichen Mathematiker zu bekommen.

G. Eneström.

Rezensionen.

J. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band. Rechnen und Algebra. Leipzig, Veit 1902. VIII + 332 S. 8⁰. Mark 8.

Von den bisherigen Darstellungen der Geschichte der Elementarmathematik unterscheidet sich das Buch des Herrn TROPFKE, teils durch die Reichhaltigkeit des Inhalts und die Zuverlässigkeit der Angaben, teils durch die Anordnung des Stoffes. Herr TROPFKE hat sich nämlich nicht begnügt, aus den besten vorhandenen Arbeiten über Geschichte der Mathematik die für seinen Zweck passenden Notizen zu entnehmen, sondern er hat dieselben auch, so weit es ihm möglich war, durch Quellenstudium kontrolliert und zuweilen auch ergänzt. Auf diese Weise hat er eine stattliche Sammlung geschichtlicher Notizen bekommen (die Zahl der Anmerkungen, die hauptsächlich Belege für die im Texte gegebenen Notizen enthalten, beträgt nicht weniger als 1233), und auch dem Fachmann wird hie und da etwas neues geboten.

Bei der Bearbeitung dieses Materials war das Augenmerk des Verfassers ein Werk herzustellen, worin der Leser alle Aufschlüsse über jeden besonderen Punkt schnell finden konnte, und aus diesem Grunde hat er nicht eine chronologische, sondern eine systematische Anordnung des Stoffes gewählt. Der bisher erschienene erste Band enthält also zwei Hauptstücke, nämlich *Rechnen* und *Algebra;* das erste Stück ist in fünf Abteilungen (*Die Zahlen im allgemeinen; Die Maße; Die ganzen Zahlen; Die Brüche; Das angewandte Rechnen*) und das zweite Stück in sechs Abteilungen (*Die algebraische Ausdrucksweise; Der Name Algebra; Die Entwicklung des Zahlenbegriffes; Die algebraischen Operationen; Die Proportionen; Die Gleichungen*) geteilt, von welchen die meisten zwei oder mehrere Unterabteilungen haben. So z. B. werden neun Arten des angewandten Rechnens (Regeldetri, Zinsrechnung, Terminrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabattrechnung, Tararechnung, Mischungsrechnung, Gesellschaftsrechnung, Wechselrechnung) unterschieden und in besonderen Paragraphen behandelt.

Am Ende des Bandes finden sich zwei Anhänge, nämlich eine Zeittafel zur Geschichte der algebraischen Zeichenschrift (3 Seiten) und eine Zusammenstellung von Orginalbeispielen aus mathematischen Schriften der verschiedenen Perioden (23 Seiten). Dem zweiten, voraussichtlich vor dem Ende dieses Jahres erscheinenden, Bande wird ein allgemeines Namen- und Sachregister beigefügt werden.

Es ist leicht zu verstehen, daß die von Herrn TROPFKE gewählte Anordnung des Stoffes zuweilen nicht unerhebliche Schwierigkeiten mit sich führen muß. Handelt es sich um ein Lehrbuch der Rechenkunst und Algebra, ist es in

vielen Fällen Geschmackssache, was man zur Rechenkunst oder zur Algebra rechnen soll, und in solchen Fällen kann der Verfasser ohne Ungelegenheit die Anordnung, die ihm am meisten gefällt, wählen. Wendet er aber dies Verfahren bei der Bearbeitung eines *historischen* Handbuches an, kann es leicht eintreffen, daß die von ihm bevorzugte systematische Anordnung Begriffe von einander trennt, die historisch sehr nahe zusammengehören, und die der Leser darum geneigt ist an einer und derselben Stelle zu suchen. So z. B. geht es ja sehr wohl an, mit Herrn Tropfke die Radizierung zur Algebra zu rechnen, aber tatsächlich war schon im Mittelalter die Radizierung sogar in den kleinen Lehrbüchern der gemeinen Rechenkunst (z. B. der *Algorismus* des Sacrobosco) enthalten; etwas ähnliches gilt auch von den Termen *plus* und *minus*, sowie von den Zeichen + und —. Auf der anderen Seite werden wenige Leser in einer Abteilung, die den Titel „Das Rechnen“ trägt, solche Notizen suchen, die sich S. 54—68 („Eigenschaften der ganzen Zahlen“) finden; da wird z. B. der Wilsonsche Satz erwähnt, der wohl mit Rechnen wenig zu tun hat.

Es gibt auch einen anderen Umstand, der dem Leser zuweilen das Auffinden der gewünschten Aufschlüsse erschwert, nämlich das Fehlen von gewissen Unterabteilungen im Klassifikationsschema, denn hierdurch ist der Verfasser genötigt worden, einige Notizen an Stellen, wo sie nicht zu Hause sind, einzupassen. So z. B. wird unter der Überschrift „Der Name Algebra“ u. a. auch Aufschlüsse über Binom und Koefficient gegeben. Möglicherweise liegt hierin auch der Grund, warum ich gewisse Gegenstände, die meiner Ansicht nach in eine Geschichte der Elementarmathematik gehören, vergebens gesucht habe.

Die soeben bemerkten kleinen Übelstände bei der Benutzung der Arbeit des Herrn Tropfke werden natürlich wesentlich beseitigt, wenn das in Aussicht gestellte Sachregister wirklich gut wird, und es ist also zu hoffen, daß sie für die Brauchbarkeit der Arbeit von untergeordneter Bedeutung sein werden.

Wie ich schon gesagt habe, ist das Buch des Herrn Tropfke zum großen Teile auf Quellenstudium gegründet, und seine Notizen können darum einen hohen Grad von Zuverlässigkeit beanspruchen. Nur ziemlich selten ist er entweder von seinen Vorlagen irre geleitet, oder von einer gewissen Neigung, aus mehr oder weniger richtigen Prämissen rasch bestimmte Folgerungen zu ziehen, zu Behauptungen verlockt worden, die beanstandet werden können. Von der angedeuteten Neigung gibt es schon im Vorworte wenigstens ein Beispiel, nämlich die Hervorhebung des Entstehens der x der Gleichung aus dem italienischen *cosa* als eine „richtige Erklärung“. Wie Herr Tropfke S. 150 ganz richtig angibt, ist Descartes der erste Verfasser, der das Zeichen x benutzt hat, und bei ihm gibt es auch nicht eine Andeutung, daß er das Zeichen anderswo entnommen hat. Die Behauptung des Herrn Tropfke, die freilich S. 150 nur als ein „Erklärungsversuch“ hingestellt wird, muß also eine Folgerung aus gewissen Prämissen sein, und diese sind, wie aus S. 190—195 hervorgeht:

1) In der „Dresdener Algebra“ gleicht das Zeichen für die Unbekannte einem *co*, aus der zuweilen vorkommenden Flexionsendung „ae“ ist zu ersehen, daß das Zeichen jedenfalls nicht der Anfangsbuchstabe von „radix“ sein kann.

2) Dies Zeichen bekam bei späteren Cossisten die Form ꝶ.

3) Das also modifizierte Zeichen wurde, wegen seiner Ähnlichkeit mit einem x, lange Zeit vor DESCARTES wirklich als x gelesen.
4) Aus diesem Grunde bevorzugte DESCARTES das x, als er sich entschlossen hatte die unbekannten Größen mit den letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen.

Hier sind mir besonders 3) und 4) sehr verdächtig. Für 3) findet sich bei Herrn TROPFKE, so viel ich finden kann, gar kein Beweis, und auffallend ist, daß er S. 150 als Belegstelle auf S. 32 der TREUTLEINschen Monographie über die deutsche Coss verweist, obgleich TREUTLEIN an dieser Stelle ausdrücklich zugibt, daß das Zeichen für die Unbekannte *nicht* von den Cossisten mit dem Namen des Buchstabens x in Verbindung gesetzt worden ist. Ebensowenig ist 4) von Herrn TROPFKE durch Belege begründet worden, und die Erklärung des Zeichens x als eine Verstümmlung der Anfangsbuchstaben des Wortes *cosa* ist folglich als eine bloße Konjektur zu betrachten.

Unter den übrigen Bemerkungen, die ich beim Durchlesen der Arbeit des Herrn TROPFKE notiert habe, erlaube ich mir die folgenden hier aufzuführen.

S. 4. Es ist wohl etwas uneigentlich den Mathematiker RAINER GEMMA-FRISIUS (1508—1555) als dem Mittelalter angehörig zu bezeichnen.

S. 7. Die erste Auflage des Rechenbuches von JEAN TRENCHANT erschien im Jahre 1558 (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 356).

S. 7. In betreff des *Algorismus* des SACROBOSCO (dessen Todesjahr noch nicht ermittelt worden ist) wäre auf die verbesserte Ausgabe von M. CURTZE (1897) zu verweisen.

S. 8. Das Geburtsjahr des LEONARDO PISANO ist vollständig unbekannt, und da bekanntlich die erste Bearbeitung des *Liber abaci* aus dem Jahre 1202 herrührt, ist es wohl anzunehmen, daß er *vor* 1180 geboren ist.

S. 25. Daß das französische Wort *degré* noch die direkte Abstammung vom arabischen Wort *darajah* verrät, halte ich mit CANTOR für eine vollständig unbestätigte und an sich sehr unwahrscheinliche Vermutung.

S. 40. Den Notizen über die termini technici bei Subtraktion könnte hinzugefügt werden, daß LEONARDO PISANO nie das Wort „subtrahere" sondern „extrahere" anwendet (vergl. CANTOR, *Vorles. über Gesch. der Mathem.* 2^2 [1900], S. 10).

S. 62. Den FERMATschen Satz hat LEIBNIZ spätestens 1683 entdeckt (vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 242).

S. 64. Nach SUTER (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 500 und 2_3, 1901, S. 12) ist die Vorlage des *Talchis* des IBN ALBANNA von ABU ZAKARIJA EL-HASSAR verfaßt, und der Titel dieser Vorlage unrichtig mit „Der kleine Sattel" übersetzt worden.

S. 81. Ob es sicher ist, daß der Name „Bruch" auf LEONARDOS „numerus ruptus" zurückgeht? Im Mittelalter waren wohl die Benennungen „numeri fracti" und „fractiones" ebenso gewöhnlich.

S. 89. Der *Canon mathematicus* des VIÈTE wurde eigentlich nur einmal, aber der *Titel* dazu dreimal (1579, 1589, 1609) gedruckt (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 356).

S. 94. In betreff der periodischen Brüche kann hinzugefügt werden, das schon ein arabischer Mathematiker des 15. Jahrhunderts die Periodizität gewisser Sexagesimalbrüche beachtet hat (vgl. C. DE VAUX, Biblioth. Mathem. $\mathbf{13}_2$, 1899, S. 33—34).

S. 99. Daß das sog. „Bamberger Rechenbuch“ von 1483 nicht das älteste gedruckte deutsche Rechenbuch ist, hat der Verfasser selbst S. 15 angedeutet.

S. 100. Bei der Erwähnung der „Wälschen Praktik“ wäre es angebracht ausdrücklich zu bemerken, daß das Verfahren im Grunde nur eine Zerlegung in Stammbrüche ist, und also sehr alte Ahnen hat.

S. 131—134. Sehr auffallend sind hier die schwebenden Angaben über den Ursprung des Zeichens +, wenn man dieselben mit einem Passus auf S. V des Vorwortes vergleicht, wo die Entstehung des Pluszeichens aus *et* ohne weiteres als eine „*richtige* neuere Erklärung“ bezeichnet wird. S. 131 lesen wir nämlich, daß der Ursprung des Zeichens + im Dunkeln liegt, S. 133, daß die Annahme, das Additionskreuz sei aus einer Ligatur für *et* entstanden, näher liegt als eine andere, die der Verfasser als wenig befriedigend betrachtet, und S. 134 bemerkt der Verfasser, daß die Entstehung des + aus *et* nahezu sicher gestellt ist, fügt aber unmittelbar hinzu, daß man mit allen derartigen Erklärungsversuchen sehr vorsichtig sein muß. Aber dann ist wohl die Behauptung im Vorworte ein wenig zu modifizieren?

S. 139. Die Angabe „Bombelli, *L'Algebra*, 2. Aufl., Bologna 1579“ kann leicht irre leiten, da es eigentlich nur eine Auflage dieses Buches gibt, nämlich die vom Jahre 1572 (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 277). Der Verfassser scheint übrigens selbst unsicher zu sein, ob der Zusatz „2. Aufl.“ richtig ist, denn S. 198 setzt er ein Fragezeichen nach „2.“, S. 202 steht nur „*Algebra*, Bologna 1579“ und S. 218 schreibt er „Aufl. v. 1579 Bologna.“ Entschieden unrichtig ist die Angabe S. 325: „*l'Algebra*, Venedig 1572 (Bologna 1579)“, da keine Ausgabe in Venedig erschienen ist.

S. 140. Die Notiz über das Vorkommen von Klammern bei Girard scheint mir insofern unvollständig, als es nicht erwähnt wird, daß Girard die Klammern auch als wirkliche Multiplikationszeichen benutzt hat (siehe *L'invention nouvelle en l'algebre*, Bl. C_3^v, D_3^r, F_4^v).

S. 141. Daß Johann Bernoulli nicht das Zeichen Δ als Differenzenzeichen angewendet hat, habe ich in der Biblioth. Mathem. 10_2, 1896, S. 21 nachgewiesen (vgl. Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* 3^2 [1901], S. 457).

S. 163. Das Wort *surdus* ist schon vor Leonardo Pisano vom Gherardo Cremonese benutzt worden (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 516).

S. 166. Die Angabe, daß Descartes einem und demselben Buchstaben bald einen positiven, bald einen negativen Wert verlieh, ist, so weit bekannt, unrichtig, und erst bei Hudde (1658) ist ein solches Verfahren angetroffen (vgl. oben S. 208).

S. 169. Daß Chuquet die Kenntnis der Unmöglichkeit von $\sqrt{-a}$ besaß, dürfte lediglich eine Mutmaßung sein, denn der Verweis in Anm. 663 bezieht sich auf eine Randnote, die *nicht* von Chuquet herrührt.

S. 172—173. Es ist richtig, daß Euler schon 1740 auf einen Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der Funktion e^x gestoßen war, aber den wirklichen Beweis hierfür gibt nicht der von Herrn Tropfke in Anm. 681 zitierte Band der Comment. acad. Patrop., da dieser Band erst 1750 erschien, sondern ein Brief von Euler an Johann Bernoulli vom 18. Oktober 1740, wo die Formel

$$2 \cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

ausdrücklich angegeben wird (vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 11_2, 1897, S. 48).

S. 188. Da bei LEONARDO PISANO die Unbekannte auch *causa* genannt wird (vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 13_2, 1899, S. 50), könnte man wohl ebensogut sagen, daß *cosa* die italienische Übersetzung dieses Wortes ist.

S. 201. Daß EULER zum erstenmal 1741, in einem Briefe an GOLDBACH vom 9. Dezember, zu imaginären Exponenten schritt, ist nach der obenstehenden Bemerkung zur Seite 172 zu modifizieren. — Daß LEIBNIZ schon vor JOHANN BERNOULLI (1694) das Thema der Exponentialfunktion angegriffen hatte, geht aus dem hervor, was LEIBNIZ auf den Brief JOHANN BERNOULLIS vom 9. Mai 1694 antwortete; in der Tat hatte LEIBNIZ 15 Jahre früher in einem Briefe an HUYGENS die Gleichungen $x^z + z^x = b$, $x^x + z^z = c$, $x^x - x = 24$ erwähnt (vgl. *Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern, herausg. von* C. I. GERHARDT I [1899], S. 568).

S. 205—206. Die Angaben über Rechnen mit gebrochenen Exponenten stimmen nicht gut überein. S. 205 behauptet der Verfasser, daß der Übergang zum Rechnen mit negativen und gebrochenen Exponenten mit dem Ende des fünfzehnten Jahrhunderts begonnen war, aber S. 206 bemerkt er richtig, daß das Rechnen mit gebrochenen Exponenten schon im vierzehnten Jahrhundert eine ziemlich hohe Stufe der Ausbildung aufzuweisen hatte. Daß der *Algorismus proportionum* des ORESME keinen „Einfluß auf die spätere Entwickelung der Potenzlehre" hatte, kann ja möglicherweise wahr sein, aber eben dasselbe gilt wohl auch vom *Triparty* des CHUQUET.

S. 210. Bei Erwähnung des Wurzelausziehens durch Anhängen einer Anzahl von Nullen, wäre es vielleicht angebracht zu bemerken, daß diese Methode prinzipiell schon von den drei Brüdern (um 850) benutzt wurde; der Unterschied ist nur, daß bei diesen nicht das Dezimalsystem, sondern das Sexagesimalsystem verwendet wird (vgl. C. DE VAUX, Biblioth. Mathem. 12_2, 1898, S. 1; SUTER, Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 271).

S. 216. Für die Aufklärung der hier erwähnten Bezeichnung gewisser Wurzeln durch eine Anzahl von Punkten sei auf die Bemerkung von M. CURTZE in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 505 verwiesen.

S. 228. Die Formel

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

kannten die Mathematiker im christlichen Mittelalter schon drei Jahrhunderte vor CHUQUET (vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 238).

S. 236. Es ist mir nicht klar, warum der Verfasser, in betreff der Berechnung des vierten Gliedes einer Proportion aus den drei anderen, unter den christlichen Verfassern vor PEUERBACH nur JORDANUS NEMORARIUS nennt; diese Berechnung, sofern sie in arithmetischer Form auftritt, ist ja nichts anderes als die Regeldetri, und der Verfasser weiß (vgl. S. 99), daß die Regeldetri auch bei LEONARDO PISANO sich findet.

S. 237. Es scheint mir kaum angebracht, den Satz, daß $a : c = a^2 : b^2$ aus $a : b = b : c$ folgt, auf VIÈTE zurückzuführen. Auch wenn man nicht zugeben will, daß dieser Satz *implicite* in dem Ausdrucke λόγος διπλάσιος des EUKLEIDES (*Elementa*, V def. 9) liegt, muß man wohl damit einverstanden sein, daß er ein Spezialfall von *Elementa*, VI prop. 19, Corollarium ist. — Anm. 874 ist HULTSCH Schreibfehler für HUNRATH.

S. 239. Die Schreibart $a:b::c:d$, die Herr TROPFKE erst bei CAGNOLI (1786) gefunden zu haben scheint, kommt nach W. BEMAN (L'interméd. d. mathém. 9, 1902, S. 220) schon bei OUGHTRED (1657) vor.

S. 245. Daß auch NEPER in seiner vielleicht vor 1594 verfaßten *Algebra* vielfach Gleichungen, die auf Null gebracht sind, anwendet, habe ich in der Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 145 bemerkt.

S. 275. ANNIBALE DELLA NAVE war nur bis 1558 Lehrer der Mathematik in Bologna (vgl. FAVARO, Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 354).

S. 303. Daß die *Algebra* des J. H. RAHN nichts über die sogenannte PELLsche Gleichung enthält, und daß PELL überhaupt nichts mit dieser Gleichung zu tun gehabt hat, dürfte jetzt als allgemein bekannt betrachtet werden können (vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 204—207).

S. 306. Für die Unmöglichkeit der Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ gab schon FRENICLE DE BESSY einen Beweis (vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 88—89).

Von den nicht besonders zahlreichen Druckfehlern, die ich im Vorübergehen notiert habe, bemerke ich nur die auf S. 159: „PYTHAGORAS (sechstes Jahrhundert *n.* Chr.)".

Ich habe einleitungsweise erwähnt, daß das Buch des Herrn TROPFKE auch dem Fachmanne hier und da etwas neues bietet. Für mich persönlich war es interessant aus S. 200 zu erfahren, daß schon in einer 1634 (also vor DESCARTES' *Géométrie*) erschienenen Arbeit die Bezeichnungen $a\,2$, $a\,3$, $a\,4$ für a^2, a^3, a^4 vorkommen. Im L'interméd. des mathém. (2, 1895, S. 181) hat P. TANNERY eine Anfrage über diese Bezeichnungsart veröffentlicht, und ich hatte daselbst (4, 1897, S. 60) auf eine Anwendung derselben in einer schwedischen mathematischen Schrift aus dem 17. Jahrhundert hingewiesen, daß aber die Zeichen $a\,2$, $a\,3$, $a\,4$ schon vor DESCARTES auftreten, dürfte bisher nicht beachtet worden sein. Wahrscheinlich kannte DESCARTES HÉRIGONES *Cours mathematique*, und die Einführung der Exponentialbezeichnung repräsentiert also keinen so großen Fortschritt als man bisher angenommen hatte; in der Tat könnte die von HÉRIGONE vorgeschlagene Bezeichnungsart fast dasselbe wie die DESCARTESsche geleistet haben.

Fasse ich mein Urteil über den ersten Band der *Geschichte der Elementar-Mathematik* des Herrn TROPFKE zusammen, so kann ich sagen, daß es nach dem Erscheinen des Sachregisters ein empfehlenswertes Nachschlagebuch für diejenigen werden soll, die sich für historische Mathematik interessieren, und daß die hinzugefügte kleine mathematisch-historische Chrestomathie als sehr nützlich bezeichnet werden muß. Eine wirkliche Entwickelungsgeschichte der Elementarmathematik bringt die Arbeit dagegen eigentlich nicht, der Verfasser hat jedoch auch nicht beabsichtigt, den Lesern eine solche zu bieten.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffande Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8⁰. [1
16 : 1 (1903).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2
4_3 (1903) : 1.

Eneström, G., Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik. [3
Bibliotb. Mathem. 4_3, 1903, 1—6.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Bibliotb. Mathem. 4_3, 1903, 87—89. (Ch. Lambo, G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Bibliotb. Mathem. 4_3, 1903, 89—90. (G. Eneström.) [4

Gambioli, D., Breve sommario della storia delle matematiche (1902). [Rezension:] Bibliotb. Mathem. 4_3, 1903, 94—95. (G. Eneström.) [5

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik. 1 (1902). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 179—180. (E. Lampe.) [6

Versluys, J., Beknopte geschiedenis der wiskunde (1902). [Rezension:] Bibliotb. Mathem. 4_3, 1903, 92—94. (G. Eneström.) [7

Ball, W. W. R., Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese con note, aggiunte e modificazioni di D. Gambioli e G. Puliti, riveduta e corretta da G. Loria. Primo volume. Le matematiche dall' antichità al rinascimento. Bologna, Zanichelli 1903. [8
8⁰, (3) + X + (1) + 284 S. — [8 lire.]

Miller, G. A., Some fundamental discoveries in mathematics. [9
Science 17_3, 1903, 496—499.

Konen, H., Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ (1901). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 47—51. (P. Tannery.) [10

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte (1902). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 606—609. (H. Bosmans.) — Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 92—97. (J. T.) [11

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 237—238. [12

***Burckhardt, F.,** Zur Geschichte des Thermometers. Basel 1902. [13
4⁰, 32 S. — Programm.

b) Geschichte des Altertums.

***Müller, A.,** L'arte gnomonica e la sacra scrittura. Studio apologetico sull' orologio di Achaz. [14
Roma, Accad. d. N. Lincei, Memoria 18, 1901, 69—110.

Fazzari, G., Il problema „de bovino“ attribuito ad Archimede. [15
Il Pitagora 9, 1903, 94—97.

Vaux, C. de, Le livre des appareils pneumatiques et des machines hydrauliques par Philon de Byzance. Edité d'après les versions arabes d'Oxford et de Constantinople et traduit en français. [16
Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques 38, 1902. 211 S.

Schmidt, W., Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertume. [17
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 7—12.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. Vol. III (1903). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 87—92. (P. Tannery.) [18

Boll, Fr., Sphaera. Neue griechische Texte und Untersuchungen zur Geschichte der Sternbilder. Leipzig, Teubner 1903. [19
8°, XII + 564 S. + 6 Taf. — [24 ℳ.] — [Rezension:] Nature 67, 1903, 481—483. (W. R. Fischer.)

Rudio, F., Zur Rehabilitation des Simplicius. [20
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 13—18.

c) Geschichte des Mittelalters.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance (1902). [Rezension:] Götting. gelehrte Anz. 1903, 46—50. (A. von Braunmühl.) — *New York,* Americ. mathem. soc., Bullet. 9_2, 1903, 376—381. (D. E. Smith.) [21

Suter, H., Über einige noch nicht sicher gestellte Autorennamen in den Übersetzungen des Gerhard von Cremona. [22
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 19—27.

Eneström, G., Ist Johannes Widman Verfasser der „Dresdener Algebra"? [23
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 90. — Anfrage.

d) Geschichte der neueren Zeit.

***Geiger, K.,** Eine neue Lösung und Geschichte der Aufgabe: Ein Sehnenviereck aus seinen Seiten zu konstruieren. Landshut 1901. [24
8°, 38 S. + 9 Taf. — Programm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 152—153. (H. Wieleitner.)

Tonni-Bazza, V., Di una lettera inedita di Nicolò Tartaglia. [25
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 10_5:2, 1901, 39—42.

Bosmans, H., La nouvelle édition des pièces du procès de Galilée par A. Favaro. [26
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 3_3, 1903, 578—598.

Klug, J., Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten bei Galilei (1900). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 151—152. (H. Wieleitner.) [27

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. VII. Giovanni Ciampoli. VIII. Giovanfrancesco Sagredo. [28
Venezia, Istituto Veneto, Atti 62:2, 1902, 91—145. — Nuovo archivio Veneto 4_2:2, 1902. 132 S.

Favaro, A., Serie decimaterza di scampoli Galileiani. [29
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie 19. 1903, 57—81.

***Ricci-Riccardi, A.,** Galileo Galilei e Fra Tommaso Caccini. Il processo di Galileo nel 1616 e l'abiura segreta rivelata dalle carte Caccini. Firenze, Le Monnier 1902. [30
8°, XV + 280 S. — [Rezension:] Archivio storico italiano 31_5, 1903. 15 S. (A. Favaro.)

Oudemans, J. A. C., et **Bosscha, J.,** Galilée et Marius. [31
Arch. néerl. d. sc. exactes 8_2, 1903, 115—189 + 1 Taf.

***Müller, Adolph,** Johann Keppler, der Gesetzgeber der neueren Astronomie. Freiburg i. B., Herder 1903. [32
8°, VIII + 186 S. — [2,40 ℳ.] — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 617—618.

Bosmans, H., Sur les „Theses de cometis" (1619) de Grégoire de Saint-Vincent. [33
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 90. — Anfrage.

Maupin, G., Opinions et curiosités touchant la mathématique. II (1902). [Rezension:] Revue semestr. d. public. mathém. 11:1, 1903, 173. (G. Mannoury.) [34

Wallner, C. R., Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis. [35
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 28—47.

***Du Boberil, R.,** Pascal et Riemann. Paris, Dubois 1902. [36
8°, 22 S.

Stäckel, P., Über die Geschichte der Terme Binom, Polynom usw. [37
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 91. — Anfrage.

Loria, G., Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare. [38
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 48—51.

Lorey, W., Newtons Grabdenkmal in der Westminster-Abbey. [39
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 181—182.

Lefebvre, B., Sur John Wilson. [40
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 91. — Antwort auf eine Anfrage.

Pfennig, R., Wer hat zuerst die Analysis von der Metaphysik emancipiert? [41
Beiträge zur Bücherkunde und Philosophie (Leipzig, Harrassowitz 1903), 499—514. — Über die Verdienste Lagranges und Arbogasts um die Prinzipien der höheren Analysis.

d'Adhémar, R., L'œuvre mathématique du XIXe siècle. [42
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_2, 1901, 177—218.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten dentschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Erster Teil; Reine Mathematik. [43
Abh. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **16**:1, 1903. XXXVI + 416 S. — [14 *M*.]

***Jecklin, L.,** Historisch-kritische Untersuchung über die Theorie der hypergeometrischen Reihe bis zn den Entdeckungen von E. E. Kummer. Bern 1901. [44
8°, 87 S.

Gauss, C. F., Werke. Band VIII (1900). [Recension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{9}_2$, 1903, 357—369. (J. Pierpont.) [45

Klein, F., Über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Fünfter Bericht. [46
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1902; Geschäftl. Mitt. 10—18. — [Wieder abgedruckt:] Mathem. Ann. **57**, 1903, 35—43.

Klein, F., Gauß' wissenschaftliches Tagebnch 1796—1814. Mit Anmerkungen herausgegeben. [47
Mathem. Ann. **57**, 1903, 1—34 + Facsim. — Abgedruckt aus der Festschrift der Gesellschaft der Wissenschaften zn Göttingen 1901 (Siehe Biblioth. Mathem. 3_3 1902, 156). — [Recension:] Deutsche Litteraturz. **24**, 1903, 928.

Schlesinger L., Johann Bolyai. Festrede, gehalten bei der von der königl. ungarischen Franz-Josefs-Universität veranstalteten Bolyai-Feier am 15. Januar 1903. [48
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **12**, 1903, 165—194.

Ein Brief von Niels Henrik Abel an Edmund Jacob Külp. [49
Journ. für Mathem. 125, 1903, 237—240.

Jahnke, E., Brief von Leverrier an Jacobi. Brief von Liouville an Jacobi. [50
Arch. der Mathem. 5_3, 1903, 37—41.

Pexider, J. V., Übersicht über die Literatur des Abelschen Theorems. [51
Biblioth. Mathem. 4_3. 1903, 52—64.

Vincent, J., Aperçu de l'histoire de la météorologie en Belgique. III. [52
Bruxelles, Observatoire, Annuaire météorologique 1903, 61—154.

Muir, Th., Historical note in regard to determinants. [53
Nature **67**, 1903, 512.

Wassilief, A. und Delaunay, N., P. L. Tschebyschef (1900). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **34**, 1903, 142. (H. Liebmann.) [54

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz. Zweiter, dritter Band. Braunschweig, Vieweg 1903. [55
8°, XIV + 383 S. + 2 Porträts; IX + (1) + 142 S. + 4 Porträts + Facsim. — [8 + 4 *M*.] — [Rezension des 1. Bandes:] Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 113. (J. Bernstein.)

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Band 4 (1902—1903). [Rezension der Hefte 1—7:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 95—101. (G. Eneström.) [56

***Maillet, E.,** Notice sur les travaux scientifiques de M. E. Maillet. Paris 1901. [57
4°, 16 S.

e) Nekrologe.

Eugenio **Beltrami** (1835—1900). [58
Mathem. Ann. **57**, 1903, 65—107 [mit Schriftverzeichnis]. (Deutsche Übersetzung des Nekrologes von E. Pascal in den Rendiconti dell' istituto Lombardo, mit Zusätzen von A. Korn.) — The americ. mathem. monthly **9**, 1902. (G. B. Halsted.)

Ferdinand **Caspary** (1853—1901). [59
Jahnke, E., *Nachruf auf Ferdinand Caspary*. Leipzig, Teubner 1903. 8°, 30 S. + Porträt. — Zum Teil Sonderabdruck aus dem Arch. der Mathem. — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 617. — Boliett. di bibliogr. d. sc. matem. **6**, 1903, 62—63.

Maximilian **Curtze** (1837—1903). [60
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 65—81 [mit Porträt und Schriftenverzeichnis]. (S. Günther.)

Hermann **Dobriner** (1857—1902). [61
Zeitschr. für mathem. Unterr. **34**, 1903, 179—180 [mit Porträt]. (C. H. Müller.)

Ernest **Duporcq** (1873?—1903). [62
Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_4$, 1903, 97—98. (C. A. Laisant.)

Hervé **Faye** (1814—1902). [63
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. $\mathbf{3}_3$, 1903, 353—403. (J. Thirion.)

Norman Macleod **Ferrers** (1829—1903). [64
Science 17_2, 1903, 318.

Matteo **Fiorini** (1827—1901). [65
Bologna, Scuola d'applicazione per gli ingegneri, Annuario 1902/1903. 19 S. (F. Cavani.)

James **Glaisher** (1809—1903). [66
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{9}_2$, 1903, 331.

Achille **Goulard** (1860—1902). [67
L'enseignement mathém. **5**, 1903, 132.

Sophus **Lie** (1842—1899). [68
Giorn. di matem. $\mathbf{9}_2$, 1902, 325—363. (Übersetzung von U. Amaldi des Nekrologes von F. Engel in den Berichten der sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1900.)

W. J. C. **Miller** (1831—1903). [69
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{9}_2$, 1903, 387.

George Gabriel **Stokes** (1819—1903). [70
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $\mathbf{9}_2$, 1903, 331. — Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 217—218. (J. Stark.) — Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{3}_4$, 1903, Supplément VIII. — Science 17_2, 1903, 277—278.

f) Aktuelle Fragen.

Brodmann, C., Der internationale Katalog der naturwissenschaftlichen Literatur. [71
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 195—217.

Eneström, G., Über die Aufgaben einer mathematischen Zentralbibliothek. [72
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 82—85.

Ahrens, W., Über Aufgaben und Einrichtung eines Mathematiker-Adressbuches. [73
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 221—224.

Ahrens, W., Über die Aufgaben und zweckmässige Einrichtung eines Mathematiker-Adressbuches. [74
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 114—119.

***Alasia, Chr.,** Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo. Bergamo 1902. [75
8°, IV + 43 S. — [Rezension:] Mathesis 3_3, 1903, 69.

Schönflies, A., Zur Statistik des mathematischen Studiums. [76
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 218—221.

Schotten, H., Der Unterricht in der Mathematik. [77
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 166—179.

Congresso internazionale di scienze storiche [Roma 1903]. [78
Supplemento al Periodico di matem. 6, 1903, 96. — Über die Verhandlungen der Abteilung für Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent E. Anding in München znm Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent A. Gockel in Freiburg i. d. Schweiz zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. F. R. Moulton in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. C. A. Noble in Berkeley zum Professor der Mathematik an der „University of California" daselbst.

— Oberlehrer A. Thue in Trondhjem zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Kristiania.

Todesfälle.

— Luigi Cremona, Direktor des „Scuola d'applicazione per gli ingegneri" in Rom, geboren in Pavia den 7. Dezember 1830, gestorben in Rom den 10. Juni 1903.

— Ernest Duporcq, „ingénienr des télégraphes", Mitherausgeber der „Nouvelles annales de mathématiques", gestorhen in Paris den 1. April 1903, etwa 30 Jahre alt.

— Josiah Willard Gibbs, Professor der mathematischen Physik an der „Yale university" in New Haven, geboren in New Haven den 11. Februar 1839, gestorhen daselbst den 28. April 1903.

— Heinrich Hartl, früher Professor der Geodäsie in Wien, geboren in Brünn den 23. Januar 1840, gestorben in Wien den 4. April 1903.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— In the „summer school" 1903 of the Harvard nniversity (Cambridge, Mass.), Prof. D. E. Smith of the Columbia nniversity (New York) will delived a course of ten lectures on history of mathematics. The course will relate to the elementary branches, throngh the calcnlus, and mnch attention will he given to the hibliography of the suhject. Certain of the lectures will he illnstrated by stereopticon pictures of pages from rare and valuahle hooks and mannscripts. The historical work is presented with a view to leading stndents to consider all mathematics as in a state of evolution, and thus to estimate more intelligently the relative valnes of the topics taken np in the school.

— Prof. A. Macfarlane has delivered this year (April 20—30) at the „Leigh university" a course of six lectures on the following British mathematicians of the nineteenth century: T. P. Kirkmann, Ch. Babbage, W. Whewell, C. L. Dodgson, G. G. Stokes, Lord Raleigh.

— At the Nebraska university Prof. R. E. Moritz will deliver dnring the snmmer session 1903 a course on the history of mathematics.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Acadèmie de sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours pour l'année 1904. Indiquer les conditions nécessaires et suffisantes de la décomposition de deux polyèdres en nn nombre fini de parties congruentes deux par denx, ou hien apporter une contrihntion à la solution de ce prohlème général en donnant au moins les conditions pour le cas où l'un des solides est un polyèdre convexe et l'autre un cnhe. On devra anssi indiqner expressément qnelles sont les pyramides qui satisfont aux conditions tronvées.

— *Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig.* Preisfrage für das Jahr 1906. Eine

Untersuchung der den Bernoullischen Zahlen analogen Zahlen, namentlich im Gebiete der elliptischen Funktionen, welche die komplexe Multiplikation zulassen.

Vermischtes.

— In betreff des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, sind u. a. folgende Beschlüsse gefaßt. Es werden 6 Sektionen gebildet werden, nämlich für Arithmetik und Algebra, Analysis, Geometrie, Angewandte Mathematik, Geschichte der Mathematik, Pädagogik. Als Einführende für die 5. Sektion (Geschichte der Mathematik) sind die Herren M. Cantor und P. Stäckel gewählt. — Die Teilnehmer des Kongresses bezahlen gegen Aushändigung einer „Hauptkarte“ einen Beitrag von 20 Mark. — Die Tagesordnung des Kongresses umfaßt drei allgemeine Sitzungen (9., 11., 13. August), eine Geschäftssitzung (13. August), sowie Sektionssitzungen und freie gesellige Vereinigungen. Mit dem Kongresse wird auch eine Ausstellung der wichtigeren mathematischen Literatur der 10 letzten Jahre verbunden werden, und die Herren A. Gutzmer und A. Krazer sind damit beauftragt worden. — Die badische Regierung hat einen Zuschuß von 3000 Mark in Aussicht gestellt.

— Die Sektion für Geschichte der Wissenschaften an dem internationalen historischen Kongreß in Rom 1903 beschloß, eine internationale Kommission zur Vorbereitung eines Kongresses für Geschichte der Wissenschaften zu bilden. Präsident der Kommission ist Herr Paul Tannery und Schriftführer Herr G. Loria. Der Kongreß wird September 1906 in Berlin gehalten werden.

Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

Im zweiten Bande der dritten Folge der **Bibliotheca Mathematica** habe ich eine Reihe von Artikeln begonnen, die sich auf die Methodologie der mathematischen Geschichtsschreibung bezieht, und die auch in den folgenden Bänden fortgesetzt werden soll. Der dritte dieser Artikel hat Herrn Cantor zu einigen Bemerkungen veranlaßt, die im vorigen Hefte znm Abdruck gelangten. Durch diese Bemerkungen habe ich meinerseits einen willkommenen Anlaß bekommen, um meine Stellung in betreff gewisser Fragen, die ich bisher gar nicht oder wenigstens nur flüchtig berührt habe, zu präzisieren; im Anschluß hierzu werde ich mir auch erlauben, mich über ein paar Punkte zu äußern, wo Herr Cantor mich mißverstanden zu haben scheint.

Nach einer ziemlich ausführlichen Motivierung stellt Herr Cantor die zwei Sätze auf: 1. Das höchste erreichbare Ziel bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik ist nur, daß schon vorhandene Leistungen durch das neu Gebotene übertroffen werden; 2. Jeder kann nnr so schreiben, wie seine Individnalität es mit sich bringt. Mit diesen zwei Sätzen hätte ich mich wohl einverstanden erklären können, wenn Herr Cantor sie nur im Vorübergehen erwähnt hatte, ohne auf dieselben größeres Gewicht zu legen; ich kann ihnen nämlich sehr leicht einen solchen Sinn geben, daß sie fast selbstverständlich werden. Aber gerade aus dem Umstande, daß Herr Cantor die Sätze besonders hervorhebt, scheint es mir klar zu sein, daß hier ein wesentlicher Meinnngsnnterschied zwischen ihm und mir sich vorfindet. In der Tat kann ich nicht umhin anzunehmen, daß das Wort „übertreffen“ auf einen gleichmäßigen stufenartigen Fortschritt der mathematischen Geschichtsschreibung hindeutet, und daß Herr Cantor diese Geschichtsschreibung wesentlich als eine Wirksamkeit ästhetischer Art, also ihr Resultat gewissermaßen als ein Knnstwerk, das keinen äußeren Zweck hat, betrachtet. Ist nämlich dieser Gesichtspunkt

richtig, so mnß man gewiß die Fachgenossen auffordern, in erster Linie die schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik zu studieren, dann zu nntersuchen, an welchen Pnnkten es ihnen angebracht zn sein scheint, die bessernde Hand anzulegen, und endlich zur Ausführung des Werkes zu schreiten, wie die Begabung es fordert. Bloße Ratschläge sind dagegen von zweifelhaftem Nutzen, da es auf einem Zufall beruht, ob sie für die Individualität einer bestimmten Persönlichkeit passen.

Von dieser Betrachtungsweise mnß ich aber für meinen Teil Abstand nehmen. Vor fünfzig Jahren, da die Zahl der mathematisch-historischen Forscher sehr gering, und das Interesse der Mathematiker für diese Forschungsart fast gleich Null war, so daß die Verfasser auf dem fraglichen Gebiete eigentlich kein Publikum, sondern nur einzelne Leser hatten, war es vielleicht ziemlich gleichgültig, welchen Zweck die mathematisch-historischen Arbeiten verfolgten; in fünfzig Jahren, da wir voraussichtlich eine hinreichende Anzahl vorzüglicher Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik besitzen werden, wird es vielleicht keinen Übelstand mit sich bringen, wenn man die Ansicht zn verbreiten sucht, daß der Verfasser einer nenen Darstellung dieser Art ohne weiteres so schreiben soll, wie seine Begabung (oder vielmehr das, was er als seine Begabung betrachtet) es fordert. Gegenwärtig aber möchte ich einen Versuch in dieser Richtung als inopportun bezeichnen, denn meines Erachtens ist es von Belang, daß man jetzt bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik einen ganz besonderen Zweck verfolgt, nämlich eine rein fachmäßige Darstellung der Entwickelung der Mathematik[1]) zu geben. Um aber dies zu erzielen, müssen natürlich für die mathematisch-historische Verfasserwirksamkeit gewisse Normen aufgestellt werden.

Aber wie geht es in diesem Falle mit dem Rechte der Individualität, auf das Herr Cantor so großes Gewicht legt? Bei der Beantwortung dieser Frage will ich zuerst ausdrücklich betonen, daß für die Verfasser auf dem mathematisch-historischen Gebiete die Individualität meiner Ansicht nach im allgemeinen nicht eine so große Rolle spielt, wie Herr Cantor anzunehmen scheint, und daß die Eigentümlichkeiten, die sich wirklich in ihren Schriften vorfinden, nicht immer von ihrer besonderen Begabung, sondern oft von zufälligen Umständen bei der Bearbeitung dieser Schriften abhängen. Hier nur einige Belege für die Richtigkeit meiner Ansicht! Wenn A. G. Kästner nicht als achtzigjähriger Greis, sondern viel früher sich vorgenommen hatte, eine *Geschichte der Mathematik* zu veröffentlichen,

1) Über die Bedeutung dieses Ausdruckes, siehe Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 5—6.



so hätte er ohne Zweifel etwas viel besseres leisten können. — Wenn A. Arneth für seine *Geschichte der reinen Mathematik* nicht nur etwa 300 Druckseiten, sondern wenigstens das Doppelte zur Verfügung gehabt hatte, so würde er wahrscheinlich die Geschichte der modernen Mathematik eingehender behandelt haben; ja, ich gehe noch einen Schritt weiter und behaupte, daß es nicht seine besondere Begabung war, die ihn veranlaßte, über den ihm zur Verfügung gestellten Raum so unzweckmäßig zu Gunsten der Geschichte der älteren Mathematik zu verfügen. — Wenn ein noch lebender hervorragender Fachgenosse, dessen Namen hier zu nennen überflüssig sein dürfte, schon als Vierzigjähriger Gelegenheit gehabt hatte, die Geschichte der Mathematik 1700—1758 zu bearbeiten, so würden wir meiner Überzeugung nach jetzt eine weniger fragmentarische Darstellung der Geschichte dieses Zeitraumes besitzen, denn aus seinen übrigen Schriften bekommt man gar nicht den Eindruck, daß fragmentarische Darstellungen seiner besonderen Begabung entsprechen.

Auf der anderen Seite muß ich zugestehen, daß es wirklich Forscher auf dem mathematisch-historischen Gebiete gibt, die kaum als Mitarbeiter an einer rein fachmäßigen Darstellung der Geschichte der Mathematik passen, und hier bietet sich also die Frage dar, ob die Begabung dieser Forscher auf irgend eine Weise für den oben angegebenen Zweck verwendet werden kann, oder ob man meiner Ansicht nach dieselben bewegen sollte, sich anderen Arbeiten zu widmen. In Bezug hierauf muß ich vor allem hervorheben, daß sich meine bisherigen Auseinandersetzungen eigentlich auf eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik und auf Untersuchungen, die direkt für eine solche Gesamtdarstellung benutzt werden können, beziehen. Ich habe aber in einem früheren Artikel[1]) auf die Bedeutung, die literarische Einzeluntersuchungen als Material für die Entwickelungsgeschichte haben können, hingewiesen, und auch für Forscher, die sich ausschließlich mit bibliographischen, biographischen und rein literarischen Untersuchungen oder mit Veröffentlichung bisher ungedruckter Schriften älterer Mathematiker beschäftigen können, gibt es gewiß auf dem mathematisch-historischen Gebiete Arbeit genug; ich habe ja selbst in der Bibliotheca Mathematica eine große Anzahl kürzerer oder längerer Artikel dieser Art veröffentlicht. Nur möchte ich jungen Fachgenossen dringend empfehlen, sich nicht auf literarische Forschungen zu beschränken, bevor sie genau konstatiert haben, daß sie nichts anderes leisten können.

Aber es ist natürlich nicht in erster Linie das Recht der literarischen Forscher, das Herr Cantor verteidigen will, sondern sein Artikel ist

1) Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 2.

15*

offenbar eine *oratio pro domo* eines Kulturhistorikers, und obgleich ich schon im Leitartikel dieses Bandes meine Ansichten über den Wert der kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik auseinandergesetzt habe,[1]) so scheint es mir angebracht, noch einmal nnter besonderer Bezugnahme auf die Cantorschen Bemerkungen auf diese Frage zurückzukommen.

In seinem Artikel unterscheidet Herr Cantor zwei Arten, nach welchen Geschichte der Mathematik behandelt werden können, nämlich Geschichte der *Mathematik* und *Geschichte* der Mathematik. Was er Geschichte der *Mathematik* nennt, entspricht zunächst Entdeckungsgeschichte nach meiner Terminologie, aber aus seiner Erläuterung der Benennung scheint hervorzugehen, daß darin auch einbezogen werden kann, was ich unter „fachmäßiger Entwickelungsgeschichte“ verstehe. Jedenfalls handelt es sich hier um eine Behandlungsweise, die entweder gar nicht oder nur nebenbei kulturhistorisch ist. Dagegen dürfte der Cantorsche Term „*Geschichte* der Mathematik“ ziemlich nahe mit dem zusammenfallen, was ich „eigentlich kulturhistorische Darstellung“ nenne, und die Weise, wie Herr Cantor diese Darstellungsart charakterisiert, muß also näher untersucht werden.

„In der *Geschichte* der Mathematik“, bemerkt Herr Cantor, „liefert die Mathematik zwar das gesamte Material, aber dessen Benutzung soll nicht ausschließlich der Mathematik zugute kommen. Das Bild des gesamten Kulturlebens dient als Hintergrund, von welchem mathematische Charakterzüge sich hell abheben und selbst dazu dienen, jenen Hintergrund zu erhellen“. Schon aus dieser Charakteristik der fraglichen Darstellungsart sieht man ein, daß dieselbe sich nicht mit einem eingehenden Bericht über die Entwickelung sämtlicher mathematischer Theorien beschäftigen kann, denn ein solcher Bericht ist zum großen Teil nur für den Mathe-

1) In einem Falle scheint Herr Cantor mich mißverstanden zu haben. Am Anfange des Artikels wies ich daranf hin, daß von einem höheren Gesichtspunkte aus die fachmäßige Darstellnng der Geschichte der Mathematik in eine kulturhistorische übergeht, daß aber eine *solche* kulturhistorische Darstellung für uns ein unerreichbares Ideal ist. Herr Cantor pflichtet mir darin bei, daß eine ideale Geschichte der Mathematik noch nicht geschrieben ist, aber aus dem, was er hinzufügt, geht hervor, daß er meine Meinung nicht ganz richtig aufgefaßt haben dürfte. In der Tat ist *die* kulturhistorische Darstellung, von der ich hier sprach, derart, daß sie jetzt nicht einmal *erstrebt* werden kann, denn sie setzt eine vollständige Kenntnis des Zusammenhanges zwischen den geistigen Vermögen der Menschen voraus, und weder Herr Cantor noch irgend ein anderer Fachgenosse hat einen Versuch machen können, eine solche Darstellung zu liefern. Die Bemerkung des Herrn Cantor, daß die Arbeiten über Geschichte der Mathematik von dem Erstrebten fern geblieben sind und wohl auch fern bleiben müssen, hat also mit dem, was ich gesagt habe, nichts zu tun.

matiker verständlich, oder mit anderen Worten er kommt eigentlich nur der Mathematik zugute, und überdies haben die modernen mathematischen Theorien so geringen Zusammenhang mit dem modernen Kulturleben, daß sie nur ausnahmsweise dazu dienen können, dasselbe zu erhellen. In der Tat gibt Herr CANTOR auch am Ende seines Artikels ausdrücklich zu, die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik verschwinde mehr und mehr, je mehr man der Neuzeit näher rücke.

Aus der CANTORschen Bemerkung kann man auch ersehen, daß der Zweck der kulturhistorischen Darstellung wesentlich ein anderer als der der rein fachmäßigen sein muß, und dies geht noch deutlicher aus dem folgenden Zitate aus den *Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker* hervor, das Herr CANTOR sein wissenschaftliches Programm nennt: „Wenn bei Völkerschaften eine Ähnlichkeit auf diesem oder jenem Gebiete der Geistesentwickelung stattfindet, so ist dies meistens kein bloßer Zufall, sondern die Folge von gegenseitiger Einwirkung oder gemeinsamem Ursprunge." Eine Hauptaufgabe der kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik ist also, zu ermitteln, auf welche Weise sich die mathematischen Kenntnisse unter die verschiedenen Völker verbreitet haben, aber diese Frage hat für die rein fachmäßige Darstellung der älteren Mathematik nur untergeordnete, hinsichtlich der modernen Mathematik sogar keine Bedeutung.

Wenn also gerade der Zweck, den die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik verfolgt, für die Schilderung der Entwickelung der mathematischen Theorien so wenig Bedeutung hat,[1]) so dürfte daraus unmittelbar folgen, daß die Hauptresultate jener Behandlung für die rein fachmäßige Darstellung kaum benutzt werden können, auch wenn die Zuverlässigkeit dieser Resultate unstreitig wäre, was gewiß nicht immer der Fall ist, da die fraglichen Resultate oft auf unsicheren Hypothesen oder ungenügenden Beweisführungen gegründet werden müssen. Dagegen kann natürlich die Beschäftigung mit gewissen mathematisch-kulturhistorischen Problemen zu Untersuchungen veranlassen, die wertvolles mathematisch-literarisches Material an den Tag bringen. Wenn also ein Forscher, dessen Begabung entschieden darauf hinweist, daß er nur als Kulturhistoriker wirken kann, imstande ist, so verdienstvolle Einzeluntersuchungen auszuführen, wie die in den *Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker* vorkommenden, so werde ich der letzte sein, ihm davon abraten zu wollen.

1) Dagegen leugne ich natürlich nicht, daß kulturhistorische Darstellungen der Entwickelung der Mathematik einen großen Wert für die allgemeine Kulturgeschichte haben können und wirklich gehabt haben, ebenso wie mathematisch-literarische Arbeiten zuweilen sehr wertvolle Beiträge zur allgemeinen Literargeschichte liefern können.

Ich habe mir erlaubt mit dem Worte „inopportun“ die Ansicht zu bezeichnen, daß ein Verfasser auf dem mathematisch-historischen Gebiete ohne weiteres so schreiben soll, wie seine Individualität es zu fordern scheint, und ich dachte dabei an die Wichtigkeit, gegenwärtig alle geeigneten Kräfte in Anspruch zu nehmen, um auf eine rein fachmäßige Darstellung der Geschichte der Mathematik hinzuarbeiten — denn daß dies das Ziel der mathematisch-historischen Forschung sein soll, ist für mich ein Axiom. Daß die fragliche Ansicht, wenn sie verbreitet wird, die Herstellung dieser Geschichte direkt verzögern muß, dürfte unmittelbar klar sein, denn einige Fachgenossen, deren Mitwirken wünschenswert ist, werden dadurch bewogen werden, sich mit solchen Untersuchungen zu beschäftigen, die ihnen am nächsten liegen, unbekümmert darum, ob der Gegenstand dieser Untersuchungen vielleicht auch der Mühe wert ist, die sie darauf verwenden. Aber auch indirekt kann die Ansicht meines Erachtens für die mathematisch-historische Forschung schädlich werden. Hebt man nämlich kräftig hervor, daß diese Forschung einen ganz bestimmten Zweck hat, und zwar einen solchen, der in erster Linie für die Mathematik von Belang ist, so kann man dadurch junge Mathematiker bewegen, sich mathematisch-historischen Untersuchungen zu widmen; auf diese Weise wird es mehr und mehr bekannt werden, daß Geschichte der Mathematik wirklich eine mathematische Disziplin ist, und die Arbeiter auf diesem Gebiete werden dadurch die gebührende Anerkennung von der Seite der Mathematiker bekommen. Verbreitet sich dagegen die Ansicht, daß die Individualität eines mathematisch-historischen Forschers in erster Linie für seine Verfasserwirksamkeit maßgebend sein soll, und wird dazu behauptet, daß die eigentliche *Geschichte* der Mathematik zur Aufgabe hat, die mathematischen Charakterzüge des gesamten Kulturlebens darzulegen und dasselbe dadurch zu erhellen, so ist zu fürchten, daß wenige Mathematiker sich mit historischen Forschungen beschäftigen werden, und daß bei Bewerbung um eine Stelle, für welche herausgegebene Schriften auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften in erster Linie meritierend sind, mathematisch-historische Abhandlungen, auch wenn sie wirklich wertvoll sind, kaum in Betracht kommen werden. Natürlich wird dieser Umstand noch mehr dazu beitragen, junge Fachgenossen von historischen Studien abzuschrecken. Ich will nicht in Abrede stellen, daß durch Betonung der kulturhistorischen Bedeutung der Geschichte der Mathematik einige Historiker und Philologen als Mitarbeiter gewonnen werden können, aber diesen Gewinn schätze ich nicht sehr hoch, da die Geschichte der *modernen* mathematischen Theorien, die ja die größte Bedeutung haben, nicht ohne eingehende mathematische Kenntnisse behandelt und noch weniger gewürdigt werden kann.

Die vorhergehenden Zeilen enthalten das Wichtigste, das ich in betreff

des CANTORschen Artikels zu bemerken gehabt habe. Es ist ja möglich, daß Herr CANTOR nicht genau die Meinung hat, die ich in seinem Artikel gefunden zu haben glaube, aber die Absicht dieser Zeilen ist, wie ich schon einleitungsweise angegeben habe, eigentlich nur meine Stellung in betreff gewisser Fragen zu präzisieren, und ich bin überzeugt, daß auch andere Leser des CANTORschen Artikels denselben Eindruck davon wie ich bekommen haben.

Nur einen Punkt, wo Herr CANTOR mich zweimal mißverstanden zu haben scheint, werde ich mir noch erlauben hier zu berühren. In betreff gewisser arithmetischer Sätze der Agrimensoren habe ich im Leitartikel dieses Bandes darauf aufmerksam gemacht, daß es bei einer rein fachmäßigen Behandlung der Geschichte der Mathematik gewiß nicht erlaubt ist, mit Herrn CANTOR zu behaupten, daß diese Sätze *natürlich* keinem Römer angehören, und daß ihr alexandrinischer Ursprung selbstverständlich ist. Ich habe hinzugefügt, aus denselben Gründen könnte man behaupten, JOHANN BOLYAI habe die nichteuklidische Geometrie nicht selbständig erfunden. In Bezug auf diese Ausstellung weist Herr CANTOR auf den Wert historischer Hypothesen hin, und teilt mit, daß er noch von der Richtigkeit der Hypothese (daß die Römer in der Mathematik nichts schufen), auf welche er seine Behauptung in betreff des Ursprunges der arithmetischen Sätze der Agrimensoren gründete, überzeugt ist. Auf die Frage über den Wert historischer Hypothesen bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik werde ich hier nicht eingehen, da ich voraussichtlich diese Frage recht bald in einem besonderen Artikel behandeln werde. Diese Frage gehört auch nicht hierher, denn ich habe gewiß nicht Herrn CANTOR bestreiten wollen, eine Hypothese aufzustellen, und dieselbe für eine folgende Argumentation zu benutzen, sondern ich beanstandete in erster Linie die meiner Ansicht nach unrichtige Form, die Herr CANTOR seiner Hypothese gegeben hatte; in der Tat kann man daraus kaum erraten, daß es sich lediglich um eine Hypothese handelt, denn solche Ausdrücke wie: „*Natürlich* keinen Römer,“ „Die Stellung der Römer *ist* eine erhaltende *gewesen*,“ „Daß sie nichts schufen, *ist allgemein anerkannt*,“ usw. deuten wohl kaum auf eine bloße Hypothese hin.

Durch meine Bemerkung über BOLYAI und die Entwickelung der nichteuklidischen Geometrie habe ich freilich versucht zu zeigen, daß die besondere Hypothese, die Herr CANTOR im fraglichen Falle aufgestellt hat, kaum als Beweismittel angewendet werden kann, da eine ähnliche, auch auf unvollständiger Induktion begründete Hypothese zu einem falschen Resultate führt, aber auch hier scheint Herr CANTOR mich ein wenig mißverstanden zu haben. Er macht nämlich darauf aufmerksam, daß JOHANN BOLYAI vielleicht mittelbar von Göttingen aus die Anregung bekommen hatte,

sich mit der Parallelentheorie zu beschäftigen, und daß er darum nicht ganz unabhängig war. Aber ich habe nicht behauptet, daß Johann Bolyai unabhängig war, sondern daß er die nichteuklidische Geometrie selbständig erfunden hat, und dies ist ja etwas ganz anderes, denn ein Mathematiker wie Johann Bolyai ist wohl nicht lediglich ein Boden, wo Gedanken anderer Mathematiker in gewissen Fällen zur Entwickelung gelangen. Für einen Kulturhistoriker, der sich mit Vorliebe der Geschichte der älteren Mathematik gewidmet hat, liegt es vielleicht nahe, die Begriffe „abhängig" und „unselbständig" zu verwechseln, und zwar aus dem Grunde, weil es sich in der Geschichte der älteren Mathematik zum großen Teil um elementare Sätze oder sehr einfache Methoden handelt. Unter solchen Umständen kann die Anregung sich mit einem bestimmten Satze oder einer bestimmten Methode zu beschäftigen, leicht einen Fingerzeig enthalten, auf welche Weise das Resultat erzielt werden soll, und man ist darum entschuldigt, wenn man den Verdacht hat, daß der abhängige anch wenigstens bis zu einem gewissen Grade unselbständig gewesen ist; zuweilen ist es sogar ebenso leicht, den Satz selbst mitzuteilen, als eine Anregung zu geben, die einschlägige Frage näher zu studieren. In betreff der modernen Mathematik ist es ganz anders, besonders wenn es sich um eine neue Theorie handelt. Hier kann ein Mathematiker sehr wohl von seinen Vorgängern abhängig sein, ohne daß man darum berechtigt ist, die Resultate seiner wissenschaftlichen Wirksamkeit als unselbständig zu bezeichnen, denn diese Resultate können einen so großen Fortschritt repräsentieren, daß die früheren spärlichen Errungenschaften auf einem gewissen Gebiete in eine wirkliche Theorie verwandelt werden. Wäre es also auch wahr — was freilich von der kompetentesten Seite bestimmt verneint wird[1]), — daß Johann Bolyai den Gedanken einer von dem Parallelensatz unabhängigen, widerspruchfreien Raumlehre von Gauss bekommen hatte, so könnte man dennoch mit Recht sein System der nichteuklidischen Geometrie als eine selbständige Entdeckung betrachten. — Herr Cantor fragt in diesem Zusammenhange: „Wer möchte zweifeln, daß fremde Keime bewußt oder unbewußt in seinem (d. h. Johann Bolyais) Geiste fruchtbringend wurden?" Hierauf antworte ich: Die ganze Frage ist meiner Ansicht nach für die fachmäßige Darstellung der Geschichte der Mathematik von untergeordneter Bedentung. Das Wichtigste ist, konstatiert zu haben, daß Johann Bolyai

1) Vgl. P. Stäckel, *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai;* Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn 17 (1899), 1901, S. 11: „Mit Sicherheit [läßt sich] schließen, daß der Gedanke einer in sich begründeten, logisch widerspruchfreien Raumlehre, die unabhängig von dem elften Axiom gilt, nicht etwa von Gauss aus durch Vermittelung von Wolfgang auf Johann übertragen, sondern von Johann Bolyai selbständig gefunden worden ist".

eine Theorie der nichteuklidischen Geometrie ausgebildet hat, bevor er von den Untersuchungen anderer Mathematiker auf diesem Gebiete Kenntnis bekommen hatte. Der Umstand, daß JOHANN BOLYAI ursprünglich von seinem Vater aufgefordert wurde, sich mit der Parallelentheorie zu beschäftigen, kann ja von Interesse sein, aber zu ermitteln, in wie weit die Entdeckung des JOHANN BOLYAI von dem heimlichen Fortwuchern GAUSSscher Gedanken abhängig gewesen ist, gehört meines Erachtens der Wissenschaft nicht an, denn für diesen Zweck fehlt es uns vollständig an Material.

Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser.

Von Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Bekanntlich spielte für den Römer bei Anlage von Städten und Tempeln oder Bestimmung der Lagerstraßen oder der Begrenzung der Ackerflächen die Ostwestlinie (Decumanns) und die Südnordlinie (Cardo, Mittagslinie) eine bedeutende Rolle. Man bediente sich dazu der Groma, eines Instrumentes, das wohl im allgemeinem bekannt ist, aber dessen Einrichtung und Verwendung im einzelnen noch Anlaß zu Zweifeln bietet. Man leitet die Groma von den Etruskern her; die Römer nannten sie auch „Stern“ (stella, Winkelkreuz), wie die Griechen „asterískos“ (*ἀστερίσκος* Sternchen). Sie diente nicht nur zum Einvisieren einer bestimmten Linie, z. B. der Ostwestlinie bei Sonnenaufgang, sondern auch zur Bestimmung der auf dieser senkrecht stehenden Mittagslinie, also zum Abstecken rechter Winkel.

Ungefähr ließ sich ihre Gestalt bisher aus dem Grabrelief des Feldmessers L. Aebutius Faustus (1. Jahrh. nach Chr.) von Ivrea erschließen.[1] Daß hier nur zwei Senklote abgebildet sind, hat wohl in äußeren Umständen seinen Grund; in Wirklichkeit hat bis jetzt auch niemand gezweifelt, daß vier Senkel vom Armkreuz herabhingen.

Nenerdings ist nnn bei den Limesgrabungen eine wirkliche, im wesentlichen gut erhaltene Groma an den Tag gekommen. Sie ist im Besitze des Gutsbesitzers Winkelmann zu Pfünz bei Eichstädt und H. Schöne zu eingehender Untersuchung überlassen worden. Das Winkelkreuz (Fig. 1) besteht aus plattiertem Eisen nnd hat im Kreuzungspunkte ein Loch, in welches der obere Zapfen des eisernen Stativs (ferramentnm) faßte. Um diesen Zapfen ließ sich das Krenz drehen. Die Enden der beiden, aufeinander senkrecht stehenden Lineale sind, abweichend von der Nachbildung

1) Vgl. Cantor, *Vorles. über die Gesch. d. Mathem.* 1^2, 501 und vollständiger in schönem Lichtdrucke bei H. Schöne, *Das Visierinstrument der römischen Feldmesser;* Jahrb. des archäolog. Instituts 16, 1901, Tafel II. Diesem interessanten Aufsatze (S. 127—132) sind mit gütiger Genehmigung des Verfassers und der Zentraldirektion auch unsere Figuren 1 und 2 entnommen.

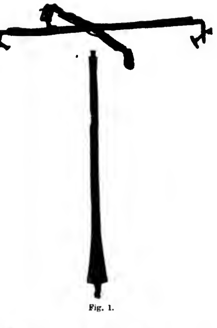


Fig. 1.

auf dem Grabsteine, stark verjüngt, hakenförmig gebogen und mit starkem Nagel versehen. Jeder Arm ist, ohne den verjüngten Teil, 13,5 cm lang, 9 cm dick, jedes Lineal einschließlich des Hakens 35 cm lang. Der Ständer, welcher auch unten einen Dorn hat nnd wohl in einen Schemel eingefügt wurde, ist 35,5 cm hoch. Die Verjüngung der Kreuzarmenden nebst Haken und Nagel machen die Annahme unabweisbar, daß das Armkreuz in einem starken Holzrahmen befestigt war, wie es Schönes Rekonstruktion (Fig. 2) zeigt. Bei dieser Einrichtung war es aber schwerlich möglich, von einem Faden zum gegenüberhängenden zu visieren, weil die eiserne Stütze im Wege gestanden hätte, sondern es wurde wahrscheinlich von einem Lote zu den benachbarten Senkeln visiert; auch so ergaben sich rechte Winkel.

Was wir aus literarischen Quellen über diese „machinula“ wissen, geht, wie es scheint, meist auf Varro zurück.

Frontin schreibt im 2. Buche über die Begrenzungen („De limitibus“, *Röm. Feldmesser* I): „Zuerst den Ständer (mit der Groma) aufstellen, alle geneigten Teile (der Oberfläche) wagerecht richten und mit einem Auge auf die an allen Enden durch Gewichte gespannten, miteinander verglichenen (gleich langen) Fäden oder Schnüre so sehen, bis es den Sehstrahl des zweiten Fadens auffängt und so die (beiden) einander nächsten Fäden nur allein sieht; dann die Richtlatten einwinken.[1]) Ähnlich noch an anderer Stelle (I: 287,2): „Wenn du den Ständer (mit dem Apparate) aufgehoben hast, wirst du ihn zu einem Steine tragen und daneben stellen. Wenn du ihn hingestellt hast, wirst du ihn (oberflächlich?) wagerecht richten. Wenn du ihn wagerecht gestellt hast, wirst du solange sorgfältig

1) Ferramento primo uti, et omnia momenta perpenso dirigere, oculo ex omnibus corniculis extensa ponderibus et inter se comparata fila seu nervias ita perspicere, donec proxima consumpto alterius visu sola intueatur; tunc dictare moetas.

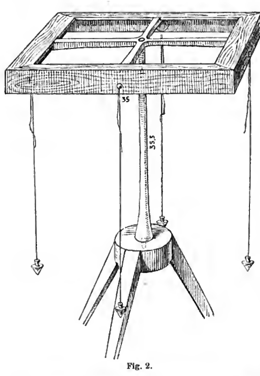


Fig. 2.

operieren (d. h. genau einstellen), daß der Senkel, welcher von dem „umbilicus soli“ hinabgelassen wird, auf den Kreuzpunkt des Steines fällt“.[1])

Damit stimmt im wesentlichen überein, was Marcus Junius Nipsus (I: 287,25) sagt: „Du wirst den Eisenständer neben dem Steine in der Weise aufstellen, daß du ihn nicht unmittelbar in die gerade Grenzlinie stellst. Wenn der Ständer steht, wirst du den „umbilicus soli“ über den Kreuzungspunkt des Steines drehen und so das Stativ wagerecht richten. Wenn der Ständer wagerecht steht, wirst du vom „umbilicus soli“ das Lot so hinablassen, daß es auf den Kreuzungspunkt des Steines fällt. Dann wirst du für die (Bestimmung der rechtwinkligen) Grenzlinie vier Punkte in deiner Hand haben, die du aufgestellt hast (nämlich drei an der Groma und eine Richtlatte für die zu suchende Richtung). Mit anderen Senkeln (Schnurenden) wirst du eine andere Grenzlinie haben.“ [2])

---

1) Sublato ferramento transferes ad lapidem et figes. cum fixeris, perpendes. cum perpenderis, diligenter tam diu facies, ut ab umbilico soli emissum perpendiculum supra punctum decussis cadat.

2) Figes ferramentum ad lapidem ita, ne in rigore limitis figas. fixo ferramento convertes umbilicum soli supra punctum lapidis et sic perpendes ferramentum. perpenso ferramento ab umbilico soli emittes perpendiculum ita, ut in puncto lapidis cadat. comprehendes quattuor signa ea quae posuisti in limitem. aliis corniculis tenebis alium limitem. Wenn man vom Visierpunkte über dem Steine absieht, kann man auch an 2 Senkel und 2 Richtlatten (auch eine für die vorhandene Grenzlinie) denken.

Es fragt sich, was unter dem „umbilicus soli" zu verstehen sei. H. Schöne sieht darin ein Kreuzarmende, das eben diesen technischen Namen geführt habe. Das scheint mir im wesentlichen richtig. Nur bleibt im einzelnen noch zu beachten, daß mit Hilfe des „umbilicus soli" auch das „ferramentum" genau wagerecht gestellt wird. Es ist daher vielleicht nicht ausgeschlossen, daß an jenem einen Ende des Winkelkreuzes nach dem Boden zu ein nabel(buckel)förmiger Knopf mit einem vertikalen Einschnitte, ähnlich wie ein gewölbter, mit einem Einschnitte versehener Schraubenkopf, irgendwie angebracht war, damit in seine Nute die Schnur des Senkels einspielte und so wenigstens einigermaßen die wagerechte Lage gewährleistete. Diese Art, die horizontale Lage zu bestimmen, ist jedenfalls noch einfacher als die Verwendung einer Setzwage. Ganz sicher geht man in solchem Falle wohl eigentlich nur bei der Dosenlibelle; aber für gewöhnlich mochte jene Vorrichtung genügen. Auch so kommt der Name — umbilicus soli „Nabel (Buckel?) für den Boden"[1]) — wohl noch zu seinem Rechte.

Nach Heron, *Dioptra* 33 wurde der „Stern" (ἀστερίσκος) nur sehr wenig beim Visieren gebraucht. Heron hebt besonders den Übelstand hervor, daß die Senklote, namentlich bei Wind, sich unruhig hin- und herbewegten. Wenn man auch versucht habe, dadurch dieser Gefahr zu begegnen, daß man Hohlzylinder unter die Senkel gestellt habe, damit das Lot in einem solchen schwebend gegen den Wind geschützt sei, so sei doch zuweilen Reibung zwischen den Gewichten und den Zylindern entstanden und dadurch das Abstecken eines rechten Winkels zwischen den durch je zwei gegenüberhängende Lote bestimmte Ebenen vereitelt. Ein Gleiches gilt selbstverständlich auch für die durch je zwei benachbarte Lote gehenden Ebenen.

---

1) Freilich bezeichnet man mit „umbilicus" auch den Kopf des Stäbchens, welches aus den Buchrollen hervorragte. Sollte eine derartige Beziehung zugrunde liegen, so müßte ein bestimmtes Armende eine ähnliche Form gehabt haben. Davon läßt der Fund nichts erkennen. Auch fragt man sich vergeblich, wie ein solcher „umbilicus" allein geeignet war, bei Festlegung der horizontalen Richtung mitzuwirken. „Nabel (Mittelpunkt) des Bodens" müssen wir aber verstehen, wenn das Armende lediglich als Schnittpunkt zweier Visierlinien gemeint ist, wie H. Schöne will. Aber woran ist es kenntlich? Ein bestimmtes Armende scheint der „umbilicus soli" gewesen zu sein, da er ja eigens nach dem Kreuzungspunkte des Steines gedreht wird. Ohne besondere Vorrichtung (oder Kennzeichen) aber könnte eigentlich jedes Kreuzarmende in obigem Sinne als „umbilicus soli" dienen.

Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

1.

Im Juni 1902 hatte ich in Florenz Gelegenheit mehrere lateinische Handschriften mathematischen Inhalts einzusehen, und zwar lenkte ich in erster Reihe meine Aufmerksamkeit auf die früheren S. Marcohandschriften. Dieselben wurden, als das S. Marco-Kloster vom Staate unterdrückt wurde, teils in die Biblioteca Laurenziana, teils in die Biblioteca Nazionale einverleibt. In ersterer Bibliothek haben die Hss. noch die alten Signaturen, in letzterer aber sind sie in die größere Sammlung mit dem Namen „conventi soppressi" aufgegangen und haben neue Signaturen erhalten. Eine Korrespondenzliste der alten und neuen Signaturen existiert nicht, und der handgeschriebene Katalog über die „conventi soppressi"-Sammlung ist sehr schlecht; es ist deshalb keineswegs leicht, die von Montfaucon oder Boncompagni erwähnten S. Marcohss. zu finden, insofern dieselben an die Biblioteca Nazionale gekommen sind. Die von mir unternommene Durchmusterung mehrerer der wichtigsten dieser Hss. hoffe ich später vervollständigen zu können, so daß es mir nach und nach gelingen kann ein ganzes Verzeichnis sämtlicher S. Marcohss. mathematischen Inhalts zu geben.

Den Anfang mache ich mit den zwei Handschriften, die ich schon in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 14, 1902, p. 144—145 kurz erwähnt habe.

Codex S. Marco Florent. 184.

(Biblioteca Laurenziana.)

Latein. Pergamenths. in groß Qvarto aus dem 15. Jahrh.; besteht aus einem Vorsatzblatt und 164 numerierten Folien. Die Qvaternionen (in der Hs. angegeben) sind: 1. Hand: fol. 1—10, 11—14; 2. Hand: 15—22, 23—30, 31—38, 39—46; 3. Hand: 47—56, 57—60, 61—68, 69—77, 78—86, 87—96, 97—105, 106—115, 116—125, 126—135, 136—145, 146—153, 154—163, 164. Es fehlen mehrere Blätter, wahrscheinlich 6 zwischen fol 57 und 58, ferner je 1 Blatt zwischen 63 und 64, 66 und 67, 76 und 77, 79 und 80, 105 und 106. Blattfläche 28,5 $\times$ 20,3 cm. Schriftfläche fol. 1—46: 20,1 $\times$ 13,0 cm; fol. 47—164 : 18,0 $\times$ 11,0 cm. Keine Kolumnen. Zeilenzahl fol 1—46: 41; fol. 47—119: 34; fol. 120—164: 30 à 37. Schrift: minuskel, 3 Hände

(vgl. oben) von der Mitte des 15. Jahrh. Für Initialen ist Platz offen gelassen, aber diese sowie Figuren fehlen. Die Buchtitel fol. 120—164 sind rot geschrieben, sonst fehlt jede Art von Ausschmückung.

Auf dem Vorsatzblatt findet sich die gewöhnliche Auteskription sowie ein altes Inhaltsverzeichnis[1]): (Hand B): *In bancho XVIII ex parte occidentis.* (Hand A): *Hic liber est conuentus santi Marci de Florencia ordinis predicatorum, quem donauit uir clarissimus Cosmus Medices prescripto conuentuj.* (Hand B): *Emit autem ab heredibus ser Phylippi ser Vgolini Pieruzzi de Vertine notarii florentinj.*

Canones super tabulas regis Alfonsi secundum Johannem de Saxonia.
Tabule Alfonsi regis Castelle.
Tractatus Milei et Campani.
Antolicus (sic!) *de spera mota.*
Campanus et alij de proportione et proportionalitate.
Liber Karastonis.
Liber Embadorum Savosarde (sic!) *Judei.*

Der Inhalt ist folgender:

I (erste Hand).

1. Johannes Danck von Sachsen: *Canones super tabulas Alphonsinas*[2]) (fol. 1r—13r).

Überschrift fehlt.

Aufang: *Tempus est mensura motus, ut uult Aristoteles 4° physicorum . . .*

Schluß: . . . *Figuram autem facies secundum doctrinam magistri Johannis de Lineriis, a quo habeo scientiam meam. Expliciunt canones super tabulas Alfonsii.*

fol. 13v—14v sind leer.

II (zweite Hand).

2. Alfonsinischen Tafeln (fol. 15r—46v).

Überschrift: *Tabulæ illustris Alphonsi regis Castellæ ad meridiem Toleti positæ.*

Anfang (Rubr.): *Tabula differentiarum unius regni* . . . . . (vorletzte Tafel heißt:) *Tabula equationis Mercurij tertia*. . . . . . . (letzte Tafel:) *Tabula equationis dierum cum noctibus suis.*

1) Vgl. Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino*, Roma 1851, p. 35—36.

2) Über diesen Text siehe Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 619 ff. — Was den Namen Danck betrifft, so hat Cod. Borbon. VIII. D. 31 (14. Jahrh.) die *Canones* mit der Unterschrift: *Expliciunt canones tabularum illustris principis Alfonsi, quos magister Johannes Danekow de Saxonia conpilauit.*

III (dritte Hand).

3. Menelaos' Sphärik I—III, defekt[1]) (fol. 47r—79v).

Überschrift fehlt.

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam* ... (7 Blätter fehlen).

fol. 64v: ... *Expletus est tractatus primus libri Milei. Incipit secundus* ... (1 Blatt fehlt) ...

fol. 69v: ... *Expletus est secundus. Incipit tercius* ... (1 Blatt fehlt).

fol. 79v: ... *et maior proporcio dyametri spere ad dyametrum circuli, qui* / — der Rest vom letzten Satz (III, 15) stand auf dem nächsten nunmehr fehlenden Blatte.

4. Campanus' *de figura sectoris*, defekt[2]) (fol. 80r—v).

Erste Hälfte des Textes stand auf dem zwischen fol. 79v u. 80r weggeschnittenen Blatt.

fol. 80r — / *ipse sit residuus semicirculi, et corda dupli arcus hb est equalis corde dupli arcus cb*, ...

Schluß: ... *et ex proportione corde dupli arcus cf ad cordam dupli arcus ce.*

5. Autolykos' περὶ κινουμένης σφαίρας[3]) (fol. 80v—86r).

Überschrift: *Incipit liber Antolici* (sic!) *de spera motu* (sic!)

Anfang: *Punctum equali motu dicitur moueri* ...

Schluß: ... *ergo vterque duorum circulorum abg, bed est maior quam centrum spere. Expletus est liber Antolici* (sic!) *de spera mota.*

6. Campanus' *de proportione et proportionalitate*[4]) (fol. 86r—90r).

Überschrift: *Tractatus Campani de proporcione et proporcionabilitate* (sic!)

Anfang: *Proportio est duarum quantitatum eiusdem generis ad inuicem habitudo* ...

Schluß: ... *quare d ad f non componitur. De propositis quoque sufficit, quod dictum est. — Isti sunt 18 modi vtiles. — Isti sunt 6 modi invtiles.*

---

1) Vgl. Björnbo, *Studien über Menelaos' Sphärik* p. 12 und 144.

2) Der ganze Text (Anfang: *Cum aliquis semicirculus dividitur* ...) findet sich in den Codd. Dresd. Db. 86; Torun. R 4° 2; Paris. 7406; Vat. 3098 und ist von Giunti, Venedig 1518 ediert; vgl. übrigens Björnbo, *Stud. über Menelaos* p. 153—154 und Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 589, Note 387.

3) Unediert; derselbe Text wie der in den Codd. Paris. 9335 fol. 19r—21v und Basil. F. II. 33, fol. 114—116. Vgl. Biblioth. Mathem. 3_3 (1902), p. 67.

4) Im Cod. Vindob. 5277 ist dieser Text anonym; im Cod. Vat. 3380 wird er wie hier dem Campanus zugeschrieben (vgl. Björnbo, l. c. p. 144); im Cod. Ambr. A. 203 inf. (15. Jahrh.) ist der Titel: *Tractatus aureus de proporcione et proportionalitate Al-Kindi (!) ad librum Almagesti admodum necessarius.* In den arabischen Verzeichnissen über Al-Kindis Schriften (vgl. Zeitschr. f. Math. u. Ph. 37, 1892, p. 10—15) findet sich eine Schrift über die zeitlichen Verhältnisse (Proportionen).

7. Ahmed ben Jusufs *de proportione et proportionalitate*, defekt[1]) (fol. 90r—112v).

Überschrift: *Epistola Ameti filii Joseph de proporcione et proportionalitate.*

Anfang: *Jam tibi respondi, ut scias, quod quesiuisti de causa geometrice proporcionis* . . . (1 Blatt fehlt).

fol. 112r: . . . *ad quod absque eius auxilio peruenire non potes, qui est sufficientia nostra et tutor bonus.*[2]) *Quod proportio linee ab ad medietatem circuli bgd sit sicut* . . .

Schluß: . . . *et sicut proportio ab ad medietatem circuli bgd et hoc est etc. — Et illud est. — Expleta est epistola Ameti de proporcione et proporcionalitate.*

8. Tâbit-ibn-Korrahs *liber karastonis* (fol. 112v—119r).

Überschrift: *Incipit liber karastonis, editus a Thebith filio Thore.*

Anfang: *Continuet deus conseruationem tuam et multiplicet ex salute portionem tuam* . . .

Schluß: . . . *et faciet te cognoscere casum erroris. Liber est finitus. — Explicit de karastione. Deo gratias.*

fol. 119v ist leer.

9. Abraham bar Cihjja (Savasorda): *liber embadorum*[3]) (fol. 120r—164v).

Überschrift: *Incipit liber embadorum a Sauasorda Judeo in ebraico compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus anno Arabum DX mense saphar.*

Anfang: *Qvi omnes mensurandi diuidendique modos recte* . . .

fol. 159r Zeile 8: . . . *ampligonius iudicetur ebetencet*[4]) *linea db et sit notum* . . .

fol. 164v: . . . *Si triplum est af ad fc, triplum est be ad ba.* (Schluß).

Codex S. Marco Florent. 213.

(Biblioteca Nazionale, convent. soppr. J. V. 30.)

Latein. Pergamenths. in groß Qvarto aus dem 14. Jahrh.; besteht aus einem Vorsatzblatt und 45 Folien mit den Nummern 1—12 und 25—57. Die Qvaternionen (in der Hs. angegeben) sind 1—12, 25—36, 37—48 und 49—58; fol. 58 ist weggeschnitten, und die Qvaternion 13—24 fehlt. Blattfläche 29,5 × 22,3 à 23,3 cm.

1) Eine Ausgabe von diesem Texte hatte M. Curtze in Vorbereitung. Die Hälfte desselben habe ich für Curtze nach der gegenwärtigen Hs. collationiert.

2) An dieser Stelle schließt sonst der Text, z. B. im Cod. Paris. 9335. Vgl. Bibl. Math. 3_3, 1902, p. 70. Die folgende 3/4 Seite ist auch nur ein Scholion.

3) Ediert von Curtze in den Abh. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 12, 1901.

4) Mit dem Worte *ebetencet* schließt die Übereinstimmung mit Curtzes Ausgabe (p. 178, 13). Das folgende (fol. 159r—164v) ist einem anderen Texte entnommen und handelt von Höhen- und Tiefenmessungen des Unzugänglichen.

Schriftfläche fol. 1—12 und 25—34: 17,5 × 11,7 cm; fol. 35—57: 19,0 à 19,5 × 13,0 cm. Keine Kolumnen. Zeilenzahl: 38—43. Eine 1. Hand hat den Text und viele Randnoten geschrieben, und zwar mit schwarzer, einzelne Textüberschriften mit roter, Abteilungszeichen (€) und Abschnittsinitialen mit roter *oder* blauer, Textinitialen mit roter *und* blauer Tinte. Einzelne Randnoten einer 2. Hand und mehrere Textüberschriften von neueren Händen sind schwarz geschrieben. Die Figuren (mittelmäßig) sind schwarz, in der ersten Qvaternion mit schwarzen, sonst mit roten Figurbuchstaben.

Die Hs. hat kein Inhaltsverzeichnis. Auf dem Vorsatzblatt steht die gewöhnliche Anteskription[1]):

(Hand B): *In bancho XVIIII ex parte occidentis.* (Hand A): *Hic liber est conuentus sancti Marci de Florencia ordinis predicatorum, quem donauit vir clarissimus* COSMUS MEDICES *prescripto conuentuj.* (Hand B):, *quem emit ab heredibus ser* PHYLIPPI *ser* UGOLINI PIERUZZY *notarij florentinj. 19 occ.*

Der Inhalt ist folgender:

1. ARCHIMEDES' sog. *de curvis superficiebus*[2]) (fol. 1r—4v).

Überschrift: *Liber* ARCIMENIDIS.

Anfang: *Cviuslibet rotunde pyramidis curua superficies ...*

Schluß: ... *Sic que [classis nostra id est nauis]*[3]) *portum tenet, in quem iamdudum vela succinxerat. Iamque cum bibulis hereat harenis anchora* ARCHIMENIDES *remigii,* JOHANNES *nauigationis grates agit summo creatori. Explicit commentarium* JOHANNIS DE THIN̄[4]) *in demonstrationes* ARCHIMENIDIS.

2. EUKLIDS Katoptrik[5]) (fol. 4v—7r).

Überschrift (am Rande mit einer jüngeren Hand): *De speculis.*

Anfang: *Visum rectum esse, cuius media ...*

Schluß: ... *Quare in eis stupa posita accendetur. Explicit liber de speculis.*

3. JORDANUS NEMORARIUS' *de ponderibus*[6]) (fol. 7r—8r).

Überschrift: *Incipit liber de ponderoso et leui.*

---

1) Ähnliche Anteskriptionen finden sich in fast allen S. Marcohss.

2) Das Buch enthält Sätze aus dem 1. Buche von ARCHIMEDES' *De sph. et cyl.* Vgl. HEIBERGS Ausgabe III, proleg. LXXXVI ff. Es findet sich auch im Cod. Basil. F. II. 33 p. 151—153.

3) Am Rande mit 1. Hand.

4) HEIBERG liest *Thiss.* Cod. Digby 174 und Dresd. Db. 86 haben aber auch *Thin̄.* Borbon. VIII. C. 22 (13. Jahrh.) hat als Überschrift: *Incipit liber* JOHANNIS DE TINEMNIE *(!) de curuis superficiebus,* und als Unterschrift: *Explicit commentum* GERUASII DE ESSEXTA (sic!)

5) Vgl. HEIBERGS EUKLIDausgabe VII, proleg. L ff. Zu den von HEIBERG erwähnten Codd. sind hinzuzufügen: Reg. 1253, s. XIV, fol. 1r—13r; Vat. 3102, s. XIV, fol. 43r—51v; Ampl. F. 37, s. XIII, fol. 60—63; Borbon. VIII. C. 22, s. XIII; S. Marco Flor. 206 (= Conv. soppr. J. I. 32), ca. 1270, fol. 43r—46v; Parm. 720, s. XIII, fol. 472v—476r; Ambr. T. 100. sup., s. XIV, fol. 43v—54r.

6) Vgl. BJÖRNBO, *Studien über* MENELAOS, p. 147, Note 1.

Anfang: *Omnis ponderosi motum esse ad medium . . .*

Schluß: . . . *sunt in pondere, equales duabus equis partibus f, g; sic ergo totum toti. Et hoc est quod oportuit demonstrari.*

Zusatz (9 Zeilen): *Queritur in longitudine equali et tereti eiusdem materie . . .*

4. JORDANUS NEMORARIUS(?): *de proportionibus*[1]) (fol. 8ʳ—9ᵛ).

Überschrift (mit ganz neuer Hand): *De proportionibus.*

Anfang: *Proportio est rei ad rem determinata secundum quantitatem habitudo . . .*

Schluß: . . . *iterum XVIII alii a supradictis modis, ut omnes per totum fiant XXXVI. Explicit iste liber.*

5. ARCHIMEDES' Kreismessung[2]) (fol. 9ᵛ—12ᵛ).

Überschrift der Folien 9ᵛ—11ᵛ: *sudor* ARCHIMENIDIS.

Überschrift des Textes: *Incipit;* am Rande mit 2. Hand: *De Quadratura circuli.*

Überschrift der Folien 12ʳ—ᵛ: *Liber de quadratura circuli* ARCHIMENIDIS.

Anfang (Satz 3 der Ausgabe): *Omnis linea continens circulum . . .*

fol. 11ᵛ: . . . *minus septima et plus 10 . 71 partibus partium dyametrie, et hoc est quod uoluimus probare* (d. h. Schluß der Ausgabe). *I. Omnis circulus orthogonio triangulo . . .*

fol. 12ʳ: *II. Proportio aree omnis circuli . . .*

fol. 12ʳ: . . , *quod manifestum erit per sequentem proportionem. Intraposita: Circulum quadrare eo quod omnis triangulus orthogonius, cuius vnum latus equatur circumferentie, reliquum latus semidyametro equalis est ipsi circulo . . .*

Schluß (fol. 12ᵛ): . . . *ergo quadratum equale triangulo per ultimam secundi, et sic concludes propositum. Explicit.*

6. JORDANUS NEMORARIUS(?): *De Ysoperimetria*, Fragment[3]) (fol. 12ᵛ).

Überschrift: *Incipit liber de ysoperimetris corporibus.*

Anfang: *Ysoperimetra sunt, quorum latera coniunctim sumpta sunt equalia . . .*

. . . *sumatur linea* | *in penthagono a scilicet* | / — Die rubrizierten Worte bilden die Endkustode; der Rest des Textes fehlt.

1) Dieser Text findet sich auch in den Codd. Dresd. Db. 86, XIV s.; S. Marco Flor. 206 (= Conv. soppr. J. I. 32), ca. 1300; Paris. 7399, XIII—XIV s. u. Ampl. Q. 376, ca. 1349; nur in dem letzten wird JORDANUS als Verfasser bezeichnet.

2) Ediert von HEIBERG nach. Cod. Dresd. Db. 86. Die Anordnung der Sätze in der gegenwärtigen Hs. ist 3, 1, 2.

3) Dieser Text, derselbe wie Nr. 22. des Cod. Vindob. 5203, ist nicht zu verwechseln mit dem Texte: „*Prelibandum est quoniam ysoperimetrorum, ysopleurorum . . . et solidum poliedrum minus spera*" in den Codd. Borbon. VIII; C. 22; Digby 174 (fol. 135 und 178ᵛ); Dresd. Db. 86; Bas. F. II. 33 und Paris. 8680.

7. THEODOSIOS' Sphärik I—III, defekt[1]) (fol. 25r—34r).

Anfang fehlt. Zuerst kommen die zwei letzten Worte vom Satze I, 1: | *larii disiuncti.*

Danach I, 2: *Spere proposite centrum reperire ...*

Satz III, 10 schließt (fol. 33r): ... *sicut processimus in demonstratione antepremisse per quartam.*[2])

III, 11: *Si polus circulorum equidistantium supra lineam continentem circulum ...*

Schluß (Satz III, 15): ... *quicumque eorum fuerint, propinquior vni duorum polorum, quicunque fuerit, erit maior arcu sui circuli simili ei, qui magis est remotus. Explicit THEODOSIUS de speris.*

8. MENELAOS' Sphärik I—III[3]) (fol. 34r—52v).

Überschrift: *Incipit liber primus MILLEI Romani de figuris spericis.*

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam ...*

Schluß: ... *et equidistat arcui bg et illud est q. d. u. Explicit liber MILLEI Romani de figuris spericis, et expletus est tractatus tertius.*

9. Astrolabienbeschreibung[4]) (fol. 52v—53v).

Überschrift: *Astrolabium demonstratum.*

Anfang: *Tres circulos in astrolapsu descriptos, duos scilicet....*

Schluß: ... *alterius translationis nostre hic quoque breuiter commemoremus, ut si diutius insequamur scribendis moram faciamus. Explicit iste liber.*

10. AHMED BEN JUSUFS *de arcubus similibus*[5]) (fol. 53v—55r).

Überschrift: *Epistola ABUIAFAR AMETI filii JOSEPHI de arcubus similibus.*

---

1) Die Überschriften der Seiten sind *liber 1us* (bezw. *2us*, *3us*) THEODOSIJ *de speris.* Buch 1 ist am Rande stark kommentiert. Fol. 27v z. B. steht: *Nota, quod uocat* (wahrscheinlich CAMPANUS; vgl. BJÖRNBO, *Studien über MENELAOS*, p. 148 und 152—153) *primum huius 16m, quia continuat ipsum ad libros EUCLIDIS.*

2) An dieser Stelle schließt sonst diese THEODOSIOSübersetzung, die lange mit 32, 31 und 10 Sätzen von PLATO von Tivoli (?); vgl. BJÖRNBO, l. c., p. 145, Note 2. Die gegenwärtige Hs. hat wie die Ausgabe Venedig 1518 bezw. 33, 31 und 15 Sätze.

3) Vgl. BJÖRNBO, l. c. p. 144—145, wo die Angabe 45r—52v zu korrigieren ist.

4) Anfang und Schluß dieses vielleicht von CAMPANUS redigierten Textes stimmen mit Cod. Ampl. F. 375.

5) Der Schluß des gegenwärtigen Textes stimmt mit dem in Cod. Paris. 9335; vgl. Bibl. Math. 3_3, 1902, p. 69; der Anfang nicht, weil Paris. 9335 einen Teil der arabischen Einleitung mitgenommen hat. CURTZES *De arcubus similibus* (Mitt. des Coppernicus-Vereins 6, 1887, p. 48—50) nach Cod. Dresd. Db. 86 mit 5 Sätzen und 7 Figuren ist ein Auszug oder vielmehr eine verkürzte Bearbeitung von AHMEDS Werk; vielleicht rührt diese Bearbeitung von JORDANUS NEMORARIUS her.

Anfang: *Omnes namque geometre diffiniunt, eos esse similes arcus, qui angulos recipiunt equales* . . . (12 Sätze und 11 Figuren).

Schluß: . . . *sunt equalitas et diuersitas et similitudo et dissimilitudo.*

11. 16 Euklidscholien und ein Archimedscholion. (fol. 55r—57v).

Die Scholien zu Euklid gehören zu X, 21—22; XI, 23; XIV, 7; XIV, 10; XIV, ultim.; XIII, 8; XIII, 9; XIII, 12 (4 Scholien) und XIII, 2.

Über die Entstehung des Grenzbegriffes.

Von C. R. Wallner in München.

Eine exakte Theorie des Grenzbegriffes setzt, wie die Untersuchungen des abgelaufenen Jahrhunderts gezeigt haben, eine vollständige Theorie der Irrationalzahlen bereits voraus, da eine Zahlenfolge einen Grenzwert von vornherein nur dann besitzen kann, wenn dieser Grenzwert als Zahl überhaupt existiert. Setzt man aber die Definition der Irrationalzahl voraus, so ist der Grenzbegriff kein wesentlich neuer Begriff mehr, wie etwa der Begriff der negativen oder gebrochenen Zahlen, kein Begriff, dessen Eigenschaften erst neu definiert werden müssen, sondern die Grenze einer Folge ist einfach die durch diese definierte Irrationalzahl; der Grenzübergang ist also nicht ein besonderer geheimnisvoller Prozeß, nicht eine eigenartige arithmetische Operation. Deshalb könnte er auch in der Arithmetik wohl entbehrt werden; in der Tat zeigt die Dedekindsche Theorie, daß die Gesetze aller arithmetischen Zahlen völlig eindeutig festgelegt werden können, sobald nur die Stellung einer jeden Zahl im Zahlgebiete vollkommen bestimmt ist; von einem Grenzbegriff oder irgend welchen andern neuartigen Vorstellungen macht diese Theorie nirgends Gebrauch.

Wenn man den Grenzbegriff trotzdem nicht missen will, so rührt das daher, daß man mit seiner Hilfe einmal bei der formalen Neubildung von Zahlen aus Folgen von bestimmter Beschaffenheit eine wesentlich kürzere Fassung erreichen kann. Überdies erlaubt er die fortwährende Trennung zwischen Rational- und Irrationalzahl, die bald lästig fallen würde, zu vermeiden, da der Grenzbegriff (ähnlich wie der Begriff des Schnittes in der Dedekindschen Theorie) sowohl rationale wie irrationale Zahlen in sich begreift.

Die Verwendung des Grenzbegriffes erweist sich nun überall da als zweckmäßig, wo es sich um praktische Rechnung handelt, wo es also von Vorteil ist, eine Zahl als Resultat von Verknüpfungen andrer Zahlen einzuführen, denn das vermag ja gerade der Grenzbegriff zu leisten. Der Begriff des Schnittes wird dagegen überall dort zu verwenden sein, wo es sich um möglichst scharfe logische Untersuchungen handelt, die nicht von

mechanischen Rechnungsoperationen mit Zahlen, sondern von dem die Zahl eigentlich Bestimmenden (d. i. ihrer Stellung) auszugehen haben.

An Stelle unsrer Irrationalzahlen wurden im Altertum die sogenannten inkommensurablen Größen benutzt. Zwar herrschte bis in die Zeit DESCARTES' herauf die Ansicht, daß zwei unter sich inkommensurable Größen kein Verhältnis besitzen, daß also mit andern Worten keine zahlenmäßige Beziehung zwischen denselben besteht.[1]) Wohl aber war man von jeher der Ansicht, daß derartige Größen hinsichtlich ihrer Quantität eine ganz bestimmte feste Stellung in Bezug auf alle andern gleichartigen Größen einnehmen.

Das Verhalten krummliniger Gebilde zu einander und zu Geraden faßte man als ein ganz analoges auf; man war außerstande bei gleichartigen aber verschieden geformten Gebilden irgend welche gesetzmäßige Beziehung ihrer Längen- oder Flächenzahl aufzustellen oder auch nur eine Definition dieser Begriffe zu geben. Das einzige Mittel war hier wieder, genau wie bei inkommensurablen Größen mit den Begriffen „größer" und „kleiner" zu operieren. Als Kriterium für die Größenordnung zweier Gebilde wird bei ARCHIMEDES das fundamentale Postulat benutzt,[2]) daß von zwei krummen Linienstücken über derselben Basis, von denen jedes einzelne gegen diese Basis ohne Ausnahmepunkte überall konkav ist, eines dann eine größere Länge besitzt, wenn es das andere vollkommen umschließt; ebenso ist dann der von dieser Kurve und der Basis eingeschlossene Flächenraum größer als der entsprechende bei der andern Kurve.

Diese Art und Weise, von der Aufeinanderfolge der Größen hinsichtlich ihrer Quantität auszugehen, ist der Einführung des Schnittes in die Arithmetik ganz analog, nur daß bei letzterem nicht Quantitäten sondern zunächst lediglich Successionen eine Rolle spielen. Nun haben wir aber gesehen, daß bei dieser Art der Behandlung der Irrationalzahlen bezw. der inkommensurablen Größen ein Hereinziehen des Grenzbegriffes gänzlich unmotiviert und unnötig ist, denn dieser Begriff wird erst dann nützlich (bezw. notwendig), wenn die allgemeine Irrationalzahl nicht schon definiert

1) Diese Anschauung änderte sich erst mit der Verbreitung der rechnenden Geometrie, die durch eine Beschränkung ihres Formalismus auf kommensurable Größen fast unbrauchbar wäre, änderte sich erst zu einer Zeit, als man längst gewohnt war, arithmetische Irrationalitäten untereinander zu verknüpfen, und die Erkenntnis der Wichtigkeit geometrischer Strenge schon verloren gegangen war.

2) ARCHIMEDIS *Opera omnia*, ed. HEIBERG, I, Leipzig 1880. p. 9. „Postulo autem haec: 1. Omnium linearum eosdem terminos habentium minimam esse rectam. 2. Ex ceteris uero lineis, si in plano positae eosdem terminos habeant, inaequales esse eiusmodi lineas, si utraque in eandem partem caua sit, et aut tota altera ab altera et recta linea eosdem terminos habenti comprehendatur, aut pars eius comprehendatur, pars communis sit, et minorem esse eam, quae comprehendatur".

ist sobald es sich um eine rechnerische Einführung der Irrationalzahl handelt. Eine solche war aber bei dem rein geometrischen Verfahren der Alten völlig zwecklos, eine Einführung eines (arithmetischen) Grenzbegriffes war also znm mindesten unnötig. Derselbe war aber auch in ihrem Sinne ganz nndenkbar, denn der Grenzbegriff stellt eine arithmetische Beziehung zwischen den Irrationalgrößen und den Rationalzahlen insofern her, als er jene aus diesen erzeugt. Daß aber die Alten eine solche Beziehung nicht nur nicht kannten, sondern sogar leugneten, beweist die Tatsache, daß sie inkommensurablen Größen kein Zahlenverhältnis zuerkannten. Krumme Linien behandelten sie aber ganz nach Analogie der inkommensurablen Größen, also mußte ihnen eine direkte Beziehnng zwischen krummen und geraden Gebilden genan so unsinnig erscheinen wie eine Beziehung zwischen inkommensnrablen Größen, bei denen sie auch nnr die Existenz einer wohlbestimmten Quantität anerkannten. Somit ist aber anch eine Verwertung des Grenzbegriffes bei den Alten in keiner Weise zu suchen, da dieser ihrer ganzen Auffassung der inkommensurablen Größen zuwider laufen würde. Man könnte noch eine Art geometrischen Grenzbegriffs bei den Alten vermuten; dem ist aber entgegen zu halten, daß der einzige wirklich geometrische Grenzbegriff, den es überhaupt gibt, der Begriff der Grenzlage nämlich, gar kein nener selbständiger Begriff ist, sondern mit dem Begriff der wohlbestimmten Lage (des Schnittes in der Arithmetik) zusammenfällt. Anders läßt sich aber der Grenzbegriff ohne Zuhilfenahme von Bewegungsvorstellungen nicht in die Geometrie übertragen, und Bewegungsvorstellnngen wird man in der Geometrie der Alten am allerwenigsten suchen dürfen; da wäre man immer noch eher berechtigt, in der Art nnd Weise, wie diese mit den Begriffen „größer" und „kleiner" operierten, einen arithmetischen Grenzbegriff zu sehen.

Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß bei der antiken Art der Beweisführung von dem Begriff der Grenze auch wirklich kein Gebranch gemacht wnrde; die völlig elementare Methode soll an der Parabelquadratur des Archimedes erläutert werden.[1]) Doch muß vorher noch darauf anfmerksam gemacht werden, daß weder er noch Euklid ihr Verfahren zum Beweisprinzip erheben, sondern dasselbe in jedem einzelnen Falle mit derselben Ausführlichkeit und Umständlichkeit anwenden. Daraus folgt aber, daß sie das allen diesen Einzelbeweisen Gemeinsame nicht als ein Spezifikum dieser Beweise angesehen haben, das letztere von den gewöhnlichen geometrischen Beweisen unterscheidet. Schon daraus folgt aber mit Notwendigkeit, daß sie den Grenzbegriff überhanpt nicht gekannt haben, denn dieser hätte sie nnbedingt zu einer Methodisierung ihrer

1) Archimedes, a. a. O. II, p. 349, 351.

Beweise führen müssen. Ihnen war vielmehr jeder Beweis über die Maßzahlen gekrümmter Gebilde einfach ein indirekter Beweis wie jeder andere indirekte Beweis auch und mußte es sein, da, wie bereits erwähnt, nach Einführung des oben genannten Postulats über Flächen- und Längenzahl der Gleichheitsnachweis zweier beliebiger Raumgrößen vollständig elementar ist.

Wir wählen den Satz, daß (Fig. 1) jedes Parabelsegment $A\Delta B E \Gamma$ um ein Drittel größer ist als das Dreieck $AB\Gamma$ mit gleicher Basis und gleicher Höhe,[1]) d. h. wenn $K = \frac{4}{3} AB\Gamma$, so ist $A\Delta BE\Gamma = K$. Nun wird zuerst gezeigt, daß die Annahme Parabelsegment $A\Delta BE\Gamma > K$ widersinnig ist. Man braucht nämlich nur den Parabelsegmenten mit den Grundlinien AB und $B\Gamma$ Dreiecke $A\Delta B$ und $BE\Gamma$ von gleicher Basis und gleicher Höhe einzuschreiben, über den Seiten $A\Delta$, ΔB, BE, $E\Gamma$ in analoger Weise wieder neue derartige Dreiecke zu errichten und dies Verfahren genügend lang fortzusetzen, um nach einer bestimmten endlichen Anzahl von Einschreibungen ein Polygon vom Inhalt F zu erhalten, das die Eigenschaft hat, daß Parabelsegment $A\Delta BE\Gamma - F$ kleiner ist als irgend eine bestimmte vorgelegte feste Größe. Man wird also speziell die Differenz $A\Delta BE\Gamma - F$ kleiner machen können als $A\Delta BE\Gamma - K$, das ja der Annahme gemäß einen ganz bestimmten festen Wert hat. Man könnte also mit anderen Worten dem Parabelsegment ein Polygon einschreiben, derart, daß $F > K$. Das ist aber unmöglich, wie sich leicht ergibt, wenn man auf die Entstehungsweise dieses Polygons zurückgeht. Wir hatten es gefunden, indem wir zuerst an das Dreieck $AB\Gamma$ zwei Dreiecke $A\Delta B$ nnd $BE\Gamma$ ansetzten, zu dem so entstandenen Polygon $A\Delta BE\Gamma$ dann vier weitere Dreiecke hinzufügten und sofort. Nun läßt sich aber zeigen, daß jeder solche Zuwachs immer der 4. Teil des jeweils vorhergehenden ist, d. h. daß das Dreieck $AB\Gamma$ das 4 fache der beiden Dreiecke $A\Delta B$ und $BE\Gamma$ zusammen ist, daß diese beiden zusammen aber wieder das 4 fache der nächsten vier Dreiecke sind u. s. f. Dann folgt aber, daß das oben benützte Polygon, das aus einer endlichen Anzahl solcher Zuwachse besteht, $< \frac{4}{3} AB\Gamma$ d. h. $< K$ ist. Da also F immer $< K$, so ist die Annahme $A\Delta BE\Gamma > K$ falsch.

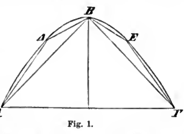


Fig. 1.

Die Annahme $K > A\Delta BE\Gamma$ wird in ähnlicher Weise zurückgewiesen.

1) Höhe des Parabelsegments heißt der Abstand zwischen Basis und der dazu parallelen Tangente.

Denn wäre sie richtig, so wäre doch $K - A\Delta BE\Gamma$ eine ganz bestimmte feste positive Größe. Nun kann man aber zeigen, daß $F + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} AB\Gamma$, wo I den letzten (kleinsten) der Zuwachse bedeutet, aus denen sich das Polygon vom Inhalt F zusammensetzt, d. h. $F + \frac{1}{3} I = K$ oder $K - F < I$. Man kann aber dieses Polygon immer so wählen, daß der letzte Zuwachs I kleiner als irgend eine vorgelegte Größe, also speziell $< K - A\Delta BE\Gamma$ ist. Dann wäre also $K - F < I < K - A\Delta BE\Gamma$ d. h. $F > A\Delta BE\Gamma$. Da aber das auf die besprochene Weise konstruierte Polygon immer ganz innerhalb des Parabelsegments liegt, so ist die letztere Ungleichung und damit auch unsere zweite Annahme widersinnig. Es bleibt also nur noch die eine Möglichkeit, daß $A\Delta BE\Gamma = K = \frac{4}{3} AB\Gamma$ ist.

Zunächst ist klar, daß in diesem Beweis keinerlei Verwendung des Grenzbegriffes gemacht ist. Fehlt ja doch das wichtigste Moment zur Definition der Grenze: Die erzeugende Folge. Denn wir haben hier immer nur ein einziges, ganz bestimmtes, festes Polygon, das nach seinem Inhalt mit dem Parabelsegment verglichen wird. Um dieses eine Polygon vom Inhalt F zu erhalten, muß Archimedes allerdings eine Folge von Polygonen benützen; dieselbe dient aber lediglich dazu, daß jenes mit Sicherheit aufgefunden werden kann, und beeinflußt den Beweisgang selbst in keiner Weise; überdies besteht sie nur aus einer endlichen Anzahl von Termen. Das ist doch etwas ganz anderes, als wenn eine unbegrenzte Folge von eingeschriebenen Polygonen ihrer ganzen Ausdehnnng nach vorgelegt ist und aus ihr erst die betreffende Kurve neu erzeugt werden soll, eine Auffassung die der Archimedischen gerade entgegengesetzt ist. Deshalb möchte ich mich auf das entschiedenste gegen die vielverbreitete Ansicht aussprechen, daß das Beweisverfahren der Alten auf einer Verwendung des Grenzbegriffs beruhe.

Einen wesentlichen Fortschritt nicht für die zwingende Kraft, sondern für die leichtere Handhabnng dieser Beweisform bedeutet das Vorgehen des italienischen Mathematikers Lucas Valerius. Dieser erkannte das allen Archimedischen Beweisen Gemeinsame und formulierte es in einer Reihe von Sätzen zu Beginn des zweiten Buches seines Werkes: *De centro gravitatis solidorum libri tres* (Rom 1604). Der erste dieser Sätze[1]) hat folgenden Sinn: Sind A, B, C, D vier gegebene Größen, und es können zwei weitere Größen G und H, die gleichzeitig beide größer oder kleiner als A bezw. C sind, und die in dem Verhältnis $B : D$ stehen, derartig bestimmt

1) Valerius, *De centro gravitatis* l. II, p. 1: „Si duae magnitudines vnà maiores, vel minores prima, & tertia minori excessu, vel defectu quantacumq; magnitudine proposita eiusdem generis cum illa, ad quam refertur, eandem proportionē habuerint, maior vel minor prima ad secundam, & vnà maior, vel minor tertia ad quartam; erit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam“.



werden, daß ihre Unterschiede von A bezw. C kleiner als eine beliebig vorgelegte feste Größe sind, so stehen anch A und C in dem Verhältnis $B : D$. Durch derartige Sätze ist aber eine Metbodisierung des ARCHIMEDischen Gedankengangs geschaffen; denn der Satz kann jetzt überall da verwandt werden, wo ARCHIMEDES' eigentlicher Beweis erst begann. Dadurch wird aber die Voruntersuchung für den Beweis selbst, nämlich der Nachweis, ob solche Größen G nnd H überhaupt existieren, in den Vordergrund gerückt. Dieser Nachweis bestand schon bei ARCHIMEDES in einer geometrischen Konstruktion, die derartige Größen (in obigem Beispiel das Polygon vom Inhalt F) successive erzeugen ließ, und konnte überhanpt nnr dann Schwierigkeiten machen, wenn der Unterschied von dem zugehörigen A (dem Parabelsegment) sehr klein sein sollte. Da lag es aber jetzt, wo der eigentliche Beweis infolge der erwähnten allgemeinen Sätze zurückgetreten war, nahe, daß *der* Gedanke mehr nnd mehr betont wurde, daß das betreffende Konstruktionsverfahren zwar unter Umständen sehr langwierig und mühevoll werden kann, schließlich aber doch zum Ziele führen muß. Diese Vorstellung drückt sich schön aus in der Verwendung des unscheinbaren Wörtchens „tandem“, wie es von GREGORIUS A ST. VINCENTIO ab bei der Beschreibnng derartiger Konstruktionsverfahren regelmäßig auftritt.[1])

Nun ist ein wichtiges Moment zn beachten. Ziemlich unabhängig von der Mathematik hatte sich in der Philosophie die Frage nach der Znsammensetzung des Continnums entwickelt. Man hatte dabei erkannt, daß alle diesbezüglichen Probleme in ihrem innersten Wesen auf die Beantwortung der einen Kardinalfrage hinausliefen: Was ist das Resultat eines in infinitum fortgesetzten Teilungsprozesses? Hier standen sich die Schulen der Atomistiker nnd Scholastiker gegenüber; die ersteren hielten an der Existenz gewisser letzter kleinster Teilchen (wie die Punkte einer Linie) fest, die andern waren der Ansicht, man könne durch eine unbegrenzte (genauer wäre langgenug) fortgesetzte Teilung zwar Teile von beliebiger Kleinheit erzeugen, dieselben besäßen aber immer noch alle Eigenschaften des ganzen Gebildes, folglich könne man die Indivisibilien selbst durch Teilnng nie erreichen.

Die Kenntnis dieses Problems ist es, die den erwähnten GREGORIUS A ST. VINCENTIO zu einer falschen Auffassung des ARCHIMEDischen Beweisverfahrens geführt hat. Wenn nämlich bei diesem verlangt wird, daß z. B. eine gewisse Grösse halbiert, ihre Hälfte wieder halbiert werden und „dies immer wieder geschehen soll“, so ist unter diesem immer wieder doch nur zu verstehen, daß immer auf die nämliche Weise weiter halbiert werden

2) GREGORIUS A ST. VINCENTIO, *Opus geometricum*, t. I, p. 96 unten, 97: t. II, p. 731, 736 unten, 960, 991, 997.

soll, bis der Rest einen gewissen Kleinheitsgrad erreicht hat. Gregorius wirft aber diese Forderung mit dem Continuitätsproblem zusammen und glaubt mit dem Ausdruck immer wieder sei eine unbegrenzte Teilung gemeint. So wird dieser geringfügige Zusatz die Veranlassung zur Einführung der unbegrenzten Teilung in die Geometrie[1]) und weiterhin, indem Gregorius speziell das Problem der fortgesetzten Halbierung behandelt, zur Erfindung der unbegrenzten geometrischen Progression, d. i. der ersten unendlichen Reihe.

Infolgedessen verwertet er auch speziell bei der Anwendung des Archimedischen Verfahrens überall unbegrenzte Folgen von einbeschriebenen Polygonen oder er schreibt geschlossenen Kurven unendlich viele unendlich dünne Rechtecke ein. Dies geht aus einer Menge von Stellen hervor, an denen er von einer „inscriptio (ablatio) sine fine continuata“[2]) oder deutlicher noch von einer unbegrenzten Zahl von eingeschriebenen Gebilden[3]) spricht. Daraus geht klar hervor, daß Gregorius das eigentlich Überzeugende an dem Archimedischen Verfahren gar nicht verstanden hat. Wenn seine Methode tatsächlich kürzer ist als dieses, so rührt das nicht von der Einführung der unbegrenzten Folgen her, die ja gar keinen Zweck hat, sondern erklärt sich einfach dadurch, daß prinzipiell wichtige Dinge wie das mehrerwähnte Kriterium für Flächen- und Längenzahl gar nicht erwähnt werden. Der Mangel an mathematischer Strenge, die unnötige Verquickung mit dem Problem der unbegrenzten Teilung machen also die Exhaustionsmethode, wie sie Gregorius selbst nennt, ziemlich wertlos; „exhaurire“ heisst er nämlich das allmähliche Ausschöpfen einer Fläche durch beständige Hinwegnahme einzelner Flächenstückchen, die nach und nach bis auf einen kleinen Rest die ganze Fläche ausmachen. Es ist dabei wohl zu beachten, daß dieser Begriff des Ausschöpfens vor Gregorius nirgends vorkommt, weshalb das Verfahren der Alten ganz mit Unrecht so häufig als Exhaustionsmethode bezeichnet wird. Wir haben bereits früher erwähnt, daß Pascal den bei der Exhaustion auftretenden Rest, wenn er hinlänglich klein geworden ist, einfach vernachlässigt und so zu der Zerlegung eines Gebildes in unendlich kleine Elemente gelangt.

Die Methode der Körpermessung selbst ist bei Gregorius eine zwei-

1) *Opus geometricum* t. I, p. 51. „Occasionem huic considerationi subministrarunt nonnulla, cùm in Archimede, tum in Euclide loca, quae iubent in constructione Geometrica, auferri (verbi gratia,) ab aliqua quantitate dimidium, & huius iterum dimidij dimidium, & pro clausula adfertur, & hoc semper fiat. Titillauit me haec particula, & coëgit morosiore cogitatione circa haec versari.“

2) Ebenda t. II, p. 961, 963.

3) Ebenda t. II, p. 736, 739. Sehr interessant ist die Stelle p. 738: „ducantur infinitae, (*hoc est quotcunque*) aequidistantes“.

fache. Die eine, die in dem Buche über den „ductus plani in planum" gelehrt wird, beruht auf der Erkenntnis, daß zwei Körper von gleicher Höhe, deren sämtliche Schnittfiguren senkrecht zur Höhe Rechtecke sind, dann inhaltsgleich sind, wenn in gleichen Höhen geführte Schnitte einander gleich sind. Das ist ein spezieller Fall des Cavalierischen Hauptsatzes, doch sind bei Gregorius die betreffenden Körper nicht von vornherein gegeben, sondern müssen erst durch den Prozeß des „dnctus plani in plannm"[1]) erzeugt gedacht werden. Der Unterschied der Darstellungsweise des Gregorius und Cavalieris ist so groß, daß ich eine gegenseitige Beeinflussung beider Forscher für ausgeschlossen halte. Den Beweis dieses oder vielmehr eines noch spezielleren Satzes führt Gregorius durch Einschreibung unbegrenzt vieler Parallelepipede und Anwendung der Archimedischen indirekten Schlußweise.

Handelte es sich bei dieser ersten Methode um eine Teilung in unbegrenzt viele Elemente mit Berücksichtigung des dabei entstehenden Restes (Fehlers), so bedient sich die zweite einer unbegrenzten Folge von ein- oder umschriebenen Figuren und wendet dann die Archimedische Schlußweise oder nach Art des Valerius einen allgemeinen Satz an. Ein häufig henutztes[2]) Theorem ist z. B. folgendes[3]): Sind zwei Strecken AB und CD in Punkten $E, G, I, \ldots$ bezw. $F, H, O, \ldots$ derart geteilt, daß $AE:EG:GI\ldots = CF:FH:HO\ldots$, und ist gleichzeitig keine Teilstrecke kleiner als die Hälfte der unmittelbar vorhergehenden (damit die Teilpunkte den Punkten B hezw. D beliebig nahe kommen), so ist anch $AB:CD = AE:CF$.

Der Beweis dieses Satzes findet sich in dem Buch über geometrische Progressionen[4]), das für die Geschichte des Grenzbegriffes sehr wichtig ist, da Gregorius dort demselben am nächsten kommt. Die Summation der unbegrenzten geometrischen Progression gelingt ihm durch den Kunstgriff, dass er (Fig. 2) nicht von einer Strecke AB ausgehend weitere Pnnkte $C, D, E, \ldots$ derart konstruiert, daß $AB:BC = BC:CD = CD:DE\ldots$, sondern eine gegebene Strecke AK in einem Punkt B nach einem bestimmten Verhältnis teilt, dann das Stück BK nach demselben Verhältnis in C teilt u. s. f. Dann erhält er ebenfalls eine Folge von Strecken AB, BC, $CD, \ldots$, die eine geometrische Progression bilden und, falls nnr die

A B C D E K

Fig. 2.

1) Man sehe darüber bei Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* II², S. 893.
2) Z. B. *Opus geometricum* t. II, p. 961; vgl. II, p. 997.
3) Ebenda t. I, p. 119.
4) Ebenda t. I, l. II. Von Wichtigkeit sind nur p. 51—56 und p. 95—97.

beiden ersten Terme übereinstimmen, mit der vorigen Folge durchaus identisch ist. Diese zweite Behandlungsweise, auf die Gregorius durch das Problem der fortgesetzten Halbierung einer Strecke gekommen ist, bietet aber den wesentlichen Vorteil, daß man sofort sehen kann, daß die auf die erste Weise konstruierten Punkte $C, D, E \ldots$ alle zwischen A und K liegen. Sie kommen zwar beliebig nahe an den Punkt K heran, können ihn aber nie erreichen, eine Anschauung, die mit dem Grundsatze der scholastischen Philosophie über unbegrenzte Teilung ganz und gar übereinstimmt. So bildet der Punkt K nach Gregorius' Auffassung gewissermaßen ein Hemmnis für das weitere Vordringen der Punkte $C, D, E, \ldots$ ähnlich einer festen Wand, wie aus folgender Definition zu entnehmen ist: „Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, *licet* in infinitum continuetur; sed quovis interuallo dato propiùs ad eum *accedere* poterit."[1]) Unter „series" ist dabei die Strecke AK, unter progressio jede der Strecken AB, AC, $AD, \ldots$ zu verstehen. Von größter Wichtigkeit ist hiebei die Vorstellung, daß sich die Punkte $C, D, E, \ldots$ dem Punkte K nähern, an ihn heranrücken; und es ist höchst eigentümlich, daß sich eine Bewegungsvorstellung[2]) gerade nur in die Untersuchung über die geometrische Reihe einzuschleichen vermochte, obwohl Gregorius doch auch sonst oft genug ähnliche Teilungen oder Abtrennungen vornimmt. Die Erklärung hierfür ist in dem Umstand zu suchen, daß Gregorius seine für die damalige Zeit wirklich ganz neue Idee der Summation einer unendlichen Reihe an dem berühmten Paradoxon Zenons prüfte, das sich gerade auf ein Bewegungsproblem bezieht. Achilles verfolgt eine Schildkröte, die einen gewissen Vorsprung besitzt. Bis er die Länge dieses Vorsprungs zurückgelegt hat, ist auch die Schildkröte wieder ein Stück vorwärts gekommen. Achilles durchläuft auch diese Strecke, aber auch die Schildkröte war nicht müssig und immer, bis Achilles den ihn noch von der Schildkröte trennenden Raum durchmessen hat, hat auch diese wieder einen kleinen Vorsprung gewonnen, und Achilles wird daher die Schildkröte nie einholen könnien. Zenon hat vollkommen recht mit seiner Behauptung; denn so wie er die ganze Sache behandelt, wird nur *der* Abschnitt der Bewegung ins Auge gefaßt, der vor sich geht, solange Achilles die Schildkröte noch nicht erreicht hat. Was während der folgenden Zeit geschieht, das wird gar nicht in die Untersnchung mit hereingezogen. Dann ist aber Zenons Behauptung nichts als eine Trivialität. Ganz ähnlich wäre z. B. folgender Fall: Gesetzt, es würde jemand den Begriff der

---

1) *Opus geometricum* t. I, p. 55.

2) Vgl. auch die Vorstellung, daß die Punkte $C, D, E, \ldots$ den Punkt K nicht „transilire" können; ebenda t. I, p. 97.

negativen Zahl nicht kennen und trotzdem in der analytischen Geometrie eine Gerade nur durch eine einzige Gleichung ausdrücken, so würde der Betreffende das Paradoxon zweier nichtschneidender Geraden in der Euklidischen Geometrie aufstellen, weil er eben die Geraden beim Gebrauch einer einzigen Gleichung nicht in ihrem ganzen Verlauf zu verfolgen imstande wäre. Gregorius gibt auch eine Erklärung dieses Paradoxons, die aber dem Mathematiker unverständlich bleibt.

So also wurden Bewegungsvorstellungen in die Frage der fortgesetzten Teilung hineingetragen; die Einsicht, daß auch einer unbegrenzten geometrischen Progression noch ein bestimmter Wert zukommen kann, wurde bei Gregorius einerseits durch den Kunstgriff erweckt, von einer gegebenen Strecke auszugehen und diese in infinitum zu teilen; denn dabei konnte er direkt aus der Figur ablesen, daß die unbegrenzt vielen Teilstücke zusammen die gegebene Strecke d. i. einen ganz bestimmten endlichen Wert ausmachen. Andrerseits mag er durch das Problem von Achilles und der Schildkröte völlige Sicherheit gewonnen haben. Denn hier tritt die Strecke zwischen Ausgangs- und Treffpunkt der beiden als unbegrenzte geometrische Progression auf, und diese Strecke existiert doch ganz evident.

Das Resultat der ganzen Untersuchung ist in dem wichtigen Satz enthalten[1]): „Dico magnitudinem AK aequalem esse toti progressioni magnitudinum continuè proportionalium, rationis AB ad BC in infinitum continuatae; siue quod idem est, rationis AB ad BC in infinitum continuatae terminum esse K." Gregorius erkennt also die hohe Bedeutung dieses Punktes K vollkommen; das wichtige „quod idem est" beweist, daß er Existenz und Lage eines Grenzpunktes als Kennzeichen von Existenz und Wert der unendlichen Progression ansieht. Gregorius hat die ganze Untersuchung allerdings von rückwärts begonnen, insofern als er schon von der fertigen Summe AK ausging, das kann aber den Wert des Resultats in keiner Weise beeinträchtigen und war höchstens insofern nachteilig, als Gregorius deshalb zu einer Übertragung seiner neuen Ideen auf analoge Verhältnisse nicht gelangt ist.

Diesen Schritt tat Tacquet, der Schüler des Gregorius. In seinen *Elementa geometriae planae ac solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*[2]) bringt er die sehr allgemein gehaltene Definition[3]): „Magnitudines figurae alicui inscriptae, aut circumscriptae, siue figurâ minores vel maiores, in figuram desinere dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt

1) *Opus geometricum* t. I, p. 97.

2) Mir stand leider nur die 2. Auflage von 1665 zur Verfügung. Die erste erschien in Antwerpen 1654 nach Poggendorff, *Biogr.-lit. Wörterbuch* II, 1064—65.

3) *Elementa*, p. 255.



quantitate minori quâcunque datâ, seu qnantumuis paruâ." Man beachte an dieser Definition das Auftreten des Wörtchens „tandem"[1]) und in Übereinstimmnng damit den einigermaßen auffälligen Zusatz „seu qnantumnis parua". Am interessantesten ist aber die Ausdrncksweise „desinere in figuram", die gleichzeitig den Begriff der Grenze und der allmählichen Annäherung an dieselbe enthält; besonders deutlich verrät sich die der Definition zugrunde liegende Bewegungsvorstellnng[2]) durch den Gebrauch von „in" mit Accusativ.

Verwertet wird diese Definition in folgendem „porisma universale"[3]): Wenn zwei veränderliche Figuren, welche zwei anderen, festen Figuren eingeschrieben sind, dieselben zur Grenze haben (desinere), und immer dasselbe Verhältnis untereinander besitzen, so kommt auch den beiden festen Figuren dasselbe Verhältnis zn. Ähnlichen Sätzen sind wir bereits bei Valerius und auch bei Gregorius begegnet; aber erst der Begriff der Grenze gestattet eine wirklich klare und übersichtliche Formnlierung derselben. So zeigt sich Tacquet auch in ihrer Anwendnng viel sicherer, zielbewußter und verständlicher als jene beiden.

Dieser Fortschritt war so bedeutend, daß Tacquet es sogar wagen durfte, die Vorstellung des allmählichen Übergehens einer Größe in eine andere auf das Gebiet der Arithmetik zu übertragen. Er zeigt nämlich in seiner *Arithmeticae theoria et praxis*[4]), wie man die Summenformel für eine geometrische Progression von endlicher Gliederzahl ohne weiteres anf unbegrenzte Progressionen übertragen kann. Er geht einfach von dem Gedanken aus, daß in der Formel

$$(1 - q) : 1 = (a - aq^n) : (a + aq + \ldots + aq^{n-1})$$

das Glied aq^n mit unbegrenzt wachsendem n verschwindet[5]), wenn $q < 1$ ist, so daß die neue Formel entsteht:

$$(1 - q) : 1 = a : \sum_0^\infty aq^\nu$$

1) Vgl. anch p. 257, 273, 286, 287, 305.

2) Eine solche liegt auch folgender Stelle zugrunde: Tacquet stellt zunächst zwei Grenzen für π anf und fährt dann fort: „limites iam statntos arctare poterimus, magis magisq; sine termino, atque ita *propius* in infinitum ad veram proportionem *accedere*" (*Elementa*, p. 289).

3) *Elementa*, p. 258

4) Mir stand die Anflage von 1683 zur Verfügung.

5) *Arithmeticae theoria et praxis*, p. 349: „cnm in progressione per decrescentes in datâ proportione terminos in infinitum continuatâ, minimus terminus *evanescat*." Tacquet verweist hierbei auf die *Elementa*, p. 195.

Diese Schlußweise ist von höchster Wichtigkeit; wir treffen sie in ausgedehntestem Maße angewandt bei WALLIS. Will dieser z. B.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \nu^2}{\sum n^2}$$

berechnen, so bildet er der Reihe nach[1])

$$\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

usw.

WALLIS stellt nun zuerst die allgemeine Form des Überschusses über die Zahl $\frac{1}{3}$ fest und fährt dann fort: „Cum autem crescente numero terminorum, excessus ille supra subtriplum ita continuo minuatur, ut *tandem* quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum *procedatur*, prorsus *evaniturus* est“. In dem Wort „procedere“ liegen dieselben Bewegungsvorstellungen, wie wir sie schon bei GREGORIUS kennen gelernt haben, dessen *Opus geometricum* WALLIS nach eigner Aussage kannte.[2]) Ob WALLIS und TACQUET unabhängig voneinander auf diesen Gedankengang kamen, konnte ich nicht feststellen; die *Arithmetica infinitorum* erschien erstmalig 1655, TACQUETS *Arithmeticae theoria et praxis* 1656.[3])

Somit können wir also folgende Hauptmomente in der Geschichte der Entstehung des Grenzbegriffes konstatieren: ARCHIMEDES benützt zur Vergleichung krummliniger Gebilde ein Verfahren, das von dem Gedanken ausgeht, daß zwischen krummlinigen Gebilden von vornherein keinerlei metrische Relationen bestehen; man kann sie zunächst nur durch Ungleichungen zueinander in Beziehung setzen. Der Beweis bei ARCHIMEDES ist indirekt und völlig elementar; er macht insbesondere keine Verwendung von Grenzbegriff oder Grenzübergang. LUCAS VALERIUS erhebt das ARCHIMEDische Verfahren zu einer wirklichen Methode und bringt dadurch, daß er den wesentlichen Teil des Beweises durch Anwendung einiger allgemeiner Sätze überflüssig macht, nicht nur eine bedeutende Abkürzung, sondern auch eine völlige Verschiebung des Beweisgangs hervor; denn durch dieses Vorgehen wird der vorbereitende Teil des Beweises in den Vordergrund

---

1) WALLIS, *Arithmetica infinitorum* (1655), pr. 19.

2) Ebenda, Dedicatio.

3) Nach einer gütigen Mitteilung des Herrn G. ENESTRÖM haben die Herren H. BOSMANS und CH. LAMBO konstatiert, daß auch diese erste Auflage bereits die erwähnte Ableitung der Summe einer unendlichen geometrischen Progression enthält.

gerückt. Auch bei Gregorius a St. Vincentio findet sich der Hauptabschnitt des Beweises meist umgangen; außerdem ändert aber auch der vorbereitende Teil seine Gestalt ganz wesentlich durch Einführung unbegrenzter Folgen, zu der Gregorius durch ein Mißverständnis des Archimedischen Verfahrens, beinflußt vom Continuitätsproblem der scholastischen Philosophie veranlasst wird. In einem ganz speziellen Fall zieht Gregorius Bewegungsvorstellungen in die Untersuchnng herein und kommt zum Begriff des Grenzpunktes, der das Hemmnis für ein weiteres Vordrängen einer Reihe von immer näher an ihn heranrückenden Punkten bildet. Tacquet überträgt diese neuen Ideen auf andre geometrische Probleme und macht bereits einen rein arithmetischen Grenzübergang, wie sich solche in der Folge bei Wallis fortwährend finden. Es wäre noch der englische Mathematiker James Gregory zu erwähnen, der in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura* den Grenzübergang als eine selbständige arithmetische Operation und als ein bequemes Mittel zur Definition neuer Zahlen ansieht, die nicht zu den gewöhnlichen Irrationalitäten gehören. Diese Ansicht, die nur dadurch entstehen konnte, daß die mathematischen Grundbegriffe nicht genügend streng und scharf festgelegt waren, blieb bekanntermaßen bis ins vorige Jahrhundert herein die herrschende.

Vielleicht hat diese Darstellung zu zeigen vermocht, wie langsam und zähe die Entwickelung des Grenzbegriffes und die Erfindung des Grenzüberganges vor sich gingen [1]); man ist daher überrascht, in einigen Fällen scheinbar schon lange vor Gregorius und Tacquet den Grenzbegriff auftreten zu sehen. Ich habe insbesondere folgende Stelle bei Stifel [2]) im Auge, in der man eine Art Grenzbegriff erblicken wollte: „Recte igitur describitur circulus mathematicus esse polygonia infinitorum laterum ... *Ante* circulum mathematicum sunt omnes polygoniae numerabilium laterum, quemadmodum ante *numerum* infinitum sunt omnes numeri dabiles.“ Um diese Stelle richtig zu verstehen, müssen wir auf den Begriff der Grenze selbst eingehen. Derselbe basiert nämlich, solange der allgemeine Irrationalitätsbegriff fehlt, auf dem Begriff des uneigentlich Unendlichen. In der Geometrie werden ihm daher mechanische Vorstellungen bezw. Begriffe wie verschwindend klein und unbegrenzt wachsend entsprechen. Der Begriff der Atome hingegen als fertiger, fester, letzter Größen hat mit diesen Begriffen gar nichts zu tun, sondern hängt mit dem Begriff des eigentlich Unendlichen zusammen. Nun kann es sich überall da, wo der Kreis als Unendlichvieleck auftritt, nur um eine atomistische Auffassung handeln.

1) Einige Grenzübergänge bei Galilei wurden nicht erwähnt, weil sie weder Verständnis noch Nachahmung fanden.

2) *Arithmetica integra* (1544), p. 224.

Denn man kann ein Kurvenstück doch nur aus den festen, fertigen Atomen und nicht aus werdenden, verschwindend kleinen Grössen zusammensetzen, da letztere doch gar nicht als bestimmte fertige Gebilde existieren. Daß es sich in dem obigen Zitat um den Begriff des eigentlich Unendlichen handelt, beweist ferner der Ausdruck „numerus infinitus", d. h. das Unendliche ist als ganz bestimmter fester Zahlenwert gedacht. Ferner ist mit den Worten „Ante circulum mathematicum . . ." doch keineswegs ausgedrückt, dass der Kreis aus den Polygonen hervorgeht; im Gegenteil, es ist lediglich gesagt, daß alle gewöhnlichen Polygone eine geringere Seitenzahl haben als das Unendlicheck, d. h. daß eben das Unendliche größer als jede gewöhnliche endliche Zahl ist. Liegt aber dieser Anschauung der Begriff des eigentlich Unendlichen zugrunde, so darf man auch keinen Grenzbegriff dahinter suchen, der ja, wie oben erwähnt, immer die Vorstellung eines uneigentlich Unendlichen voraussetzt. Und in der Tat, es wäre auch wunderbar, wenn der Grenzbegriff, einmal in der Mathematik vorhanden, wieder verschwunden wäre; diese vereinzelten Versuche, wie der STIFELS, wurden nämlich nicht weiter nachgeahmt, während die viel weniger sicheren und zielbewußten Untersuchungen von GREGORIUS und TACQUET rasche Ausbildung und allgemeine Verbreitung fanden.

Neue Beiträge zur Biographie von Wolfgang und Johann Bolyai.

Von LUDWIG SCHLESINGER in Klausenburg.

Als unsere Fakultät im Jahre 1899 den Beschluß faßte den hundertsten Jahrestag der Geburt JOHANN BOLYAIS festlich zu begehen, wurde ich mit der Aufgabe betraut, das Geburtshaus JOHANNS zu erkunden.

Bei Gelegenheit dieser Nachforschungen war Herr L. BODOR so freundlich, das in seinem Besitze befindliche Archiv seines Großvaters durchzusehen und fand daselbst ein Konvolut mit 35 Briefen W. BOLYAIS an P. BODOR[1]) welches er uns in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte. Diese Briefe, die aus den Jahren 1815—1825 stammen, enthalten nebst vielen rein geschäftlichen Mitteilungen doch auch manche Daten, die für die Lebensgeschichte von BOLYAI Vater und Sohn von erheblicher Bedeutung sind, und auf Grund dieser Briefe war es mir auch möglich das Geburtshaus JOHANNS endgültig festzustellen.[2]) Nachdem ich Auszüge aus diesen Briefen in der magyarischen Originalsprache im Bande **11** (1902) der Budapester Mathematikai és Physikai Lapok[3]) veröffentlicht habe, möchte ich einige besonders interessante Stellen auch dem internationalen Publikum dadurch zugänglich machen, daß ich dieselben im folgenden in deutscher Übersetzung mitteile.

Die meisten Briefe tragen die französische Aufschrift:

a Monsieur

Monsieur PAULE BODOR
Controlleur de la Caisse Provinciale
de Transilvanie

a Clausenbourg,

nur einer zeigt eine magyarische Adresse.

---

1) P. BODOR war Kontrollor der siebenbürgischen „delegata provincialis cassa", der besonders lebhaftes Interesse für Literatur und Theater hatte, auch selbst schriftstellerisch tätig war. Besondere Verdienste erwarb er sich um die Begründung des Klausenburger Nationaltheaters, als Kassierer der Bau-Kommission (um 1815).

2) Dieses Haus (jetzt Klausenburg, Tivoligasse 1) befand sich zur Zeit der Geburt JOHANNS (1802) im Besitze von W. BOLYAIS Schwiegervater J. BENKÖ und wurde 1816 von dessen Witwe, geb. JULIANE BACHMANN, verkauft.

3) p. 197—230.

2. Ohne Datum (dem Inhalte nach Ende 1815 oder Anfang 1816).

.... JOHANNS Geige ist auf dem Wege zur Weinlese, weil sie ohne Futteral war, zerbrochen; ich verspreche, daß wir die Deine niemals mit auf den Weg nehmen, wenn Du sie ad summum auf anderthalb Jahre sobald als möglich hergibst; ich schicke sie heil zurück; darüber hinaus brauchen wir sie nicht, da ich JOHANN dann zu GAUSS bringe.

7. Maros-Vásárhely, 1816, 23. Febr.

.... Gestern hat JOHANN mit Erlaubnis der Ober-Kuratoren mit den Studenten in der Physik eminenter zensuriert; abgesehen davon, daß er aus dem Auctor ad aperturam von anderen geprüft wurde, antwortete er aus der Physica sublimior überall mit großer Fertigkeit, Sauberkeit und *Bescheidenheit* — und zwar antwortete er lateinisch[1]).

10. Ohne Datum. (Da dieser Brief unmittelbar nach dem Verkaufe des BENKÖschen Hauses geschrieben ist, dürfte er gegen Mitte April 1816 zu datieren sein.)

.... Graf ADAM KENDEFFI hat von selbst die Gnade gehabt meinem Sohne, für die Zeit, wann er zu GAUSS reisen wird, seine Hülfe zu versprechen.

13. Maros-Vásárhely, 1816, 3ᵗ. 9^{bris}.

.... Gut, daß ich Arbeit habe, ich unterrichte und lasse an einigen Orten Öfen machen, sonst würde ich tief in die Hypochondrie verfallen. Du könntest ein paar sonderbare Öfen sehen — wenn ich soviel freie Zeit hätte, und mich die Sorgen des Lebens nicht aus meinen Träumen aufschrecken würden, vertiefte ich mich in irgend ein Mathematicum oder Poëticum; so ist auch dies nicht möglich ....

Ich habe fünf Trauerspiele fertig (unter fertig verstehe ich per se nicht perfectum ad unguem, in diesem Sinne wären sie niemals fertig) circiter fünfzig Bogen geschrieben; auch etwas mathematisches ist vorhanden; das ist auch ebensoviel geworden; aber jene möchte ich sub anonymo drucken lassen, so daß es nur wenige wissen .... Drei haben historische Sujets; wüßte ich, daß die Sache dieses Konkurses ernst ist, so würde ich sie einsenden[2]) ....

1) Vgl. hierzu *Gauss-Bolyai Briefwechsel* p. 99, Brief vom 10. April 1816.

2) Der „Konkurs" von dem die Rede ist, war ein 1814 zur Eröffnung des Klausenburger Nationaltheaters ausgeschriebener dramatischer Preis von 1000 rhein. Gulden. Die fünf Trauerspiele BOLYAIS sind 1817 in Hermannstadt erschienen; dies ihre Titel: 1) Pausanias, oder das Opfer des Ehrgeizes, 5 Aufzüge; 2) Mohammed, oder der Sieg des Ruhmes über die Liebe, 3 Aufzüge; 3) Simon Kemény, oder das Opfer der Vaterlandsliebe, 3 Aufzüge; 4) Der Sieg der Tugend über die Liebe; 5) Der Sieg der Liebe über die Tugend.

14. Ohne Datum.

.... Ich habe die eingesandten Pièçen zurückverlangt, und viel darin korrigiert, da ich gegen die fides historica furchtbar verstoßen habe, so verbessert sende ich sie Dir durch eine dritte ergänzt, die vorne angeheftet ist; wenn Du willst, so lies sie; .... in der Vorrede zu allen fünf Tragödien, die schon fertig abgeschrieben sind und in einem Stück erscheinen werden, motiviere ich die Anonymität .... in Zukunft lasse ich mich auf solche Narrheiten nicht wieder ein, ich kehre zu meiner Gemahlin der Mathesis zurück und gebe einige Dinge, die ich habe, heraus, verschwende aber meine Kräfte nicht auf Nenes. Was das Poetisieren anlangt, so wäre es geradezu närrisch [fortzufahren] bis ich mich nicht (mit den fünf Pièçen) im Spiegel gesehen habe, wie ich bin ....

16. Maros-Vásárhely, 1817, 2. Apr.

.... Ich bin elend genug, ... Die Erde wird mir zur kahlen Wüste — nur die frostige Pflicht hält mich noch hier, und auch diese (so beginne ich zu fühlen) wird von nun ab meinen Leiden nicht die Wagschale halten — als hätte mir das Schicksal meinen Sohn als Kette gegeben, die mich im Gefängnis zurückhält ....

17. Maros-Vásárhely, 1817, 3t. Julii.

Lieber Freund!

.... Aus zuverlässiger Quelle erfahre ich, daß von den geprüften Pièçen eines für schlecht, die übrigen für gewöhnlich erklärt wurden, und daß unter den letzteren SIMON KEMÉNY war. — Was seither noch geprüft worden ist, weiß ich nicht; ich hätte nur gerne Geld bekommen mögen, im übrigen alteriert es mich wenig; denn indem ich verloren habe, habe ich das gewonnen, daß mir, ehe es zu spät ist, und ehe ich weiter gegangen wäre, gezeigt wurde, daß ich nicht auf dem rechten Wege bin. — Ich verlange nnr zu wissen, wo ich irgend etwas nützen kann, und wenn ich erfahre, wie groß mein Radius ist, sei er auch noch so klein, so betrachte ich es als Ruhm nnd Größe, über diesen nicht hinaus strebend meine enge Bahn zu beschreiben. Zu dieser Erkenntnis trägt noch mehr das hier beigelegte Onus naturae depositum bei, welches ich dem Publikum vorlegte, mich selbst verbergend .... Meinen Sohn kann ich in diesen bedrängten Zeiten unmöglich hinauf schicken ....

Meinen Sohn bringe ich nicht in die Ingenieur-Akademie, wo gewiß bis jetzt ein solches Lumen noch nicht gewesen wäre; ich habe von BODOKI eine sehr hnmane Antwort erhalten; er schreibt, daß auch der Sohn des KARL H. in keine höhere als die IV. Klasse aufgenommen

wird und selbst, wenn er so viel Mathesis wüßte wie HAUSER[1]) selbst; auf diese Weise brauchte ich noch circiter 8 Tausend rhein. Gulden: Consequenter lasse ich [ihn?] im 7ber subskribieren. Er hat sich ganz allein aus allen drei Stücken des HAUSER vorbereitet nm in Wien dentsch zu zensnrieren. „Armnt legt Blei".

19. Ohne Datnm.

Lieber Freund!

. . . . LENGYEL[2]) hat mir die nicht prämiierten Piècen zurückgeschickt, kein Geld und kein Lorbeer, kein Ersatz für die verschwendete Zeit und das verschwendete Papier. —

21. Maros-Vásárhely, 1819, 14t. Junii.

. . . . Die Hysterie hat meine Frau ganz erdrückt; ich hätte die Keime dieses höllischen Gewächses von Hysterie schon in ihrer Mädchenzeit erkennen können, wenn ich in der Botanik der Ufer des Cocytus bewandert gewesen wäre, — jetzt ist es horrende gewachsen, der Gärtner war gut (Du weißt wer die Mater ist), Luft und Boden waren Armut nnd Faten — überdies hat auch meine Hypochondrie dazu beigetragen und die Sehnsucht nach dem JOHANN . . . . genug, meine Frau ist ganz darnieder, schläft Wochen lang nicht, nimmt ab, wird schwach, ist furchtbar unruhig, fürchtet den Tod, läßt sich ganz gehn . . . . ruiniert sich nnd ihre ganze Umgebnng — es ist nicht tödlich, aber schlimmer als der Tod, denn SZOTYORI[3]) fürchtet Wahnsinn; . . . . JOHANN schreibt schon seit dritthalb Monaten nicht, obwohl er nachgerade anf meine vielen Briefe antworten müßte, kürzlich sind auch FRANZ KEMÉNY, TELEKI und PETRASKO herunter gekommen[4]) wovon er Kenntnis hatte — wenn er nnr nicht krank ist — die Sache ist nicht in Ordnung; aber meiner Frau sage ich nichts davon, damit ihr nicht noch etwas zustößt . . . .

Durch LILI[5]) habe ich Dir geschrieben, daß Du pränumerieren lassen sollst, wenn möglich könnte LILI anch Frau GYÁRFÁS darum bitten; nächste Woche erscheint es ganz, für 2 rhein. Gulden gebunden: *POPES „Essay on man"*, als Anhang einiges aus anderen Poëten, alles aus dem

1) MATTHIAS Freiherr von HAUSER († 1826), Oberst des k. k. Ingenieurkorps, verfaßte ein in mehreren Anflagen erschienenes Werk: *Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik* in 3 Teilen: 1) die allgemeine Rechenkunst, 2) die Meßkunst, 3) die Einleitung zur höheren Geometrie.

2) Professor am Kollegium in Klausenburg.

3) BOLYAIS Hausarzt.

4) d. h. von Wien nach Siebenbürgen.

5) BODORS Tochter.

Englischen übersetzt, ausgenommen Schillers Ideale, [an die] Freude, Glocke und Resignation, der Schluß der letzteren gemildert. — Die Schillerschen Sachen sind in Versen, in ähnlichen wie das Original[1]) ....

21 a. Maros-Vásárhely, 3t. 7bris 1819.

.... Mein Sohn hat mir zwei Bände mit Zeichnungen geschickt; sie sind über Erwarten gut; Köpfe, Hände, Füße, ganze Körper, aber nur Konturen; zum Herbst verspricht er auch schraffierte und granierte zu schicken ....

Im Pope steckt mein Geld, ich kann ihn nicht distrahieren: .... vielleicht schreibe ich an Szentgyörgyi, er möge die V Trauerspiele, den Pariser Prozeß[2]) und Pope in der Zeitung publizieren lassen ....

23. Maros-Vásárhely, 1821 d. Martii.

.... Von meinem Sohne höre ich gute Nachrichten; er ist auch im Zeichnen gut, jetzt ist er hinein gekommen; in der Musik ist nur einer etwas besser, und der nimmt bei Meiseler, dem ersten Geiger in Wien, per 5 rhein. Gulden die Stunde Unterricht; mein Sohn ist natürlich nicht in der Lage Stunden zu nehmen, aber dieser eine, der etwas besser spielt als er, nimmt ihn Sonntags mit zu Meiseler, wo sie mit noch einem vierten die schönsten Quartette machen; das ist ihm eine gute Übung ohne Kosten. In Bezug auf Studium und Talent distinguieren ihn der General und die übrigen Offiziere und Professoren; ich weiß es aus gewissen Daten.

Über die Forst-Inspektion[3]) schreibt Szentgyörgyi, daß die Sache noch in Schwebe sei, und daß auf mein Gesuch noch keine Antwort gekommen ist. Ich möchte gerne magyarisch etwas über das ganze Forstwesen herausgeben (besonders über die Holzsparung) ...., auch einen Traktat mit Abbildungen über die Öfen .... Zwei von meinen früheren Ofenmodellen, will ein fremder Herr nach Wien bringen, der Töpfer macht sie jetzt ...., aber dies Jahr habe ich ein neues und viel besseres Modell erdacht und ausführen lassen.[4]) ....

24. Maros-Vásárhely, d. 15. Julii.

Meiner armen Frau ging es besser, sie war außer Bett, ging umher, aß gut und hatte keine Schmerzen, jetzt liegt sie wieder seit zehn Tagen,

1) Erschienen 1818 in Maros-Vásárhely.

2) „Der Pariser Prozess, ein sentimentales Spiel in 5 Aufzügen" erschien anonym 1818 in Maros-Vásárhely.

3) 1820 bewarb sich Wolfgang Bolyai um die Stelle eines ärarischen Forstinspektors im Ober-Weißenburger Komitat, vergl. Bedöházy, *A két Bolyai* (1897) p. 76.

4) W. Bolyai soll auch eine Art Automobil (Draisine) konstruiert haben, womit er auf den Landstraßen umherfuhr.

das ganze Haus hat Tag und Nacht ihretwegen keine Ruhe, sie weint, schreit, stöhnt und flucht . . . . wir sind durch die Schlaflosigkeit ganz heruntergekommen, ...

Lengyel schreibt, daß Graf A. Kendeffi die Güte haben wollte für meinen Sohn 250 rhein. Gulden zu applacidieren; . . . . die Frau Baronin wünscht, daß das Geld an sie geschickt werde, ... ich habe Lengyel beauftragt, daß er es durch Dich in die Hände der Frau Baronin gelangen lassen soll, die ja doch demnächst Geld für Johann nach Wien schicken muß. Dieses Geld kommt sehr zur rechten Zeit, indem ich gerade vor zwei Stunden einen Brief von Johann erhalten habe, worin er schreibt, daß alle aus seiner Klasse schon längst reiten, nur er allein nicht, was fatal ist, ...; er hatte nämlich schon im Winter geschrieben, daß der General ihn habe rufen lassen — als die Reihe noch gar nicht an ihm war — und ihm gesagt habe, daß er es sehr gerne sähe, wenn Johann auf die damalige Kavallerie-Vakanz ginge, seine Eltern möchten doch das kleine Opfer bringen — er schrieb auch damals, wie viel dieses kleine Opfer auf ein Jahr beträgt, es ist nicht einmal ganz so viel, wieviel Graf Kendeffi applacidiert hat . . . .

25. Maros-Vásárhely, 1821, d. 3t. 7bris.

. . . .

Meine Frau hatte den sehnlichen Wunsch nach Domáld hinaus zu gehen; mit großer Anstrengung habe ich sie hinaus und wieder zurück gebracht; bei aller Traurigkeit haben wir dort schöne Stunden verlebt: in einem Teile des Gartens beugen sich die Bäume unter der Last des Segens, in einem andern Teile, im Dickicht sich schlängelnde Wege, ein Bach, Wasserfälle von Fels zu Fels, als wäre man im einem Alpenwalde; bei einem Wasserfalle eine Einsiedlerhütte mit Steintisch; dort aßen wir zu Mittag, zu dritt, indem wir nämlich Johanns Bild aufstellten, rings umher mit Johann gleichaltrige Birken, die ihre Wipfel zum Himmel erheben, — und ein kleines schönes Mädchen badete unbekleidet beim Wasserfall; kleine noch nicht betrogene Eva! und wir nach dem Falle noch einmal im Paradies.

26. Maros-Vásárhely, 1821, d. 8. 7bris.

. . . .

Frater, mein Kreuz ist entsetzlich; ich fürchte meine ganze Kraft mein ganzes Feuer zu verlieren, ich tauge bald zu gar nichts mehr. Die Alte will mir auch jeden Weg versperren, auf dem ich einigermaßen aus meinem Elend heraus kommen könnte; heute sagte sie, daß sie auch für den Fall, daß ihre Tochter sterben sollte, bei ihrem Fluche bestimmt,

daß ich das Silber und die Perlen ihrer Tochter nicht verkaufen darf, sondern es dem Johann, wann er das Mannesalter erreicht haben wird, in die Hände gebe, ja, daß sie die Sachen mir nicht einmal in die Hand gibt, — sie hat sie nämlich schon längst an sich genommen — sondern unter Siegel weglegt . . . .

28. Maros-Vásárhely, 1821, d. 10. 8^{bris},

Lieber Freund!

Unter dem Kouvert des Herrn Peter Szàsz ist auch mein Brief angekommen; aber meiner armen verwaisten[1]) Alten, die ich so ansehe, als stände sie verwaist über dem Grabe ihrer 9 unglücklichen Kinder, kann ich die Sache jetzt noch nicht vorlegen; ich halte es für meine heilige Pflicht, ihre nicht alltägliche Wunde zu schonen . . .

Ich ersehe nicht aus Deinem Briefe, daß Du meinen seinerzeit . . . an Prof. Lengyel gesandten für Dich bestimmten Brief erhalten hättest, da Du auf einige Punkte desselben nicht antwortest — und auch das nicht, daß Prof. Lengyel Dir die von Graf A. Kendeffi für den Reitunterricht meines Sohnes gütigst geschenkten 250 rhein. Gulden übergeben hätte; . . . . jetzt wäre es besonders gut, dem armen Kinde, welches dort unter den Stein-Statuen allein weint, einigen Trost und Distraction zu bieten. In seinem letzten Briefe klagt er, daß er auch kein Reißzeug hat und darum die Architektur nur mit Bleistift zeichnen kann . . . . .

Mein Freund! Mein großes Kreuz habe ich, auch als Jedermann, sogar die Mutter selbst sich abwandte, mit sanfter Ergebung und Geduld getragen; ich empfand eine gewisse himmlische Befriedigung dabei, demütig stand ich unter der verwundenden väterlichen Hand — je elender sie war, um so mehr näherte ich mich ihr, und wie immer sie mich auch beschimpfte, bis in die Mitte meines Herzens beleidigte, schlug, zerrte, alles habe ich mit Sanftmut ertragen, immer nur sie bedauert. — Es gab auch solche Augenblicke, wo sie dies selbst einsah, mit solchen Worten: „Du gutherziger Sohn meines lieben Schwiegervaters Kaspar Bolyai, ich sah Deine Tränen, die Du um mich vergossen hast, dies sind meine teuersten Perlen, mit denen ich in die Morgenröte der Ewigkeit einziehe."

Wenn ich an ihre unzähligen schönen Empfindungen, nacheinander hervorströmenden schönen Reden, schönen, heiligen Gesänge und an ihre schweren Leiden denke, jammern alle Schmerzens-Saiten meiner Seele ihr nach. Du kannst es kaum glauben, ich selbst hätte es nicht geglaubt, wie es mich schmerzt; . . . .

1) Am 19. September 1823 war W. Bolyais erste Frau, geb. Susanna Benkö, gestorben.

Verklärt und mit ruhiger, tapferer Seele sah sie dem Tode ins Auge, und wie eine Heilige lächelte sie dem Tore der Ewigkeit entgegen, mit einer Freude, die nichts irdisches hervorzubringen vermag — mit einem langen Friedens- und Abschieds-Händedruck schieden wir voneinander, und wunderbares sprach sie dabei — ohne jeden Kampf wurde sie nur verklärt.

Ihrem Wunsche gemäß habe ich sie nach Domáld gebracht, und an der Stelle beigesetzt, die sie bezeichnet hatte . . . . in meinem Garten ist ein hoher Berg, und in dessen Mitte ein schöner Platz — sie hat ihre Augen verschlossen vor den Tränen, die für die meinen geblieben sind, — nach all' ihren vielen Leiden ist sie jetzt glücklich — siegreich hat sie ihren Kampf gefochten und bekränzt ruht sie nun in den Armen der Mutter Erde — sie selbst eine unglücklich glückliche Mutter, in vieler Hinsicht ein Selbstopfer für ihren Sohn, der es das Schicksal nicht gestattet hat ihr Kind, als es ihr Freude bereiten konnte, zu umarmen — und zugleich selbst ein Kind, von neunen das letzte, das eine arme Mutter verwaist zurückließ. — Möge jeder Frühling Blumen auf ihren stillen Schlaf streuen; zu dem Regen des Himmels träufle auch ich, so lange ich lebe, einige Tropfen auf sie — und wenn der leise Windeshauch die blühenden Gräser über ihr sich bewegen läßt, schweben die befreiten Fittige meiner Seele zu ihr hinauf in die Ewigkeit.

Als das Volk versammelt war, kam es mir in den Sinn, das Bild ihres Sohnes unter das ihre mit zitternder Hand anzuheften; vorher hielt ich es — als noch niemand da war — vor die geschlossenen Augen der Mutter und ließ es sie küssen — jetzt habe ich das Bild auf das Mädchenbildnis der Mutter getan, den Sohn in die Arme der Jungfrau; dies ist mein Altarbild, vor dem ich oft mit Tränen opfere.

Dein unglücklicher Freund

Wolfgang B.

30. Maros-Vásárhely, 1824 d. Jan.[1])

. . . .

P. S.

Bodor lasse ich freundschaftlich grüßen, und wünsche ihn zu sehen — wenn es noch möglich ist, daß wir uns vor unserm Grabe eine welkende Rechte reichen. — Mein Sohn schreibt aus Temesvár dicke Briefe voll Mathesis.

---

1) Dieser Brief ist nicht an Bodor, sondern an einen unbekannten Adressaten gerichtet.

31. Maros-Vásárhely, 28. Maji 1824.

. . . .

Der Zweck meines Schreibens ist ein doppelter: 1⁰ daß ich noch einmal zu Dir spreche, ehe ich auf ewig verstumme — und ehe auch Du, mit Deinen einst so musikalischen Ohren, nur allein noch die Trompete des Engels der Ewigkeit zu hören anfängst.

2⁰ Es war so bestimmt, daß Prof. Antal und ich zusammen hineingehen, um Gehaltserhöhung zu erbitten, es kam aber Gegenordre; bitte tue, was Du tun kannst . . . . Ich spreche ja kaum mehr pro mea domo; vor wenigen Tagen waren es 20 Jahre ($^1/_5$ Jahrhundert), daß ich hier verkümmere . . . damals war das Gehalt 400 ungarische Gulden in valore nominali, also soviel wie nichts . . . schmerzerfüllt sehe ich auf das unter kümmerlichen Verhältnissen hier verbrachte $^1/_5$ Jahrhundert zurück. Aber das Wohl des Landes erfordert es, daß die Lehrer besser bezahlt werden, seit einigen Jahren ist unser Gehalt 200 rheinische Silbergulden, und auch das haben wir nie . . . . accurate bekommen . . . . im ganzen Lande steht sich der Professor nicht so schlecht wie in Vásárhely; in Udvarhely ist Holz und alles andere billig, das Gehalt ist größer und wird accurate bezahlt. . . . .

Wenn Du Herrn Zeyk triffst, so kapacitiere ihn, daß ein Professor mit 200 Silber-Gulden kein Haus führen kann, so daß er dabei sich noch der Wissenschaft widmet, — billig Fleisch gibt dünne Brühe!

32. Maros-Vásárhely, 1825, 22. Febr.

. . . .

Da Du in Enyed gewesen bist, sehe ich keinen Grund, weshalb ich nicht davon schreiben sollte, daß dieses Jahr, wie es scheint, die von seinen hingeschiedenen Geschwistern hinterbliebenen Schulden abzahlen will, indem es mir meine Frau[1]) und meinen Sohn zurückgibt — repente liberalis stultis gratus est — wenn der erklärte Feind lächelt, ist er schrecklicher, als wenn er donnert — und das Fatum ist mein Feind — ich vermute, daß es mich nur darum erhoben hat, um mich, wie der Adler die Schildkröte, die er anders nicht zu zerbrechen imstande war, aus der Höhe hinabzustürzen. Soviel ist schon sicher, daß meine Frau krank war, und es wohl auch bleiben wird, selten hat sie einen guten Tag — und mein Sohn geht am 11. März weg — wahrscheinlich für immer — quasi ein Tod — nach Klausenburg kann er, so sehr wir — er und ich — es auch bedauern, nicht kommen, teils wegen der Kürze der Zeit, teils wegen Geldmangels, — ein großer, kräftiger, schöner Jüngling, die soldatische

1) Bolyai hatte sich am 31. Dezember 1824 zum zweiten Male verheiratet.

Tapferkeit mit der Schamhaftigkeit der Unschuld überhaucht, er ist kein Kartenspieler, trinkt weder Wein, noch Branntwein, noch Kaffee, raucht nicht und schnupft nicht, er rasiert sich auch noch nicht, hat nur einen Flaum — ein außerordentlicher Mathematiker, ein wahres Genie, excellenter Violinspieler — liebt von allen Ämtern am meisten das Militär; nur das Otium würde er noch vorziehen, um arbeiten zu können, hat aber auch neben dem Dienste schon sehr viel gearbeitet. Er läßt Dich grüßen. Mehr kann ich nicht schreiben. Viele Unannehmlichkeiten, man lebt schwer von kleinem Gehalt — und der tief Gefallene stellt sich schwer wieder auf die Füße.

Ich bleibe stets

Dein wahrer Freund

Mein Sohn grüßt! Wolfgang Bolyai.

33. Maros- Vásárhely, 1825, 24. Apr.

Lieber Freund!

Mit meinem Sohne bin ich Gott sei Dank wieder ausgesöhnt; er hat schon zweimal aus Temesvár geschrieben — aus diesen seinen Briefen ersehe ich auch, daß er mit heimatlichen Gefühlen auf Siebenbürgen zurückblickt — jetzt könnten in dem jungen Herzen, wie in einem leeren Tempel, sich auch die Götzen leicht einnisten, darum war es gut das Vaterland hineinzuzetzen, das, wenn das Herz erst mit anderem voll gewesen wäre, keinen Platz mehr hätte finden können. — Bitte sage data occasione alles dies dem Herrn Grafen Nicolaus Kemény, und überdies auch noch, daß mein Sohn noch von Temesvár aus um Entschuldigung bittet, daß er der Kürze der Zeit wegen und weil Se. Hochgeboren eben in Klausenburg war, nicht seine Aufwartung machen konnte. — Se. Hochgeboren ließ durch Joseph Szathmári sagen, daß er ungehalten sei, daß ich meinen Sohn nicht vorgestellt habe; ich danke sehr, daß er ihn zu sehen wünschte und daß er an meinem väterlichen Glücke Anteil nimmt, wozu er als sein wahrer Patron auch das würdigste Recht hat; ich bedauere es selbst aufs lebhafteste; verdiene aber nicht den Zorn, weiß auch daß Se. Hochgeboren viel zu gut ist, um wirklich zu zürnen; . . . . .

Ich habe auch noch eine Bitte an Dich. Da Du das Klausenburger Gesetz kennst, so bitte unterrichte mich je eher darüber 1⁰ wie viel meinem Sohne von dem zukommt, was mir von dem Nachlasse seiner Mutter bei ihrem Tode gegeben worden ist; 2⁰ Du weißt, daß meine Schwiegereltern miteinander Mutua fassio hatten; wird nun nach dem Tode meiner Schwiegermutter der ganze Anteil seiner Mutter de jure meinem Sohne zukommen? Ich glaube zwar, daß die Mutua fassio quasi testamentum ist, und folglich,

da ich darin gewiß nicht genannt bin, alles meinem Sohne gehört; 3° habe ich eine Schuld bei Herrn B. K. S. als Creditoren, die wir mit Johanns Mutter gemacht haben: die Hälfte davon muß er demnach tragen, um so eher, als ich von meiner verstorbenen Frau eine Schrift älteren Datums besitze, wonach wir alle Schulden gemeinsam kontrahieren.

Ich möchte alles genau wissen, um es ihm schreiben zu können; wenn man über alles im Reinen ist, so kräftigt das auch den Frieden, darum bitte zögere nicht mit Deiner Antwort . . . .

Durch den Besuch meiner Schwiegermutter und meines Sohnes, wie auch durch meine Heirat bin ich in großer Geld-embarras — dem Johann habe ich 200 rhein. Gulden und noch manches andere gegeben.

Meine Gattin ist eine sparsame, kluge, sittsame, schöne Frau, aber sehr schwach und kränklich — und des Lebens Sorgen drücken sehr; Gott bewahre uns nur vor Kindern! Nil est ab omni parte beatum.

Trachte in Sachen der Gehaltserhöhung, was möglich ist, zu tun; vacuus venter (curis pleno capite) non studet libenter.

Herrn Zeyk lasse ich ergebenst grüßen, sage ihm, der Joseph sei ein excellenter Junge, anders wie sein Vater; und sage ihm auch, daß mein Vulkan-Sohn sanfter geworden ist, schon zweimal hat er aus Temesvár geschrieben.

Wolfgang Bolyai.

Über Vorlesungen zur Einführung in die mathematische Literatur.

Von Felix Müller in Steglitz.

Mit dem wachsenden Interesse der Mathematiker an der Geschichte ihrer Wissenschaft hat auch die Kenntnis und die Berücksichtigung der mathematischen Literatur wieder zugenommen, allerdings erst in neuester Zeit.

Im 18. Jahrhundert und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts pflegten schöpferische Genies, wie Euler, Cramer, Lagrange, Poncelet, Cauchy, Abel, Jacobi u. a. in ihren grundlegenden Werken historische und kritische Bemerkungen über das, was ihre Vorgänger geleistet hatten, zu geben, um klarzulegen, wo ihre eigene Arbeit einsetzt. Die Epigonen der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hielten es meist nicht mehr für nötig, die Kenntnis der Originalarbeiten zu vermitteln. Vor ungefähr vier Jahrzehnten konnte einer meiner Lehrer mit Recht sagen, es sei nicht mehr Mode, in wissenschaftlichen Arbeiten diejenigen zu nennen, welche sich vor uns mit derselben Frage beschäftigt haben. Wir besitzen aus jener Zeit umfangreiche Lehrbücher mathematischer Disziplinen, auch größere Kompendien, in denen kaum eine Literaturangabe zu finden ist; höchstens zitiert der Verfasser seine eigenen Schriften. Charakteristisch für die geringe Bedeutung, welche man dem Studium der mathematischen Literatur beilegte, ist das encyklopädische „Handbuch der Mathematik" von Schlömilch (*Encyklopädie der Naturwissenschaften* I. Abt., II. Teil, Breslau 1881). Hier sind unter „Literatur" (der reinen Mathematik) nur deutsche Werke angeführt, und zwar: 6 Lehrbücher und 14 Aufgabensammlungen aus der elementaren Mathematik nebst 3 Logarithmentafeln, 9 Werke über höhere Algebra, 4 über Zahlentheorie, 17 über höhere Geometrie, 2 über algebraische und 9 über höhere Analysis, 16 über Funktionentheorie, ferner 2 Geschichtswerke, 3 mathematische Zeitschriften (Crelle, Grunert, Schlömilch) und die „Gesammelten Werke" von Gauss, Jacobi und Riemann. Solche Literaturangaben sind doch wohl für eine Encyklopädie der Mathematik zu dürftig.

Von weit größerem Werte für die Orientierung in der mathematischen Literatur ist das neuere *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur* von Rudolf Wolf (2 Bde, Zürich 1890—92). Leider ist dieses Nachschlagewerk unter unseren Fachgenossen wenig bekannt.

Daß in der neuesten Zeit wieder mehr Nachdruck auf die Kenntnis der Geschichte und Literatur gelegt wird, zeigen die größeren Referate in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und die zum Teil mustergiltigen Darstellungen einzelner Disziplinen und Methoden in der im Erscheinen begriffenen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.*

Freilich werden in den meisten Universitäts-Vorlesungen noch immer sehr spärliche historische und literarische Notizen gegeben. Nur wenige Mathematikprofessoren kümmern sich um die Arbeiten ihrer Fachgenossen. Möglich, daß die Verfolgung und Darstellung ihrer eigenen Ideen, die sich in der Regel auf einem weit abgelegenen Gebiete bewegen, ihnen keine Muße läßt, die Entdeckungen ihrer Fachgenossen auf anderen Gebieten kennen zu lernen. Aber in Rücksicht auf ihre Schüler sollten sich die Herren Dozenten etwas mehr für die Geschichte und die Literatur ihrer Wissenschaft interessieren. Die ältere mathematische Literatur ist ihnen oft ganz unbekannt. Lasen wir doch kürzlich in der Rektoratsrede eines Mathematikprofessors, das Journal de l'école polytechnique sei die *erste* mathematische Zeitschrift gewesen und Crelle habe 1826 die *erste* deutsche Zeitschrift für Mathematik gegründet. Wer in der mathematischen Literatur Bescheid weiß, der kennt die allerdings minderwertige, aber sehr umfassende englische Journalliteratur, die bis in den Anfang des 18. Jahrhunderts zurückreicht, der kennt die ältesten holländischen mathematischen Zeitschriften und die Memorie di matematica der „Società Italiana", der kennt — abgesehen von mehreren älteren kleineren deutschen Zeitschriften für Mathematik — das Leipziger Magazin für die reine und angewandte Mathematik, das von Joh. Bernoulli und Hindenburg herausgegeben wurde, in welchem Aufsätze außer von diesen beiden Mathematikern noch von Lambert, Olbers, Nic. Fuss, Kästner, Scheibel, Tetens u. a. enthalten sind. Auch weiß er, daß an Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik (1794—1800) Gelehrte wie Jac. Bernoulli, Lambert, Kästner, Scheibel, J. F. Pfaff, Klügel, v. Zach u. a. mitgearbeitet haben.

Fragt man einen Kandidaten der Mathematik nach mathematischen Zeitschriften, so weiß er deren selten mehr als zwei oder drei zu nennen. In der Hand gehabt hat er auch diese nicht, denn es ist ihm gar nicht eingefallen, neben dem in den Vorlesungen Gebotenen die Originalabhandlungen zu studieren, welche sich meist in mathematischen Zeitschriften

finden. Ein mit voller Fakultas in Physik ausgestatteter Schulamtskandidat mußte beim Hinweis auf eine Arbeit in POGGENDORFFS Annalen gestehen, daß er während seiner Studienzeit niemals etwas von dieser Zeitschrift gehört habe. Ein anderer war hochbeglückt, als er bei mühsamem Suchen nach der Literatur über BERNOULLIsche Funktionen zum ersten Male auf unser Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik hingewiesen wurde, wo er die seit 1868 erschienenen Schriften über diesen Gegenstand ohne Mühe fand. Wer trägt die Schuld an der Unwissenheit unserer Kandidaten in der Literatur?

In einem auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker zu Halle i. J. 1891 gehaltenen Vortrage habe ich bereits u. a. auf das Bedürfnis einer Einführung in die mathematische Literatur hingewiesen. Da die Erfahrungen, welche wir mit den mathematischen Kandidaten hinsichtlich ihrer Kenntnisse in der mathematischen Literatur gemacht haben, auch heute noch nicht besser geworden sind, so ist die Frage berechtigt, ob nicht Vorlesungen zur Einführung in die mathematische Literatur an unsern Hochschulen einem wirklichen Bedürfnisse entsprächen. Ein detailliertes Programm einer solchen Vorlesung würde den hier gebotenen Raum weit überschreiten. Der vorstehende Artikel soll daher nur einige Gesichtspunkte berühren, welche für solche Vorlesungen maßgebend sein dürften, und zu einem Meinungsaustausch über diese Frage anregen.

Man wird häufig, besonders in Universitätskreisen, der Ansicht begegnen, es bedürfe einer besonderen Vorlesung über die mathematische Literatur nicht, da in den mathematischen Vorlesungen selbst genügende Hinweise auf die einschlägige Literatur gegeben würden. Hier scheint mir die Frage berechtigt, welcher Art diese an die üblichen Vorlesungen zu knüpfenden literarischen Notizen sein müßten, um zu genügen. In den einleitenden und allgemeinen Vorlesungen, der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung, der Algebra, der Theorie der krummen Flächen und Raumkurven, der projektiven Geometrie, der darstellenden Geometrie, der Zahlentheorie, der bestimmten Integrale, der Theorie der totalen und partiellen Differentialgleichungen, der Funktionentheorie und Mechanik müßten verschiedene Arten von Literaturwerken zur Kenntnis gebracht werden. Erstens die einführenden Lehrbücher. Diese kennen zu lernen ist durchaus nicht überflüssig, selbst wenn man die gehörten Vorlesungen fleißig ausgearbeitet hat. Die Bekanntschaft mit anderen Methoden der Darstellung erweitert den Gesichtskreis. Bei Empfehlung von Lehrbüchern ist zu beachten, ob es dem Studierenden darauf ankommt, sich in die Prinzipien zu vertiefen, oder ob er die Methode lediglich in Rücksicht auf baldige praktische Anwendungen sich aneignen will. Für letzteren Fall ist die Lehrbuchliteratur der polytechnischen Schulen zu empfehlen.

Zweitens die Kompendien oder umfassenden Darstellnngen. Sie dienen dazu, etwaige Lücken auszufüllen, und sollen nicht ein Lehrbuch, sondern ein Nachschlagebuch sein. Die bekannten SALMONschen Lehrbücher z. B. sind mit der Zeit, besonders in ihren dentschen Bearbeitungen, zu solchen Kompendien angewachsen. Drittens Schriften, welche die logischen Prinzipien der vorgetragenen Lehren behandeln, also die Metaphysik der Differentialrechnung, den Begriff des Raumes, der Zahl, der Zeit, des Maßes, die Axiome der Geometrie und der Arithmetik, den Logikkalkul, die Prinzipien der Mechanik, den Kraftbegriff, die Grundlagen der Naturerkenntnis u. ä. Viertens die Quellenschriften, d. h. historisch wichtige grundlegende Werke und Fundamentalabhandlungen. Der Studierende muß den wirklichen Schöpfer der Disziplin oder Methode, die ihm vorgetragen wird, kennen lernen. Wer analytische Geometrie vorträgt, darf DESCARTES' *Géométrie* nicht unerwähnt lassen, noch EULERS *Introductio in analysin infinitorum*, CRAMERS *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* u. a. In der höheren Analysis und Funktionentheorie sind außer den grundlegenden Schriften von LEIBNIZ und NEWTON die älteren Werke von DE L'HOSPITAL, JOH. BERNOULLI, EULER, L'HUILIER, LAGRANGE, CAUCHY usw. zu nennen. Wer Vorlesungen über elliptische Funktionen gehört hat, muß die grundlegenden Arbeiten von ABEL, JACOBI, RIEMANN kennen. In der neueren Geometrie muß auf PONCELETS *Traité des propriétés projectives des figures*, auf STEINERS *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander* hingewiesen werden, in der darstellenden Geometrie auf MONGES *Leçons de géométrie descriptive*, in der Mechanik auf LAGRANGES *Mécanique analytique*, in der Zahlentheorie auf LEGENDRES *Théorie des nombres*, auf GAUSS' *Disquisitiones aritmeticae* usw. Der Studierende kann nicht oft genug und nicht eindringlich genug auf das Studium der grundlegenden Schriften hingewiesen werden, das ja jetzt durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften so sehr erleichtert wird. Bietet doch das Stndium der Originalarbeiten einen weit größeren Genuß, als das Ausarbeiten von Vorlesungen oder das Durcharbeiten eines Lehrbuches. Hier ist es vergönnt, einen Blick in die Geisteswerkstatt des Meisters zu werfen und mit den schöpferischen Genies selbst zu verkehren, die über dem Gegenstand stehen und freier und klarer zu reden wissen. Eine fünfte Gattung von Literaturwerken sind die Übungsbücher nnd Aufgabensammlungen. Auf sie hinzuweisen ist von besonderer Wichtigkeit. Häufig nimmt, — besonders an Universitäten, selten an technischen Hochschulen, — die abstrakte Theorie den größten Teil des Semesters in Anspruch, so daß für Übungen nnd Anwendnngen nicht genügende Zeit übrig bleibt. Oft wird in der Differentialrechnung über dem interessanten Nachweis, daß es nicht-differentiierbare Funktionen gibt, die

Übung im Differentiieren verabsäumt. Der Hörer weiß oft hernach mit der reinen Theorie, die er sorgfältig ausgearbeitet hat, bei speziellen Problemen nichts anzufangen. Auch von der allgemeinen Flächentheorie, von der Variationsrechnung und anderen Disziplinen gilt der NEWTONsche Satz: „Exempla plus prosunt quam praecepta", auf den uns damals während und nach unserer Studienzeit der „alte SCHELLBACH" wiederholt und dringlichst hingewiesen hat. Die Anwendung der vorgetragenen Theorie wird häufig dem Studierenden allein überlassen; in den Seminarübungen ist nicht genügende Zeit übrig, auch sind sie „zu schade zum einpauken und drillen". Deshalb gebe man dem Studierenden Übungsbücher und Aufgabensammlungen in die Hand. — Hieran schließt sich eine andere Gattung von Literaturwerken, die Formelsammlungen, Tabellen und Tafeln. Erstere sind gut für Repetitionen; trigonometrische, zahlentheoretische und Integraltafeln aber wird jeder benutzen. Ferner sind diejenigen, in die vorgetragenen Disziplinen einschlagenden Werke und Abhandlungen zu nennen, welche Gegenstände betreffen, die über den Rahmen der Vorlesung hinausgehen. Einzelne werden freilich in speziellen Vorlesungen behandelt, wie Invariantentheorie, Liniengeometrie, Minimalflächen, Gammafunktionen, LAMÉsche Funktionen, hyperelliptische und ABELsche Funktionen, Kugelfunktionen, Methode der kleinsten Quadrate, komplexe Multiplikation u. a. Oder sie sind Gegenstand der Seminarübungen. Jedenfalls muß dem Studierenden das Mittel in die Hand gegeben werden, sich weiterzubilden. Da diese Gebiete meistens erst in der neueren Zeit ausgebildet wurden, so muß auf die referierenden Zeitschriften, das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, das Bulletin des sciences mathématiques von DARBOUX, die Revue semestrielle des publications mathématiques u. a. hingewiesen werden, in denen die einschlägige Literatur leicht zu finden ist. Während seines Aufenthaltes auf der Universität kann der Studierende sich nur in speziellen Disziplinen bis zum gegenwärtigen Standpunkt derselben emporarbeiten. Daß er wenigstens in einer Disziplin bis zur Höhe gelangt, ist sehr wünschenswert. Bei dem sogen. Staatsexamen kann man, wegen des großen Umfangs sogar der allgemeinen Vorlesungen, nicht verlangen, daß der Examinand in allen Zweigen beschlagen sei. Wenn er hier und da Lücken zeigt, so ist das verzeihlich; aber unverzeihlich ist für einen durchgebildeten Mathematiker, wenn er nicht die Mittel und Wege kennt, sein Wissen zu ergänzen. Er muß soweit mit den literarischen Hilfsmitteln vertraut sein, daß er imstande ist, seine Lücken auszufüllen und sich weiterzubilden. Sonst hört er bald auf, ein Mathematiker zu sein.

Wir haben schließlich noch einer Gattung von Literaturwerken Erwähnung zu tun, welche in Vorlesungen sollten berücksichtigt werden: das sind die Schriften, welche die historische Entwickelung der Wissen-

schaft behandeln. Was die Entwickelung derselben bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts betrifft, so genügt für diejenigen, die sich nicht speziellen historischen Studien widmen, der Hinweis auf das Meisterwerk M. Cantors. Seine *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* sollten allerdings in der Bibliothek keines Mathematikers fehlen. Was die Zeit seit der Mitte des 18. Jahrhunderts betrifft, so muß in den Vorlesungen auf die wichtigsten neueren Schriften aufmerksam gemacht werden, welche die Geschichte des vorgetragenen Gegenstandes enthalten.

Daß sich der deutsche Universitätsprofessor bei der Auswahl der zu empfehlenden Studienwerke nur auf die in deutscher Sprache geschriebenen beschränkt, wie es in dem oben genannten Handbuch geschah, ist wohl heut nicht mehr zu befürchten. Man darf voraussetzen, daß der gebildete Mathematiker auch französische und englische, vielleicht auch italienische Schriften zu lesen versteht. Zeigen doch die französischen Lehrbücher meist ein weit größeres Geschick in der Darstellung als die deutschen, und sind die englischen Studienwerke glücklicher in der Auswahl von praktischen Beispielen.

Das Dargestellte mag genügen, um zu zeigen, bis zu welchem Grade die mathematische Literatur in den Vorlesungen zu berücksichtigen ist. Wären alle Universitätsdozenten gewillt und befähigt, so weit auf die Literatur des vorgetragenen Gegenstandes einzugehen, so dürften diejenigen, welche das Bedürfnis einer besonderen Vorlesung zur Einführung in die mathematische Literatur negieren, vielleicht recht haben. Allerdings würde eine Vorlesung, welche in systematischer Reihenfolge die Literatur der wichtigsten mathematischen Disziplinen und Methoden darstellte, eine sehr schwierige Aufgabe sein. Jedenfalls wäre sie nur für die letzten Semester geeignet, da man sonst befürchten müßte, von der Literatur solcher Disziplinen zu sprechen, die der jüngere Student nicht einmal dem Namen nach, geschweige denn inhaltlich kennt. Aus dem gleichen Grunde hat man ja auch eine für das erste Semester bestimmte encyklopädische Vorlesung über Mathematik für unmöglich gehalten.

Trotz alledem möchte ich eine für Anfangssemester bestimmte Vorlesung zur Einführung in die mathematische Literatur, sobald sie sich auf das beschränkt, was dem Verständnis und den Kenntnissen des jungen Studierenden adäquat ist, für möglich und empfehlenswert halten. Ich hoffe, daß, wenn ich über die Einrichtung und den Inhalt einer solchen Vorlesung einige Vorschläge gemacht habe, man mir auch darin beistimmen wird, daß eine solche Vorlesung sogar einem dringenden Bedürfnis entspricht.

Zunächst könnte man an Disziplinen der elementaren Mathematik zeigen, welche Arten von einschlägigen Literaturwerken es gibt. An eine

kritische Übersicht über die wichtigsten Gesamttraktate der Elementarmathematik würde sich eine ebensolche über die bekanntesten Lehrbücher des elementaren Rechnens, der elementaren Geometrie, Algebra, ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stereometrie und politischen Arithmetik anschließen. Eine derartige Übersicht wäre zugleich von großem pädagogischen Interesse. Auch die wichtigsten Aufgabensammlungen und Übungen aus allen Gebieten der Elementarmathematik wären zu besprechen, desgleichen die Tabellen und Tafeln, wie Faktoren-, Multiplikations-, Divisions-, trigonometrische und Logarithmentafeln. Bei der Einführung in die ältesten und älteren grundlegenden Werke über Geometrie, Arithmetik und Algebra wäre bei EUKLIDS Elementen länger zu verweilen. Eine gründliche Kenntnis derselben ist für jeden Mathematiker unentbehrlich; in Dänemark wird dieselbe beim Examen von jedem Lehramtskandidaten gefordert.

Ein folgendes Kapitel würde die Schriften über die Grundlagen der Geometrie, über das Parallelenaxiom, über die Axiome der Arithmetik und die Entwickelung des Zahlbegriffs u. ä. behandeln. Hieran ließe sich anschließen die Literatur berühmter Aufgaben, der Quadratur des Zirkels, der Verdoppelung des Würfels, der Dreiteilung des Winkels, der Aufgaben des PAPPUS, APOLLONIUS, MALFATTI, POTHENOT u. a. Ferner könnten verschiedene Fragen der Elementarmathematik berührt werden, für welche Verständnis und Interesse leicht zu gewinnen ist, wie die Kreisteilung, die angenäherte Konstruktion der regulären Figuren, Sternpolygone, die Transcendenz von π, figurierte Zahlen, Kettenbrüche, Maxima und Minima, magische Quadrate, mathematische Spiele, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, elementare Reihen, Exhaustionsmethode usw. Eine Übersicht über die Geschichte und Literatur dieser Gegenstände würde gewiß sehr willkommen sein.

Eine solche zunächst an den elementaren Disziplinen dargelegte Einführung in die Literatur wird den Studierenden zugleich in den Stand setzen, sich später selbst in das Studium der Literatur der höheren Mathematik einzuarbeiten. In noch höherem Maße aber werden die nun folgenden Kapitel unserer Vorlesung zur Orientierung in der Literatur der gesamten Mathematik dienlich sein.

Zunächst mag eine Übersicht gegeben werden über die älteren und neueren Versuche, die Gesamtheit der mathematischen Wissenschaften darzustellen, also über die mathematischen Wörterbücher und Encyklopädien, von OZANAMS *Dictionaire mathématique* (1691) bis zu der jetzt erscheinenden *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.*

Ein weiteres Kapitel, das ebenfalls ohne Voraussetzung von Kenntnissen aus der höheren Mathematik vorgetragen werden kann, bilden die bibliographischen Hilfsmittel. Hier sind zuerst die größeren mathematischen

Bücherverzeichnisse zu nennen, wie Murhard, Rogg, Sohncke u. a. Ferner ist hinzuweisen auf die periodisch erscheinenden allgemein-wissenschaftlichen und speziell mathematischen Bibliographien. Die wertvollen Artikel über die Bibliographie spezieller mathematischer Lehren und Theorien in der Bibliotheca Mathematica von Loria, Vivanti, Stäckel, Wölffing, sowie die schon oben erwähnten, an Literaturnachweisen reichhaltigen Referate in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung dürfen hier nicht unerwähnt bleiben. Außer der Bibliotheca Mathematica muß der Studierende die übrigen der Geschichte und Bibliographie der Mathematik gewidmeten Zeitschriften kennen, das Bulletin von Férussac, Boncompagnis Bullettino, Terquems Bulletin, das Bulletin von Darboux, unser Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, die Amsterdamer Revue, die Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, das Intermédiaire des mathématiciens usw. Für ältere Literatur kommt in Betracht Riccardis *Biblioteca matematica italiana,* und für die neuere seit 1800 der *Catalogue of scientific papers* der „Royal society" zu London.

Gegenstand eines anderen Kapitels unserer Vorlesung sind die für die Geschichte der Mathematik wichtigen Biographien verstorbener Mathematiker, Physiker und Astronomen, das *Biographisch-literarische Handwörterbuch* Poggendorffs, die gesammelten Werke bedeutender Mathematiker, die Ausgaben der Fundamentalwerke in der Sammlung der Klassiker der exakten Wissenschaften.

Ein umfangreicheres Kapitel bilden die Zeitschriften mathematischen Inhalts, deren Bedeutung für die mathematisch-historische Forschung hervorgehoben werden muß. Dieselben beginnen mit dem Journal des savants und den Philosophical transactions der Londoner „Royal society" i. J. 1665. Sie lassen sich gruppieren in Zeitschriften mit vorwiegend mathematischem Inhalt, in physikalisch-naturwissenschaftliche, in astronomisch-geodätische, in technisch-militärische, in allgemein-wissenschaftliche und in Gesellschaftsschriften. Jeder Mathematiker sollte die wichtigsten französischen, deutschen, englischen und italienischen Zeitschriften der Mathematik kennen, ebenso die Veröffentlichungen der mathematischen Gesellschaften in Amsterdam, London, Paris, Edinburg, Palermo, New-York, der Leopoldina, der Jablonowskischen Gesellschaft, der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bei einer Übersicht über diese Zeitschriften bietet sich zugleich Gelegenheit, die Geschichte der Akademien und gelehrten Gesellschaften zu berühren, von der der Mathematiker auch einiges wissen müßte.

Das wäre ungefähr der Inhalt einer Vorlesung zur Einführung in die mathematische Literatur. Sie hätte unter anderen den Vorzug, daß in ihr

zugleich der Geschichte der Mathematik ein größerer Platz eingeräumt würde, die leider immer noch sehr selten Gegenstand von Universitätsvorlesungen ist. Wir zweifeln nicht, daß eine solche Vorlesung zur Einführung in die mathematische Literatur auch von Hörern besucht würde, welche die Mathematik nicht zu ihrem Berufsstudium erwählt haben, sondern denen es lediglich daran gelegen ist, ihre wissenschaftliche Bildung und Weltanschauung durch festere Prinzipien zu erweitern. Auch ihnen wird die Darbietung der literarischen Hilfsmittel zur Selbsteinführung in die höhere Mathematik willkommen sein.

Kleine Mitteilungen.

Congresso internazionale di storia delle scienze matematiche e fisiche in Roma 1903.

Il Congresso internazionale di scienze storiche ebbe luogo in Roma nei giorni 2—9 Aprile 1903. La sezione VIII riguardava la storia delle scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche. Essa tenne sette sedute ordinarie e due straordinarie. La prima seduta fu aperta dal prof. P. Blaserna. Furono eletti a presidenti successivamente i signori P. Tannery, K. Südhoff, R. Blanchard, S. Günther, E. Lampe, M. Benedikt; a vice-presidenti i signori P. Giacosa, E. Lebon, G. Loria, E. Millosevich, V. Volterra: a segretari i signori L. Carpi, V. Tonni-Bazza, G. Vacca, G. Vailati. Erano annunciate 54 comunicazioni, di cui un terzo circa interessanti la storia delle scienze matematiche e fisiche, le rimanenti, le scienze naturali e mediche.

Si discussero inoltre quattro temi.

Sul primo tema, dopo una relazione del prof. Millosevich, accenannte ai difetti dell' iconografia degli eclissi di sole di T. Oppolzer per accertamento delle date, si approvò un ordine del giorno facente voti perchè nell' interesse del rapido accertamento delle date per uso storico, nel periodo e nelle regioni in cui si svolse la civiltà classica, si ripubblichi dagli editori Mayer e Müller, col consenso dell' Autore, l' atlante annesso all' opera di F. K. Ginzel intitolata: *Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der Klassischen Alterthumswissenschaften*, etc. L' atlante, preceduto da una semplice prefazione esplicativa delle tavole, messo in commercio a prezzo modesto, dovrebbe trovare larga accoglienza nel mondo storico.

Sul secondo tema relativo al modo col quale la storia delle scienze matematiche e fisiche, naturali e mediche possa costituire oggetto di un corso universitario, riferirono i professori D. Barduzzi, P. Giacosa e G. Loria.[1]) Si approvò a grande maggioranza, il seguente ordine del giorno:

„La sezione VIII del congresso di scienze storiche, considerando essere di eccezionale importanza che alla storia delle scienze venga accordato nell' insegnamento il posto che le spetta di diritto; e tenendo conto della deliberazione presa dalla V sezione del »Congrès d'histoire comparée« tenutosi a Parigi nel Giugno 1900,

emette il voto che tale insegnamento venga istituito con la creazione di corsi universitari divisi in quattro serie:

1) Tale Relazione venne già integralmente pubblicata nel fascicolo 1º Maggio 1903 della rivista L'università italiana (Bologna).

1. Scienze matematiche ed astronomiche.
2. Scienze fisiche e chimiche.
3. Scienze naturali.
4. Medicina.

La sezione fa inoltre voti che dei rudimenti di storia delle scienze vengano introdotti nei programmi dei singoli insegnamenti delle scuole medie."

Riguardo all' Italia in particolare venne formulato il voto che gl'insegnamenti della storia delle matematiche, della fisica, ecc. vengano annoverati fra i corsi complementari e che la libera docenza possa essere concessa anche per la storia delle scienze.

Sul terzo tema riferì il prof. Gino Loria. Égli dimostrò come la pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli sia una impresa nazionale di universale interesse. Accenna alle singolari circostanze per cui le opere di Torricelli non riuscirono mai a vedere la luce, malgrado la ferma volontà che il sommo geometra morente esprimeva che esse fossero pubblicate.

Il prof. Tannery, associandosi alla proposta del prof. Loria, comunicò che egli ebbe occasione di studiare parecchi documenti inediti importanti relativi alla disputa di priorità fra Roberval e Torricelli, e che egli aveva intenzione di pubblicare un insieme completo concernente le relazioni fra Torricelli e i dotti francesi suoi contemporanei, in un volume di *Papiers scientifiques du XVIIième siècle,* da inserire nella collezione dei Documents inédits de l'histoire de France. Questo insieme troverebbe un posto più naturale in una edizione completa delle opere di Torricelli. Egli offrì il suo concorso ai dotti italiani.

Si approvò il seguente ordine del giorno:

«La sezione VIII del congresso di scienze storiche radunato in Roma nell' aprile 1903, fa voti che il governo di S. M. il Re d'Italia affidi alla R. Accademia dei Lincei il cómpito di esaminare le opere manoscritte di Evangelista Torricelli nell' intento di determinare quali fra esse siano meritevoli di stampa; e di presiedere alla pubblicazione completa di tutte le di lui opere già edite e di quelle inedite, giudicatene degne, senza escludere il suo carteggio scientifico, completando così il lavoro intrapreso con la edizione nazionale delle opere di Galileo.»

Snl quarto tema riferì il prof. Giacosa.[1]) Egli propose la compilazione di un catalogo per materia dei manoscritti scientifici esistenti nelle biblioteche ed archivi del regno d'Italia, e dimostrò la necessità che un numero ristretto di persone, competenti per ciascuna materia, ed a ciò appositamente delegate, intraprendano, la ricerca di tutto il materiale raccolto negli archivi e nelle biblioteche, comprendendo la paleografia greca e latina, e lasciando per ora da parte i codici arabi.

Tale proposta fu approvata alle unanimità.

Si discusse infine in una delle sedute straordinarie, una proposta dei professori Tannery e Giacosa per la costituzione di una Associazione internazionale di storia delle scienze. L'attuazione di tale proposta essendo parsa ai più immatura, dietro proposta del prof. Benedikt, si nominò una commissione internazionale coll' incarico di gettare le basi di questa associazione, chiamandone

1) Anche questa Relazione si legge nel succitato fascicolo di L'università italiana.

a far parte i signori: M. Benedikt, R. Blanchard, P. Tannery, K. Südhoff, S. Günther, P. Giacosa e G. Loria, e lasciando alla commissione così nominata l'incarico di aggregarsi altri membri per altre nazioni.

Tale commissione tenne una prima seduta Giovedì 9 aprile, nominando i signori P. Tannery presidente, e P. Giacosa e G. Loria, a segretari.

Ecco ora l'elenco delle comunicazioni relative alla storia della matematica.

Moritz Cantor. *Hieronimus Cardanus. Ein wissenschaftliches Lebensbild aus dem 16. Jahrhundert.* (Presentata dal prof. Loria.)

M. Darvai. *La vita dell' insigne matematico Giovanni Bolyai.*

G. Vacca. *Sulla storia della numerazione binaria. Cenni storici.* Analisi di un problema di Luca Paciolo, e sopratutto dell' *arithmetica localis* di Neper (*Rabdologia*, Edinburgi 1617).

V. Tonni-Bazza. *Su Nicola Tartaglia.* Esame di un manoscritto inedito di Oxford, che coincide in molti punti col *General trattato di numeri e misure* e ne differisce in altri. Notizie sulle ricerche dei resti del Tartaglià, e sul monumento che Brescia sta per erigergli.

A. Braunmühl. *Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung.* In relazione specialmente all' epoca Newtoniana e al primo stadio di sviluppo del calcolo integrale. (Presentata dal prof. Loria.)

F. Müller. *Über die Abkürzung der Titel mathematischer Zeitschriften.* Catalogo di oltre 1100 titoli di riviste e periodici matematici abbreviati sistematicamente [1]).

R. Almagià. *Sulle dottrine delle maree nell' antichità e nel medio-evo.*

A. Mori. *Per una bibliografia geodetica italiana.*

S. Günther. *Sviluppo del celebre istrumento astronomico-geodetico nominato „Radius Astronomicus" ovvero „Jacobstab".* Dimostrazione del plagio di Regiomontano. Il primo inventore di questo strumento sembra dover essere Levi ben Gerson, il quale non avrebbe conosciuto gli analoghi metodi degli antichi.

G. Uzielli. · *Sopra la lunghezza del corpo di Cristo come base delle misure medioevali in Italia.*

G. Eneström. *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik.* (Presentata dal Prof. Loria.)[2])

G. Pittarelli. *Il trattato di prospettiva del pittore quattrocentista Pier della Francesca.* Esame della sua vita, e delle sue relazioni con Luca Paciolo e con Leonardo da Vinci. Analisi dell' opera: Petrus Pictor Burgensis, *De prospectiva pingendi*, pubblicata dal Dr. Winterberg (Straßburg, Heitz & Müntzel 1899). Esame di un manoscritto inedito sui cinque corpi regolari Nel trattato *de prospectiva* sembra trovarsi la prima idea di *inviluppo.*

A. Mori. *Il carteggio scientificio di Leonardo Ximenes.* È conservato nella Biblioteca Nazionale di Firenze. Ne è già stata pubblicata la parte relativa alle operazioni astronomiche e geodetiche da eseguirsi in Toscana. Deve considerarsi come una fonte per la storia delle scienze nella seconda metà del secolo XVIII.

P. Tannery. *Histoire des termes analyse et synthèse en mathématique.* Il significato originario della parola *analisi* si riferirebbe ad una operazione manuale, cioè la messa in dettaglio di gruppi di monete. Soltanto molto più tardi si adoperò la parola *analisi* per indicare un metodo di ricerche.

1) V. Jahresber. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung 1903, p. 426—444.

2) V. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p 1—6.

E. Lampe. *Sull' organizzazione del „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik".*

C. Somigliana. *Notizie sulle letteratura Voltiana.* Studio per la pubblicazione delle opere complete di Alessandro Volta. La sezione VIII approvò un ordine del giorno perchè l' Accademia dei Lincei se ne assuma l'incarico.

E. Lebon. *Piano di una bibliografia analitica degli scritti contemporanei sulle storia dell' astronomia.*[1])

G. Vailati. *Sul carattere logico della dimostrazione del principio della leva, data da Archimede nel primo libro dell' Equilibrio dei piani.* Le critiche mosse a questa dimostrazione non reggono. La dimostrazione è perfetta: essa si appoggia su alcuni teoremi contenuti in un' opera perduta di Archimede.

V. Tonni-Bazza. *Benedetto Castelli plagiario?* Difesa dalle accuse di plagio mosse dal Lombardini a B. Castelli.

Genova. G. Vacca.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik."

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1 : 197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266.

---

1 : 207. Bretschneiders Übersetzung von *κατὰ συμβεβηκός* „durch Übereinstimmung" ist unklar. Es muß heißen, daß die Methode der Zurückführung auf das Unmögliche die Wahrheit *auf Seite des* (mit der Behauptung) *Übereinstimmenden* (und nicht auf Seite der gegenteiligen Annahme) findet.

A. Sturm.

---

1 : 225, 234, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139.

---

1 : 475. Der Kommentar des Maximus Planudes zu den zwei ersten Büchern des Diofantos ist nunmehr auch im griechischen Originale herausgegeben und zwar von P. Tannery im 2. Bande (S. 125—255) von *Diophanti Alexandrini Opera omnia* (Leipzig 1895).

---

1) V. Bulletin de la société astronomique de France 1903, p. 233—236.

1:476, siehe BM 1_3, 1900, S. 268. — **1:510**, siehe BM 1_3, 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM 3_3, 1902, S. 239. — **1:537**, **540**, **542**, siehe BM 1_3, 1900, S. 268. — **1:622**, siehe BM 2_3, 1901, S. 143. — **1:641**, siehe BM 3_3, 1902, S. 139. — **1:661**, siehe BM 1_3, 1900, S. 499. — **1:662**, siehe BM 1_3, 1900, S. 499; 3_3, 1902, S. 139. — **1:663**, siehe BM 3_3, 1902, S. 405. — **1:671**, siehe BM 1_3, 1900, S. 499. — **1:687—689**, siehe BM 2_3, 1901, S. 143—144; 4_3, 1903, S. 205—206.

1:694. In betreff der Angabe, daß „kardaga" den Arabern den 96. Teil des Kreisumfanges bedeutete, ist zu bemerken, daß die arabischen Mathematiker, deren Schriften im christlichen Mittelalter übersetzt wurden, ziemlich allgemein mit „kardaga" den 24. Teil des Kreisumfanges bezeichnet haben dürften. So z. B. wird in den *Canones super tabulas Toletanas* des Al-Zarkali, welche von Gherardo Cremonese übersetzt worden sind, angegeben, daß: „kardaga est portio circuli ex 15 gradibus constans" (siehe Biblioth. Mathem., 1_3, 1900, S. 339). Darum wurde auch von christlichen Verfassern, die sich im Mittelalter mit der Trigonometrie beschäftigten (z. B. Johannes de Lineriis und Peuerbach), der Term „kardaga" in dieser Bedeutung benutzt (siehe z. B. Biblioth. Mathem., 1_3, 1900, S. 354, 409; A. G. Kästner, *Geometrische Abhandlungen* I, Göttingen 1790, S. 544). Auf der anderen Seite scheint es, als ob einige arabische Mathematiker mit dem Worte „kardaga" die Sinus gewisser Bogen bezeichnet hätten (vgl. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, I, S. 44, 45). G. Eneström.

1:694, **704**, **706**, **708**, **714**, **735**, **736**, **744**, **748**, siehe BM 1_3, 1900, S. 449—500. — **1:749**, siehe BM 1_3, 1900, S. 268. — **1:756**, **757**, **767**, siehe BM 1_3, 1900, S. 500—501. — **1:794**, siehe BM 3_3, 1902, S. 139. — **1:804**, **805**, **807**, **808**, **812**, **823**, **852**, siehe BM 1_3, 1900, S. 268—269. — **1:853**, **854**, siehe BM 1_3, 1900, S. 501. — **1:854**, siehe BM 3_3, 1902, S. 324; 4_3, 1903, S. 206. — **1:855**, siehe BM 1_3, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM 2_3, 1901, S. 351. — **2:8**, **10**, siehe BM 1_3, 1900, S. 501—502. — **2:14—15**, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:20**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502; 3_3, 1902, S. 239. — **2:25**, siehe BM 1_3, 1900, S. 274. — **2:31**, siehe BM 2_3, 1901, S. 351—352; 3_3, 1902, S. 239—240. — **2:34**, siehe BM 2_3, 1901, S. 144. — **2:37**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:38**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:41**, **57**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502. — **2:63**, siehe BM 4_3, 1903, S. 206. — **2:70**, siehe BM 1_3, 1900, S. 417. — **2:73**, **82**, **87**, **88**, **89**, **90**, **92**, siehe BM 1_3, 1900, S. 502—503. — **2:97**, siehe BM 3_3, 1902, S. 406. — **2:98**, siehe BM 1_3, 1900, S. 269—270. — **2:100**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2:101**, siehe BM 3_3, 1902, S. 325. — **2:105**, siehe BM 1_3, 1900, S. 503. — **2:111**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:116**, siehe BM 3_3, 1902, S. 406. — **2:122**, siehe BM 1_3, 1900, S. 503—504. — **2:126**, **127**, siehe BM 3_3, 1902, S. 406. — **2:128**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:132**, siehe BM 1_3, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:157**, **158**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2:163**, **166**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2:175**, siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2:210**, siehe BM 2_3, 1901, S. 352—353.

2:218. Der bekannte Prediger Geiler von Kaisersberg (1445—1510) sagt, daß die Hausierer auch „rechenpfening" verkaufen (Schultz, *Deutsches Leben*, S. 97). A. Sturm.

2:219, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:229**, **242**, **243**, siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505. — **2:253**, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2:273**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2:274**, siehe BM 3_3, 1902, S. 325. — **2:282**, **283**, siehe BM 1_3, 1900,

S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2** : 284, 286, 287, 289, 290, 291, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2** : 296, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2** : 313, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2** : 328, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140.

---

2 : 328. Nach einer anderen Erklärung bedeutet das *Hazard*spiel ein Teufelsspiel; es soll seinen Namen von dem bösen Geiste *haschart* haben (von der Hagen, *Gesammtabenteuer* III, p. XXIII). A. Sturm.

---

2 : 334, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2** : 353, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2** : 358, 360, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2** : 381, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2** : 385, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2** : 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2** : 430, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145.

---

2 : 440. Stifels Ansichten über die Quadratur des Kreises sind tadellos. Er spricht sich darüber (*Arithmetica integra*, Blatt 224 u. 225 im „Appendix de quadratura circuli") abschließend also aus: „Constat, quadraturam circuli nihil aliud esse, quam constitutionem quadrati, aequalis circulo dato ... Inventio autem aequalitatis istius praesupponit numerum aliquem, repraesentantem longitudinem circuli praecise, sive rationalem sive irrationalem, qui neutro modo est dabilis. Unde sequitur primo, impossibile esse, ut assignetur proportio circumferentiae circuli ad diametrum suam ... Secundo sequitur, impossibile esse, ut inveniatur medium proportionale inter semidiametrum circuli et semicircumferentiam eius. Sequitur tertio, impossibile esse, ut quadretur circulus mathematicus. — Possibile est, et factu facile, ut sumta proportione aliqua propinqua inter semidiametrum et circumferentiam circuli physici quadretur circulus ille, ita ut quadratio illa satisfaciat sensibus." A. Sturm.

---

2 : 442, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2** : 449, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2** : 454, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2** : 474, 480, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2** : 481, 482, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2** : 482, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2** : 484, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2** : 486, 489, 490, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2** : 497, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2** : 509, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2** : 510, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2** : 512, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2** : 514, 516, 517, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2** : 530, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2** : 532, 535, 541, 548, 549, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2** : 550, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2** : 554, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510.

---

2 : 555. Clavius hieß ursprünglich *Klau*, nicht Schlüssel, auch nicht Nagel oder Nagler, wie S. Günther meint (Zeitschr. für mathem. Unterr. **23**, 1892, S. 519). Allerdings spielt Kepler in einem Briefe an Mästlin (Kepleri *Opera*, ed. Frisch, IV, 7) an die Ableitung von Nagel an, aber nur scherzweise, da er auch die Ableitung von Keule beifügt. A. Sturm.

---

2 : 565. Eine Geometrie (und Arithmetik) von Ramus erschien bereits 1569, gleichzeitig mit den *Scholae mathematicae: P. Rami Arithmeticae libri duo: Geometriae septem et viginti* (Basileae MDLXIX). Das Urteil Cantors über Ramus als Mathematiker wird durch dieses Werk nach jeder Richtung hin bestätigt. A. Sturm.

---

2 : 567. Die große Arbeit des G. Benedetti: *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber* erschien in Turin 1580 (siehe Riccardi, *Bibliot. matem. ital.* I, 111). Die meisten Verfasser, darunter auch Cantor, geben als Druckjahr 1585 an, und in der Tat gibt es Exemplare, die auf dem Titelblatte diese Jahreszahl tragen, aber nach Riccardi (a. a. O., Appendice 165) gehören diese Exemplare der Originalausgabe von 1580 an, so daß nur das Titelblatt neu gedruckt ist, und eben dasselbe gilt nach Riccardi (a. a. O. I, 111; Appendice 92) von den Exemplaren, deren Titelblätter die Angaben: „Venetiis, apud Franciscum Zilettum, MDLXXXVI" oder „Venetiis, apud Baretium et Socios, MDXCIX" haben. G. Eneström.

---

2 : 568. Zeile 10—12 bemerkt Herr Cantor: „Hier vermutlich ist die Aufgabe gelöst, mit vier gegebenen Strecken als Seiten ein Sehnenviereck zu zeichnen". Wenn das Wort „hier" sich auf die Arbeit *Speculationes diversae* bezieht, kann das Wort „vermutlich" ohne weiteres gestrichen werden; sonst soll die Bemerkung modifiziert werden, denn aus Libris *Histoire des sciences mathématiques en Italie* III, 130, geht hervor, daß die Aufgabe nicht im 1. sondern im 6. Abschnitte (S. 211) der Benedettischen Arbeit behandelt wird. In diesem Abschnitte und zwar gegen das Ende desselben (S. 368) kommt übrigens auch die von Herrn Cantor mitgeteilte Lösung der Gleichung $(A + x) x = B^2$ vor. G. Eneström.

---

2 : 569, siehe BM 1_3, 1900, S. 510. — **2 : 572—573**, siehe BM 1_3, 1900, S. 510; 3_3, 1902, S. 141. — **2 : 576**, siehe BM 2_3, 1901, S. 355—356. — **2 : 579**, siehe BM 2_3, 1901, S. 145. — **2 : 580—581**, siehe BM 4_3, 1903, S. 207. — **2 : 582**, siehe BM 1_3, 1900, S. 510. — **2 : 583**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270; 2_3, 1901, S. 356. — **2 : 592**, siehe BM 2_3, 1901, S. 146. — **2 : 594, 597**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270. — **2 : 597, 599—600**, siehe BM 2_3, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604**, siehe BM 1_3, 1900, S. 270—271. — **2 : 611**, siehe BM 2_3, 1901, S. 356—357. — **2 : 612**, siehe BM 1_3, 1900, S. 277; 2_3, 1901, S. 146. — **2 : 613**, siehe BM 2_3, 1901, S. 357. — **2 : 614, 620**, siehe BM 3_3, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623**, siehe BM 1_3, 1900, S. 277; 2_3, 1901, S. 146—147. — **2 : 638**, siehe BM 2_3, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643**, siehe BM 1_3, 1900, S. 271. — **2 : 655**, siehe BM 2_3, 1901, S. 357.

---

2 : 656. In betreff der Angabe, daß der *Cours mathématique* von P. Hérigone zuerst 1634, dann 1644 gedruckt ist, mag auf eine Notiz von B. Boncompagni im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 2, 1869, 472—476, sowie auf einen kleinen Artikel von P. Tannery in L'interméd. d. mathém. 2, 1895, 55—56, hingewiesen werden. Man ersieht daraus, daß eigentlich nur eine Auflage des *Cours mathématique* existiert, dessen B. I—IV 1634, B. V 1637 und B. VI 1642 erschienen, daß es aber drei neue Auflagen des Titelblattes gibt, die bezw. 1643, 1644, 1644 datiert sind.

Bei der Erwähnung des *Cours mathématique* lohnt es der Mühe darauf hinzuweisen, daß schon im ersten Bande, der 3 Jahre vor der Descartesschen *Géométrie* herausgegeben ist, die successiven Potenzen von a durch $a2$, $a3$, $a4$ u. s. w. bezeichnet sind (vergl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 218).

G. Eneström.

---

2 : 659, 660, siehe BM 2_3, 1901, S. 147—148. — **2 : 665,** siehe BM 1_3, 1900, S. 271. — **2 : 674,** siehe BM 4_3, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148.

---

2 : 693. Es wird angegeben, BENJAMIN BRAMERS *Apollonius Cattus oder Kern der ganzen Geometrie* sei, obwohl im Jahre 1634 entstanden, erst 1684 gedruckt worden; die Vorrede führe die Jahreszahl 1646. — Hierzu ist Folgendes zu bemerken.

Die erste Auflage des Buches erschien unter dem Titel *Apollonius Cattus oder geometrischer Wegweiser* und wurde „zu Cassel bey Johann Saurn, in verlegung desz Authoris, im Jahr Christi MDCXXXIV“ gedruckt. Die Vorrede ist „Cassel den 1. Januarii Anno 1634“ datiert. Das Buch ist also schon *vor* 1634 entstanden. Von dieser Auflage hat mir nur der erste Teil ([8] + 96 S. 4°) vorgelegen.

Die zweite revidierte und vermehrte Auflage erschien unter demselben Titel in 2 Teilen 1646—47. Die Vorrede ist den 31. Dezember 1645 datiert.

Eine dritte Auflage wurde nach KÄSTNER (siehe die von CANTOR zitierte Stelle) 1684 in drei Teilen herausgegeben; der dritte Teil enthielt einen Neudruck des schon 1648 veröffentlichten *Berichtes zu M. Jobsten Bürgi geometrischen Triangularinstrument.*

CANTORS frühere Mitteilung vom J. 1876 in der Allgemeinen deutschen Biographie (Art. BRAMER), daß BRAMER selbst den *Apollonius Cattus* zum erstenmal 1634 herausgegeben hat, ist also richtig.

Stockholm. C. GRÖNBLAD.

---

2 : 700, 701, 703, 704, 705, siehe BM 1_3, 1900, S. 271—273. — **2 : 719,** siehe BM 2_3, 1901, S. 357.

---

2 : 720. Herr CANTOR spricht hier von einer „als besonderes Bändchen von 1664“ erschienenen Arithmetik des ANDREAS TACQUET, aber diese Redeweise beruht wohl nur auf einer unvollständigen Angabe von KÄSTNER. An der von Herrn CANTOR angedeuteten Stelle der KÄSTNERschen *Geschichte der Mathematik* (statt III, 449 lies III, 448 oder III, 448—449), wird nämlich angegeben, daß das Privilegium des Buchdruckers vom Jahre 1664 ist. Aber die Arithmetik erschien schon bei TACQUETS Lebzeiten (er starb bekanntlich 1660) unter dem Titel: *Arithmeticae theoria et praxis auctore Andrea Tacquet Antverpiensi, e societate Jesu, Matheseos professore.* Lovanii, Apud Cyp. Coenetenium, Anno M.DC.LVI. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn H. BOSMANS entnehme ich, daß die Bibliothek der Universität in Löwen ein Exemplar dieser seltenen ersten Ausgabe besitzt. Die zweite Auflage, auf die sich das von KÄSTNER erwähnte Privilegium des Buchdruckers bezieht, trägt das Druckjahr 1665 (nicht 1664) und wird ausdrücklich als „Editio secunda correctior“ bezeichnet (siehe RICCARDI, *Saggio di una bibliografia euclidea* I, Bologna 1887, 45). Über eine dritte Auflage vom Jahre 1683 („Editio ultima correctior“) berichtet KÄSTNER an der angegebenen Stelle.

Nach RICCARDI (a. a. St.) ist die „Approbatio“ vom Jahre 1655, und vielleicht ist dies der Grund, warum J. W. MÜLLER *(Auserlesene mathematische Bibliothek,* Nürnberg 1820, 24) eine Auflage von 1655 aufführt, aber Herr H. BOSMANS teilt mir freundlichst mit, daß keine solche Auflage existiert.

G. ENESTRÖM.

2:721, siehe BM 1_3, 1900, S. 273. — **2**:742, siehe BM 1_3, 1900, S. 273; 3_3, 1902, S. 142. — **2**:746, siehe BM 1_3, 1900, S. 273. — **2**:747, siehe BM 1_3, 1900, S. 173; 2_3, 1901, S. 225. — **2**:749, siehe BM 4_3, 1903, S. 88. — **2**:766, siehe BM 3_3, 1902, S. 142. — **2**:767, siehe BM 2_3, 1901, S. 148, 357—358. — **2**:770, siehe BM 4_3, 1903, S. 208. — **2**:772, 775, siehe BM 2_3, 1901, S. 358—359. — **2**:777, siehe BM 2_3, 1901, S. 148; 3_3, 1902, S. 204. — **2**:783, siehe BM 2_3, 1901, S. 359; 4_3, 1903, S. 88—89. — **2**:784, siehe BM 2_3, 1901, S. 148. — **2**:802, siehe BM 4_3, 1903, S. 208. — **2**:812, siehe BM 4_3, 1903, S. 37. — **2**:820, 825, 840, 856, 865, siehe BM 2_3, 1901, S. 148—149. — **2**:876, 878, 879, siehe BM 1_3, 1900, S. 511. — **2**:891, siehe BM 1_3, 1900, S. 273. — **2**:898, siehe BM 4_3, 1903, S. 37, 208. — **2**:901, siehe BM 1_3, 1900, S. 511. — **2**:VIII (Vorwort), siehe BM 3_3, 1902, S. 142. — **2**:IX, X (Vorwort), siehe BM 1_3, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3**:10, siehe BM 1_3, 1900, S. 518. — **3**:11, siehe BM 4_3, 1903, S. 209. — **3**:12, 17, 22, siehe BM 1_3, 1900, S. 512. — **3**:22, 24, 25, siehe BM 4_3, 1903, S. 209. — **3**:26, siehe BM 2_3, 1901, S. 359. — **3**:45—48, 49, 50, siehe BM 1_3, 1900, S. 512—513. — **3**:70, siehe BM 2_3, 1901, S. 360. — **3**:100, siehe BM 2_3, 1901, S. 149. — **3**:112, siehe BM 4_3, 1903, S. 209—210. — **3**:116, siehe BM 1_3, 1900, S. 518. — **3**:117, siehe BM 1_3, 1900, S. 518. — **3**:123, siehe BM 1_3, 1900, S. 513. — **3**:124, siehe BM 3_3, 1902, S. 407—408.

3:126. Da Herr Cantor die Schrift de Lahires vom Jahre 1673 als ungemein selten bezeichnet (ein anderer Verfasser hat die Vermutung ausgesprochen, diese Schrift sei jetzt verloren), mag darauf hingewiesen werden, daß sowohl die königliche Bibliothek in Berlin als die Bibliothek der Technischen Hochschule daselbst ein Exemplar derselben besitzt. Der vollständige Titel lautet: *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques qui ont pour bases des cercles ou des paraboles, des ellipses & des hyperboles. Par Ph. de La Hire, Parisien.* Paris, Th. Moette, MDCLXXIII.

G. Eneström.

3:131, siehe BM 4_3, 1903, S. 210. — **3**:151, siehe BM 3_3, 1902, S. 326. — **3**:174, siehe BM 2_3, 1901, S. 149—150. — **3**:183, siehe BM 1_3, 1900, S. 432. — **3**:188, siehe BM 3_3, 1902, S. 241. — **3**:201, siehe BM 1_3, 1900, S. 513. — **3**:207, siehe BM 1_3, 1900, S. 519. — **3**:215, siehe BM 2_3, 1901, S. 150. — **3**:218, siehe BM 1_3, 1900, S. 513. — **3**:220, siehe BM 3_3, 1902, S. 326. — **3**:224, siehe BM 1_3, 1900, S. 514. — **3**:225, 228, siehe BM 2_3, 1901, S. 150. — **3**:232, siehe BM 1_3, 1900, S. 514. — **3**:246, siehe BM 1_3, 1900, S. 514; 2_3, 1901, S. 151. — **3**:250, siehe BM 1_3, 1900, S. 514. — **3**:303, siehe BM 2_3, 1901, S. 155. — **3**:330—331, siehe BM 3_3, 1902, S. 241—242. — **3**:447, 455, siehe BM 2_3, 1901, S. 151. — **3**:473, siehe BM 2_3, 1901, S. 154—155. — **3**:477, 479, siehe BM 2_3, 1901, S. 151—152. — **3**:521, siehe BM 2_3, 1901, S. 441. — **3**:565, 571, 578, siehe BM 3_3, 1902, S. 326—327. — **3**:614, siehe BM 4_3, 1903, S. 89—90. — **3**:636—637, siehe BM 2_3, 1901, S. 441. — **3**:652, siehe BM 2_3, 1901, S. 446. — **3**:660, 667, 689, 695, siehe BM 2_3, 1901, S. 441—442. — **3**:750, 758, 760, 766, siehe BM 2_3, 1901, S. 446—447. — **3**:774, 798, siehe BM 2_3, 1901, S. 442—443. — **3**:845, siehe BM 2_3, 1901, S. 447; 3_3, 1902, S. 327—328. — **3**:848, 881, siehe BM 2_3, 1901, S. 443. — **3**:882, siehe BM 2_3, 1901, S. 447. — **3**:892, siehe BM 3_3, 1902, S. 143. — **3**:IV (Vorwort), siehe BM 2_3, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Ein Lehrgang der Mathematik und Astrologie im Mittelalter. Eine nicht ganz unwichtige Randnote fand ich kürzlich in einer lateinischen Kopenhagenerhs. vom Anfang des 14. Jahrh. (Gamle kgl. Samling 2⁰, 277, fol. 146r). Sie bezieht sich offenbar auf den Unterricht in Mathematik und Astrologie an irgend einer Universität oder Klosterschule. Sie lautet:

Hic est ordo mathematicam addiscendi: Primo audiantur que sunt introductoria, scilicet

algorismus
spera
compotus
arismetica boetij
musica eiusdem
geometria euclidis (!)
Astrolabium ptholomei
liber de proportionibus
Theodosius de speris
Milleus de speris
almagestum
geber
alpetragius

Hij predicti libri sunt demonstratiui. Post quos addiscantur sequentes libri iudiciorum per ordinem scilicet

liber introductorius Albumazar ad iudicia astrorum
Zael introductorius
Idem[1]) *de interrogationibus, que uocantur iudicia arabum*
Idem[1]) *de electionibus horarum*
coniudices Albumazar de pluuijs
liber florum
liber experimentorum eiusdem
Idem[1]) *de coniunctionibus*
Item (!) de sompno inueniendo
Mesahala de interpretatione cogitationis
Idem de occultis
Idem de eclipsibus
Idem[1]) *de reuolutionibus annorum mundi*
Albolay (!) de natiuitatibus
Aomor (!) de natiuitatibus
Centilogium (!) ptholomej.

Diese Aufzählung von Lehrbüchern, welche dem mündlichen Unterricht („audiantur") zugrunde gelegt wurden, erinnert gewissermaßen an die Aufzählung der mittleren Bücher, welche den Schriften des HONAIN BEN ISAK (JOHANNICIUS) entnommen wurde (vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 68. — Außer in Paris. 9335 steht letztere Aufzählung im Cod. Reg. 1253 fol. 69^v und Ampl. F. 37 fol. 60^r). Jedoch verbürgt uns die Mitnahme von BOETIUS' Schriften, daß die Liste nicht einer arabischen Schrift entnommen worden ist. Übersehen wir die Liste, so zeigt es sich auch sofort, daß sie von Büchern zusammengestellt ist, die wir in den lateinischen Hss. des 13. und 14. Jahrhunderts antreffen, und die zu der vom Arabischen hergekommenen Übersetzungsliteratur gehören. Sämtliche Bücher sind wohl bekannt. Am seltensten trifft man ALBUMASARS *De pluviis;* jedoch findet sich in Bern (cod. 483) eine *Epistula Messchalahu in pluviis et ventis a magistro Drogone (?) transl. de arab. in lat.* (vgl. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber*, p. 6). Auf

1) *Idem* korrigiert aus *Item*.

den sehr verschiedenartigen Inhalt der recht interessanten Hs., in welche die gegenwärtige Randnote eingetragen ist, will ich hier nicht näher eingehen; der Vollständigkeit wegen sei schließlich nur bemerkt, daß die Note unter einem Texte steht, der die Überschrift hat: *Incipit septima liberalium artium scientia, id est astrologia* [Anfang: *Tribus modis locuntur autores de superioribus, scilicet fabulose, astrologice, astronomice....*].

Kövenhavn. Axel Anthon Björnbo.

Anfragen und Antworten.

111. Über den italienischen Mathematiker Leonardo Mainardi. Im zweiten Teil der *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance* (1902) hat M. Curtze eine *Practica geometriae* von Leonardo Mainardi aus Cremona veröffentlicht. Als einzige Quelle für das Leben dieses Verfassers zitiert Curtze eine Arbeit von F. Arisi (*Cremona literata*, Parma 1702), wo Mainardi unter dem Jahre 1488 aufgeführt ist, und aus diesem Grunde wird ohne weiteres festgestellt, daß dieser in der zweiten Hälfte der 15. Jahrhunderts gelebt hat. Aber so leicht dürfte die Frage nicht erledigt werden können, und zwar sind es zwei Umstände, die die Angabe des Arisi verdächtig machen. Zuerst wird, wie Curtze auch ausdrücklich bemerkt, in dem von E. Narducci bearbeiteten Kataloge der Boncompagnischen Handschriftensammlung angegeben, daß Cod. 302, der die Schrift des Mainardi enthält, aus dem 14. Jahrhundert stammt; freilich behauptet Curtze, daß diese Angabe nicht richtig ist, begründet aber seine Behauptung nicht paläographisch, sondern nur dadurch, daß Mainardi nach Arisi erst in der 2. Hälfte des 15. Jahrhunderts gelebt hat. Weiter zitiert Arisi selbst eine Arbeit von H. Vida, worin folgender Passus vorkommt: „Fuit ante Blasium Leonardus Mainardus", aber mit „Blasius" kann wohl nur Biagio da Parma gemeint sein, der schon 1374 Professor wurde und 1416 starb. Es gibt also zwei Umstände, die dafür sprechen, daß Mainardi schon im 14. Jahrhundert gelebt hat.

Ist es möglich, andere Quellen für das Leben des Mainardi aufzufinden (z. B. Cod. S. Marco Florent. 212) und dadurch mit Bestimmtheit festzustellen, wann er gelebt? G. Eneström.

112. Über den deutschen Mathematiker Andreas Alexander. Am Ende meines Aufsatzes: *Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts* (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 356—360) habe ich bemerkt, daß es wünschenswert wäre, Auskunft über die Lebensumstände des deutschen Mathematikers Andreas Alexander zu bekommen. Gedruckte Schriften von ihm konnte ich damals nicht mit Bestimmtheit nachweisen, und für die Gerhardtsche Angabe, daß er Lehrer an der Universität in Leipzig war, hatte ich keine Bestätigung gefunden.

Seitdem habe ich aber in Panzers *Annales typographici* (Band 7, Nürnberg 1799, S. 148) eine Notiz gefunden, die als Ausgangspunkt für weitere Nachforschungen über Andreas Alexander dienlich sein dürfte. Panzer verzeichnet nämlich an der zitierten Stelle eine 1504 in Leipzig bei M. Lotter

gedruckte Schrift in Folio mit dem Titel *Mathematologium prime partis* ANDREE ALEXANDRI *Ratisbonensis mathematici super novam et veterem logicam* ARISTOTELIS. Da die Schrift in Leipzig gedruckt ist, kann man wohl daraus folgern, daß ANDREAS ALEXANDER im Jahre 1504 dort wohnhaft war, und aus dem Titel scheint hervorzugehen daß er ein Regensburger von Geburt war.

Ist es möglich ein Exemplar der fraglichen Schrift aufzufinden und kann man daraus oder auf anderen Wegen weitere Aufschlüsse über die Lebensumstände und die wissenschaftliche Wirksamkeit des ANDREAS ALEXANDER bekommen?

G. ENESTRÖM.

Réponse à la question 110 sur les frères Français. M. H. BROCARD a bien voulu m'envoyer les suivants renseignements biographiques sur J. F. FRANÇAIS, auxquels j'ai annexé une liste des écrits de celui-ci, aussi complète qu'il m'a été possible.

Français, JACQUES-FRÉDÉRIC. Né à Saverne le 20 juin 1775, entré à l'école polytechnique de Paris en 1797, sorti en 1800 dans le génie militaire. Étant capitaine, il est passé en 1810 à l'Instruction publique et a été professeur d'art militaire à l'école d'application de l'artillerie et du génie de Metz, de 1808 à sa mort, survenue à Metz le 9 mars 1833.

Ecrits:

De la ligne droite et du plan rapportés à des coordonnées obliques; Correspondance de l'école polytechn., 1, 1804—1808, 337—349, 418—421.

Sur la transformation des coordonnées; Journal de l'école polytechn., Cah. 14, 1808, 182—190.

Solutions de deux problèmes de géométrie; Correspondance de l'école polytechn. 2, 1809—1813, 63—69.

Autre manière de déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le filet d'une vis triangulaire; Correspondance de l'école polytechn. 2, 1809—1813, 69—70.

Extrait de lettre [sur la solution analytique du problème de la sphère tangente à quatre sphères données]; Correspondance de l'école polytechn. 2, 1809—1813, 409—410.

Examen d'un cas singulier, qui nécessite quelques modifications dans la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables; Ann. de mathém. 3, 1812—1813, 132—137.

Solution analytique complète du problème où il s'agit de déterminer une sphère qui touche quatre sphères données; Ann. de mathém. 3, 1812—1813, 158—160.

Démonstration de deux théorèmes de polyédrométrie; Ann. de mathém. 3, 1812—1813, 189—191.

Mémoire sur les maxima et minima des fonctions à un nombre quelconque de variables; Ann. de mathém. 3, 1812—1813, 197—206.

Théorèmes nouveaux sur la rotation des corps solides; Ann. de mathém. 3, 1812—1813, 209—212.

Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et de l'intégration des fonctions qu'elles affectent, avec des applications à l'intégration d'une classe nombreuse d'équations; Ann. de mathém. 3, 1812—1813, 244—272. LACROIX (*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, éd. 2, t. 3, p. 726) attribue à tort ce mémoire à FRANÇAIS de Colmar.

Sur le mouvement de rotation d'un corps solide libre autour de son centre de masse. Paris 1813. 4°.

Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires; Ann. de mathém. 4, 1813—1814, 61—71. — Réimprimé par J. HOÜEL à la fin (p. 63—74) de la seconde édition de l'ouvrage de J. R. ARGAND: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires,* Paris 1874.

Sur la théorie des quantités imaginaires; Ann. de mathém. 4, 1813—1814, 222—227. — Réimprimé par J. Hoüel dans l'écrit cité ci-dessus (p. 96—101).

Solution directe des principaux problèmes du calendrier; Ann. de mathém. 4 1813—1814, 273—276, 337—338.

Sur la théorie des imaginaires; Ann. de mathém. 4, 1813—1814, 364—366. — Réimprimé par J. Hoüel dans l'écrit cité ci-dessus (p. 109—110).

Du calcul des dérivations ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites; Ann. de mathém. 6, 1815 —1816, 61—111.

Solution d'un problème de dynamique [sur le pendule et sur le pont-volant]; Ann. de mathém. 6, 1815—1816, 126—129.

Recherches sur la poussée des terres, sur la forme et les dimensions des murs de revêtement et sur les talus d'excavation; Mémorial de l'officier du génie 4, 1820, 157—206.

Précis du cours de castramétation, de fortification passagère et de ponts militaires, à l'usage des élèves de l'artillerie et du génie. Metz 1824. Cahier lithogr. in-folio.

Précis des leçons du cours de topographie militaire, à l'usage des élèves de l'artillerie et du génie. Metz s. a. Cahier lithogr. in-folio.

Cours de géodésie, à l'usage des élèves de l'école royale de l'artillerie et du génie. Ed. 2. Metz 1828. Cahier lithogr. in-folio. — Ed. 3 par Th. Gosselin. Metz 1834. Cahier lithogr. in-folio, (4) + 189 p. + 6 pl.

Quant à l'autre frère Français, des renseignements biographiques semblent faire faute presque entièrement. D'après M. Brocard, ce Français est mort à Mayence (Mainz) en 1810. S. F. Lacroix, qui le connaissait personnellement, semble attacher beaucoup d'importance à ses recherches sur l'intégration des équations aux dérivées partielles et parle de plusieurs mémoires, sans doute manuscrits, rédigés par Français dès 1794 (l. c. 2, p. 658; 3, p. 598). Trois de ses mémoires posthumes ont été publiés, savoir:

Méthode de différentiation, indépendante du développement des fonctions en séries; Ann. de mathém. 2, 1811—1812, 325—331.

Véritable solution du problème de la tractoire; Ann. de mathém. 4, 1813—1814, 305—310.

Théorèmes relatifs aux polygones réguliers; Ann. de mathém. 5, 1814—1815, 341—350.

Probablement on doit lui attribuer aussi le mémoire suivant, dont l'auteur est appelé „Français, citoyen français, professeur de mathématique à l'école centrale“:

Mémoire sur un moyen nouveau de transformer le mouvement circulaire continu en mouvement rectifique alternatif et en mouvement elliptique; Procès-verbaux de la société d'émulation de Colmar, An XI, p. 35—47.

G. Eneström.

Rezensionen.

Ibn al-Qifṭî. Ta'rîch al-ḥukamâ'. Auf Grund der Vorarbeiten Aug. Müllers herausgegeben von **Julius Lippert.** Mit Unterstützung der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Leipzig, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung 1903. 22 + 496 S. 4⁰. Mark 36.

Man hat schon längst auf das Erscheinen dieses Werkes als einer wertvollen Ergänzung der Quellen für die Geschichte der arabischen Mathematiker, Astronomen, Philosophen, etc., wie für die arabische Kulturgeschichte überhaupt, gewartet; nun ist es erschienen, aber nicht in der Form, in der wir und vielleicht mit uns noch viele es gewünscht haben, nämlich von einem ausführlichen Kommentar, einem kritischen Apparat begleitet, ähnlich wie Flügels *Fihrist*ausgabe, durch den besonders die Unrichtigkeiten Ibn al-Qifṭîs in Bezug auf Namen und Schriften der behandelten Gelehrten durch Vergleichung mit anderen biographischen Werken hätten hervorgehoben und richtig gestellt werden können. Statt eines solchen materiellen Kommentars gibt uns Herr Lippert in Fußnoten nur rein formale Bemerkungen, nämlich die abweichenden Lesarten der verschiedenen von ihm benutzten Handschriften; nur an wenigen Stellen, so bei einigen unsicheren griechischen Autorennamen, versteigt er sich zu der Angabe, wer darunter verstanden sei, so bemerkt er S. 99 in Note a), daß mit Ptolemaios Badallos gemeint sei Ptolemaios Philadelphos; S. 93, Note b), daß mit Aristiġânes gemeint sei Archigenes; aber gerade diese Art von Anmerkungen hat Lippert nicht konsequent durchgeführt, so fehlt S. 15 eine Note, daß unter Abidaqlis zu verstehen sei Empedokles, und die Leser dieser Rezension werden sich wundern, wenn S. 99 zu dem Namen Banas (im Text nicht vokal., also „Bns") keine Note sich vorfindet, während doch schon seit Woepckes Zeiten darüber gestritten worden ist, ob darunter Valens oder Pappos verstanden sei, welch' letzteres heute kaum mehr bezweifelt werden wird. Bei dieser Gelegenheit haben wir auf eine Nachlässigkeit oder Flüchtigkeit des Herausgebers hinzuweisen, die sich durch das ganze Werk hindurchzieht, auf die Unvollständigkeit der Randverweisungen: bei dem auf „Bns" folgenden Artikel Badrûġûia (?), aus dem bis jetzt nichts gemacht werden konnte, verweist Lippert am Rande auf die Parallelstelle im *Fihrist* (S. 269, 25), während bei „Bns", der im *Fihrist* auf der gleichen Seite behandelt ist, keine Verweisung steht, er heißt eben im *Fihrist* „Bbs", der Artikel stimmt aber in der Anführung der Werke des Autors vollständig mit dem im vorliegenden Buche überein. Solches Fehlen von Verweisungen oder Unvollständigkeit derselben habe ich an mehr als dreißig Stellen gefunden, und dieselben würden sich noch sehr vermehren, wenn von den biographischen Quellen nicht nur der *Fihrist*, Ibn Abi Uṣaibi'a und Abûlfarag, sondern auch Ibn Challikân, el-Kutubî, Abûlfidâ', Maqqarî und Andere berücksichtigt worden wären.

Was die Handschriften anbetrifft, die dem Herausgeber zu Gebote standen, so müssen wir bedauern, daß er die Pariser und diejenige des Escorials nicht benutzen konnte, die erstere wenigstens wäre gewiß zu erreichen gewesen. Bei den Nummern der beiden Wiener Handschriften (1061 und 1062) ist es uns aufgefallen, daß diese Nummern nicht stimmen mit denen, die diese Handschriften im Katalog von G. Flügel tragen, nämlich 1161 und 1162; es werden dies wohl Druckfehler sein, wie auch die Angabe S. 17 der Einleitung, die *Bibliotheca arabico-hispana* des Casiri biete 33 (statt 133) Biographien von griechischen und arabischen Gelehrten aus Qifṭî.

Wir gehen nun zur Besprechung einzelner Artikel über, und beschränken uns dabei mit wenigen Ausnahmen auf die Mathematiker und Astronomen (Astrologen). Dabei werde ich auch einige Biographien aufnehmen, die im *Fihrist* und bei Casiri sich nicht vorfinden, und daher auch nicht in meiner Übersetzung eines Teils des 7. Buches des *Fihrist* (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **6**, 1892, und in meinem Buche *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **10**, 1900) stehen; da dieselben für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften nicht von wesentlichem Werte sind, so habe ich nicht für nötig erachtet, ihnen einen besonderen Artikel zu widmen.

S. 59. Aṭâfrûdîṭos. Wahrscheinlich, wie auch Lippert vermutet, Epaphroditos, der Artikel lautet: „Ein griechischer Philosoph; er wird erwähnt von Jaḥjâ b. ʿAdî, welcher ihm ein Buch *„über die himmlischen Erscheinungen“* (Meteorologie) zuschreibt, das einen Kommentar zu der Abhandlung des Aristoteles über den Regenbogen bildet, es wurde übersetzt von Ṯâbit b. Qorra“.

S. 59. Eudemos. Es ist jedenfalls Eudemos von Rhodos gemeint; der Artikel lautet: „Ein Gelehrter (Weiser) von den Gelehrten Rûms (d. h. Ostroms = Griechenlands), nahm zu seiner Zeit eine ehrenvolle Stellung ein in Bezug auf die Bereicherung dieses Gebietes (des philosophischen), war hervorragend in der Kenntnis der Philosophie des Aristoteles, dessen Schriften er zum Teil kommentierte.“ Also nichts von einer Geschichte der Geometrie.

S. 62—65. *Euklides. Hier hat S. 64 Ibn al-Qifṭî folgende Stelle: „Und von Abû Ḥafṣ el-Ḥâriṯ el-Chorâsânî — er wird noch erwähnt werden — hat man einen Kommentar zum Buche des Euklides“; diese Stelle ist wörtlich dem *Fihrist* entnommen, nur ist der Name des Kommentators verdorben, er heißt im *Fihrist* Abû Ǵaʿfar el-Châzin el-Chorâsânî, und dies ist auch das richtige, aus diesem konnte sehr leicht die falsche Lesart des Qifṭî entstehen, der auch Ḥâǵî Chalfa I, 382 gefolgt ist; meine Anmerkung 8 (*Die Mathem. und Astron. der Araber*, S. 210) wird somit in ihrem mittleren Teile hinfällig; einen Beweis für die Richtigkeit der Lesart des *Fihrist* bildet auch die Tatsache, daß sowohl in diesem Buche als bei Ibn al-Qifṭî Abû Ǵaʿfar el-Châzin nachher erwähnt wird, nicht aber ein Abû Ḥafṣ el-Ḥâriṯ; auch sind Bruchstücke eines Kommentars zum Euklid von Abû Ǵaʿfar el-Châzin vorhanden (s. meine genannte Abhandlung, S. 58). — S. 65. Die Stelle über die Kommentare des Pappos und des Muḥ. b. ʿAbdelbâqî (vergl. Biblioth. mathem. 4_3, 1903, S. 22—27) heißt in wörtlicher Übersetzung: „Ich sah einen Kommentar des 10. Buches von einem Griechen Namens Balîs (d. i. Pappos), er wurde ins Arabische übersetzt, ich besitze denselben, ge-

schrieben von der Hand des Ibn Kâtib Ḥalîm (?); ich sah auch einen Kommentar desselben Buches von dem Qâḍî Abû Muḥ. b. 'Abdelbâqî el-Baġdâdî el-Faraḍî (dem Erbteiler), bekannt unter dem Namen „Qâḍî des Hospitals"; es ist ein schöner und trefflicher Kommentar, er gab darin Zahlenbeispiele zu den Lehrsätzen; ich besitze davon ein Exemplar geschrieben von der Hand des Verfassers selbst. Es erwähnt Abû'l-Ḥasan el-Qošairî el-Andalusî, daß von einem Andalusier ebenfalls ein Kommentar zu diesem Buche existiere, er nannte seinen Namen, ich habe ihn aber vergessen; er machte mir diese Mitteilung in Jerusalem im Jahre 595 (1198/99)".

S. 76. Ibrâhîm b. Zahrûn el-Ḥarrânî: Lippert zitiert Ibn Abî Uṣaibi'a I, 227 nicht.

S. 79. Aḥmed b. Muḥ. el-Ṣâġânî: Abûlfarag 329 ist nicht zitiert.

S. 80. Omeija b. 'Abdel'azîz: Hier sind Ibn Challikân (Bulaker Ausgabe I, 80, Übers. I, 228), Abûlfarag 375 und Maqqarî (Ausgabe von Kairo, I, 372) nicht zitiert.

S. 95—98. Ptolemaios. Am Schlusse des Artikels wird die Übersetzung der Geographie dieses Autors ausdrücklich dem el-Kindî zugeschrieben, während der *Fihrist* sie als für el-Kindî übersetzt hezeichnet; wir halten das letztere für das richtige, Lippert hemerkt hierüber nichts.

S. 108. Hier erscheint Theodosios zweimal, das erstemal Thaḍosios, das zweitemal Thioḍofros geschriehen; an den angeführten Schriften erkennt man, daß es sich um denselben Autor handelt; zu diesem Versehen des Ibn el-Qifṭî (oder vielleicht des Zauzanî, des Verfassers des Auszuges) hat Lippert nichts zu hemerken; einem ähnlichen Fehler werden wir nochmals begegnen.

S. 111. Ṯâbit b. Ibrâhîm b. Zahrûn: Abûlfarag 324 und Abûlfid. II, 546 sind nicht zitiert.

S. 115—122. Ṯâbit b. Qorra: Ibn Challikân I, 100, Übers. I, 288 und Abûlfarag 288 sind nicht zitiert. — S. 119 macht Ibn el-Qifṭî die Angabe, daß Ṯâbit auch den *Almagest* des Ptolemäus ins Arabische übersetzt habe, neben seiner Verhesserung der Übersetzung des Isḥâq b. Ḥonein.

S. 157. Ġa'far el-Qaṭṭâ'. Ich habe das Wort *el-ad'ur* (Z. 4) mit Casiri *el-adwâr* gelesen, und dabei an *hisâb el-daur* (ein bestimmtes Gebiet der Erbteilung oder Testamentsrechnung) gedacht, und daher in meinem Buche (*Die Mathem. und Astron. der Araber*, S. 131) geschrieben, dieser Autor sei auch als Erbteiler bekannt gewesen. Nach dem vorliegenden Text müßte man übersetzen: „er hatte auch große Kenntnisse in der Teilung der Gehöfte (Häuser, Grundstücke) und ihrer Bebauung", was mir das wahrscheinlichere zu sein scheint.

S. 165—168. El-Ḥasan b. el-Ḥasan b. el-Haiṯam. Abûlfarag 340 ist nicht zitiert. — Das Verzeichnis der Schriften dieses Autors weist verschiedene Fehler auf: S. 167, Z. 18 muß es statt *el-muġassam el-mutakâfî* heißen *el-muġassam el-mukâfî* (= der parabolische Körper, das Paraboloid); Lippert nimmt die unrichtige Lesart auf, und setzt die richtige des Ibn Abî Uṣaibi'a zu den Lesarten in die Fußnote, was ihm noch öfters passiert ist (vergl. auch die Rezension de Goejes in der Deutschen Litteraturzeitung 1903, Nr. 25). S. 167, Z. 19 muß es statt *el-'adad el-muġassam* (= die körperliche Zahl) nach Ibn Abî Uṣaibi'a II, 98 heißen *fî mas'ala 'adadîja muġassama* (= über ein körperliches Zahlenproblem, wahrscheinlich eines vom dritten Grade). S. 167, Z. 19: „Teilung der Linie, welche Archimedes über die Kugel *(fî'l-*

kura) angewandt hat", ist unvollständig, es soll heißen: *fî kitâb el-kura we'l-ustuwâna* (= im Buche über die Kugel und den Zylinder). S. 168, Z. 2: *Ḥall šakk min el-muǵassam* (= Lösung einer Schwierigkeit aus dem Körper?) ist verdorben, es soll heißen: „Lösung einer Schwierigkeit *fî muǵassamât kitâb uqlidis*" (= in dem stereometrischen Teile des Buches des Euklides). S. 168, Z. 3 soll es statt *aḍla'* (oder *aḍlu'*) *el-muka''ab* heißen *ḍil' el-muka''ab* (= Würfelseite, Kubikwurzel). S. 168, Z. 8 soll es statt *uṣûl el-kawâkib* (Anfänge der Gestirne) heißen *aḍwâ' el-kawâkib* (Lichter der Gestirne). S. 168, Z. 13: *irtifâ' el-quṭr* (Höhe des Durchmessers?): die richtige Lesart des Ibn Abî Uṣaibi'a *el-quṭb* (des Pols) setzt Lippert in die Fußnote, die Arbeit handelt über die Bestimmung der Polhöhe. Außerdem sind die Titel einer Reihe von Abhandlungen, wenn auch nicht unrichtig, so doch sehr gekürzt; so ist die Abhandlung (S. 168, Z. 14) *ta'liq fi'l-ǵebr* (Glosse zur Algebra) sehr wahrscheinlich identisch mit der Abhandlung bei Ibn Abî Uṣaibi'a betitelt: „Randglossen, welche Isḥâq b. Iûnis, der Arzt in Kairo, nach Ibn el-Haitam dem Buch des Diophantos über algebraische Aufgaben hinzugefügt hat".

S. 168. El-Ḥasan b. el-Emîr Abî 'Alî b. Niẓâm el-mulk, der Enkel des Wezîrs Niẓâm el-mulk (s. Art. 266 in meinem Buche: *Die Mathem. und Astron. d. Araber)*, hatte schöne Kenntnisse in den philosophischen und astronomischen Wissenschaften. Er starb sehr geehrt in Bagdad im Ṣafar d. J. 613 (1216).

S. 169. El-Ḥosein b. Isḥâq b. Ibrâhîm. Ibn el-Qifṭî schreibt das Werk „wie man mit Hilfe der bestimmten Höhe (der Sonne) erkennen kann, wie viel Stunden des Tages vorüber sind", das der *Fihrist* dem Abû'l-Ḥosein b. Karnîb (s. Art. 80 in meinem Buche) zuteilt, seinem Sohne el-Ḥosein b. Isḥâq b. Ibrâhîm, Abû'l-Ḥasan, einem bedeutenden Naturphilosophen, zu, was auch Ibn Abî Uṣaibi'a (nach Ibn el-Qifṭî) tut; ich hatte vergessen, dies in Art. 80 zu erwähnen.

S. 170. Ḥabaš: Abûlfarag 247 ist nicht zitiert.

S. 171. Ḥonein b. Isḥâq: Abûlfarag 263 und Ibn Challikân I, 167, Übers. I, 478 sind nicht zitiert.

S. 177. Ḥobeiš, der Neffe Ḥonein b. Isḥâqs, hieß Ḥobeiš b. el-Ḥasan el-A'sam, wonach Abûlfarag 263 und mein Buch (S. 22) zu ergänzen sind.

S. 181. Dâ'ûd, der Astrolog, lebte in 'Irâq, zur Zeit der Bujiden, war berühmt in seiner Kunst, in der Herstellung astronomischer Tafeln und in der Kenntnis des Laufes der Gestirne; er starb ums Jahr 430 (1038/39). — Vergleicht man diesen Artikel mit dem auf derselben Seite stehenden über el-Châqânî, den Astrologen (in meinem Buche S. 95), so könnte man fast auf die Vermutung kommen, daß diese beiden Persönlichkeiten identisch seien.

S. 190. Sinân b. Ṯâbit. Hier sind Abûlfarag 299 und Abûlfid. II, 425 nicht zitiert. — Bei dem Werke Sinâns: „Verbesserung des Buches des Aqâton (?) über die Elemente der Geometrie", wo alle Mss. diese Lesart haben, und ich mit Ibn Abî Uṣaibi'a eine Lücke offen gelassen habe, ersetzt Lippert „Aqâton" durch „Iflâton" (= Platon), indem er darauf hinweist, daß der *Fihrist* (S. 246) und Ibn el-Qifṭî (S. 18) dem Platon ein Werk über die Elemente der Geometrie, übersetzt von Qosṭâ, zuschreiben; ich habe in meiner Übersetzung eines Teils des siebenten Buches des *Fihrist* (S. 7) darauf hingewiesen, daß hier wohl eine Verwechslung des Verfassers des *Fihrist* vorliegen könnte, indem Qosṭâ eine eigene Abhandlung unter diesem Titel geschrieben

habe; dies ist insofern nicht ganz genau, als der Titel des Qosṭâ'schen Buches lautet: *Einleitung in die Geometrie.* Es wäre also möglich, daß die Araber zur Zeit des Qosṭâ ein aus dem Griechischen übersetztes Buch über die Elemente der Geometrie gekannt hätten, das sie dem Platon zuschrieben. — S. 195, Z. 18 sind die Worte *min kitâb* (aus dem Buche) zu streichen, sie folgen in der letzten Zeile nochmals an richtiger Stelle.

S. 219. El-'Abbâs b. Sa'îd el-Ǵauharî. Das letzte Werk, das ihm zugeschrieben wird, heißt bei Ibn el-Qifṭî „*das Buch der Sätze, welche im ersten Buche des Euklides sind*"; es soll aber nach dem *Fihrist* heißen, *welche er zum ersten Buche des Euklides hinzugefügt hat*". Lippert bemerkt über diese Abweichung nichts.

S. 225. 'Abderraḥmân b. Ismâ'îl b. Bedr. Sein Neffe Abû'l-'Abbâs Aḥmed heißt hier b. Abî Ḥâtim statt wie bei Hammer (V, 303) b. Abî Ḥâkim (vergl. mein Buch, S. 73).

Ibid. 'Abderraḥmân b. Muḥ. b. 'Abdelkerîm. Lippert vergißt, Ibn Abî Uṣaibia II, 49 zu zitieren; nach diesem habe ich das Jahr 387 als Geburtsjahr angegeben, während Ibn el-Qifṭî 389 hat.

S. 230. 'Alî b. 'Abderraḥmân b. Iûnis. Hier sind Ibn Challikân I, 375, Übers. II, 365 und Abûlfid. II, 619 nicht zitiert.

S. 240. 'Alî b. Aḥmed b. 'Alî b. Muḥ. b. Dawwâs el-Wâsitî, Abû'l-Ḥasan, studierte die Wissenschaften der Alten und war besonders ausgezeichnet in der Astronomie (Astrologie?). Er ließ sich in Bagdad nieder und hatte viele Schüler. Er starb im Rabî' II, 612 (1215).

S. 245. 'Îsâ b. Zur'a b. Isḥâq: Es wird nicht bemerkt, daß der *Fihrist* hiervon abweichend hat: 'Îsâ b. Isḥâq b. Zur'a; auch wird Abûlfarag 338 nicht zitiert.

S. 254. El-Faḍl b. Muḥ. b. 'Abdelḥamîd, Abû Barza, tritt S. 406 nochmals auf unter dem Namen Abû Barza el-Ḥâsib; Lippert bemerkt nichts über die Identität beider.

S. 255. El-Faḍl b. Naubacht: *kitâb el-bahtamân*; der *Fihrist* hat *el-nahmatân*, was der wahrscheinlichen Lesart *el-numûdâr* (pers. = Horoskop) näher kommt.

S. 256. Farruchânšâh b. Naḍir (od. Naṣir?) b. Farruchânšâh, ein persischer Astrolog, wohnte in Bagdad zur Zeit der Deilemiten (Bujiden) und war sehr geschickt in seiner Kunst. Er starb daselbst im Ǵumâdâ I, 367 (Jan. 978) nach Hilâl b. el-Muḥsin (od. Muḥassan).

S. 260. Fanôn = Theon von Alexandria, ist S. 108 schon behandelt, was nicht bemerkt wird.

S. 261. Falîs el-Rûmî. Dies ist der Astrolog Vettius Valens. Statt der besseren Lesart des *Fihrist el-zabraǵ* nimmt Lippert *el-barîdaǵ* auf; ich habe in meiner Übersetzung aus dem 7. Buche des *Fihrist* (S. 65, Anmerkg. 188) darauf hingewiesen, daß es wohl heißen muß *el-zâirǵa* (von dem pers. *zâǵiǵe* od. *zâǵiče)*, worüber man die zitierte Anmerkung nachsehen möge, wie auch Dozy's *Suppl.* und Vullers *Dict. pers.*

S. 262. Qosṭâ b. Lûqâ: In diesem Artikel hat bei der Aufzählung der Werke Qosṭâs Lippert eine Reihe von Varianten des *Fihrist* nicht angegeben; so z. B. heißt es bei Ibn el-Qifṭî (S. 263, Z. 8) nur „*das Buch der Auflösung von Zahlenaufgaben*", während im *Fihrist* hinzugefügt ist „*aus dem*

dritten Buche des Euklides"; S. 262, Z. 16, hat Ibn al-Qifṭî *„Einleitung in die Geometrie, in Fragen und Antworten, ausgezeichnet in seiner Art"*, während der *Fihrist* nur hat *„Einleitung in die Geometrie"*; S. 262, Z. 17, hat Ibn al-Qifṭî *„Einleitung in die Astronomie und die Bewegungen der Sphären und der Gestirne"*, der *Fihrist* hat *„Einleitung in die Wissenschaft der Gestirne"* (Astrologie?); *„der Kommentar zu dreieinhalb Büchern des Werkes des* Diophantos *über die Algebra"*, der im *Fihrist* steht, fehlt bei Ibn al-Qifṭî.

S. 264. Qanṭwân ist identisch mit dem Qiṭwâr im *Fihrist* (S. 270), wo unter den Lesarten ebenfalls der erstere Name vorkommt; Lippert erwähnt dies nicht und zitiert auch den *Fihrist* nicht.

S. 265. Kankah, der Inder. Der *Fihrist* (S. 270) ist nicht zitiert.

S. 267. Katîfât. Z. 9: El-Fasâsirî ist der bekannte Türke Basâsirî, der Bagdad um die Mitte des 5. Jahrhunderts der H. eine Zeit lang in seiner Gewalt hatte; Lippert erwähnt die richtige Form Basâsirî nicht.

S. 269. Mubaššir b. Fâtik. Hier ist Ibn Abî Uṣaibi'a II, 98, nicht zitiert.

Ibid. Mubaššir b. Aḥmed b.'Alî, Abû'l-Rašîd, hat noch den Beinamen el-Burhân. Ich übersetzte (in meinem Buche, S. 126) nach Casiri I, 428: „Der Chalife überließ ihm die Auswahl der Bücher, die er der hohen Schule *el-Niẓâmîje* in *Châtûn* schenken wollte;" nach dieser Angabe soll es heißen: „die er der *Châtûnischen* Seldschukischen Grenzfeste, und der hohen Schule *el-Niẓâmîje* (wahrscheinlich in Bagdad), und seinem Hause (Hofe) *el-musannât* (?) schenken wollte".

S. 270. Muh. b. Ibrâhîm el-Fazârî. In diesem Artikel wird zitiert: el-Ḥosein b. Muḥ. b. Ḥamîd, es sollte aber heißen: Muh. b. el-Ḥosein b. Ḥamîd, wie er auch S. 282 genannt ist.

S. 281. Muh. b. Chālid b.'Abdelmelik el-Merwarrûḏî. Hier muß vor *bi-damišq* ein *wa* stehen, denn es handelt sich um die beiden astronomischen Beobachtungen beim Tor Šammâsîja in Bagdad (214 d. H.) und auf dem Berge Qâsjûn bei Damaskus (217 d. H.).

S. 282. Muh. b. el-Ḥosein, Ibn el-Âdamî. Hier wird unrichtig *Fihrist* 280 zitiert, der hier behandelte Autor heißt el-Ḥosein b. Muh. el-Âdamî, und ist der Vater von Muh. b. el-Ḥosein.

S. 284. Muh. b.'Îsâ el-Mâhânî. Ich übersetzte in meinem Buche (S. 27) nach dem *Fihrist fî 'urûš el-kawâkib* mit: „über die Throne der Gestirne"; nun gibt Lippert die Lesart *'urûḍ* = Breiten (astronomisch-geographische), also „über die Breiten der Gestirne". Allerdings ist auch *'urûš* ein astrologischer Begriff (vergl. Sédillot, *Mém. sur les instrum. astron. des Arabes* T. I, p. 221).

S. 286. Muh. b. Keṯîr el-Ferġânî ist identisch mit Aḥmed b. Muh. b. Keṯîr el-Ferġânî, S. 78.

S. 287. Muh. b. Nâḥije. Der *Fihrist* hat Nâǵije, ebenso das Münchener Ms. 440 des Ibn al-Qifṭî, was Lippert unberücksichtigt läßt; Casiri hat Naǵim.

Ibid. Muh. b. Akṭam b. Jaḥjâ. Der *Fihrist* hat Muh. b. Jaḥjâ b. Akṭam, was Lippert nicht anführt.

Ibid. Muh. b. Muh. b. Jahja, Abû'l-Wefâ' el-Bûzǵânî. In diesem Artikel hat (S. 288, Z. 9) Lippert für den Verfasser des Buches über Algebra, das Abû'l-Wefâ' kommentiert haben soll, die Konjektur Flügels im *Fihrist*,

nämlich „Hipparchos“ aufgenommen. Ich beharre auf dem, was ich schon in meiner Übersetzung aus dem *Fihrist* (S. 54, Anmerkung 97) und in dem Buche *Die Mathem. u. Astron. d. Araber* (S. 213, Anmerkung 36) gesagt habe, daß sehr wahrscheinlich „Ibn Jaḥjâ“ zu lesen sei, wie auch Sédillot (*Prolégom. des tables astron. d'Oloug-Beg*, Paris 1847, p. LIX) und Casiri (*Bibl. arabico-hispana* I, 433) nach dem Mss. von Paris und Escorial haben. Wer mit „Ibn Jaḥjâ“ gemeint sei, darüber habe ich in der zweiten der genannten Stellen eine Vermutung ausgesprochen,; ich füge hier noch hinzu, daß auch noch einer anderen Konjektur nicht geringe Wahrscheinlichkeit zukommt: Ibn Jaḥjâ könnte der Lehrer Abû'l-Wefâs in Arithmetik und Geometrie sein, der hier bei Ibn el-Qifṭî Abû Jaḥjâ el-Bâwardî (od. Mâwardî), in anderen Mss. aber Ibn Jaḥjâ el-Bâwardî heißt (nach dem *Fihrist* war er der Lehrer des Oheims von Abû'l-Wefâ). — Wir müssen bei dieser Gelegenheit auch auf den dieser Ausgabe beigegebenen Index der Personennamen zu sprechen kommen; wir finden in demselben unsern Autor Abu'l-Wefâ' el-Bûzǵânî, an drei verschiedenen Stellen: S. 452 unter Abû'l-Wefâ' el-Bûzǵânî, S. 478 unter Muh. b. Muh. el-Ḥâsib Abû'l-Wefâ', S. 479 unter Muh. b. Muh. b. Jaḥjâ, an allen drei Orten mit verschiedenen Seitenverweisungen, was uns zur Annahme zwingt, Lippert habe diese drei Autoren als drei von einander verschiedene Personen betrachtet.

S. 315—316. Mûsâ b. Šâkir und seine Söhne. Hier (S. 316, Z. 8) hat Lippert die falsche Lesart *farastûn* in den Text aufgenommen, und die richtige *qarastûn* (vom griechischen *χαριστίων*) in die Fußnoten gesetzt, während er umgekehrt S. 263 die richtige im Text und die falsche des *Fihrist* in den Noten hat.

S. 319. Moses b. Meimûn. Ich habe mich durch Ibn el-Qifṭî verleiten lassen, das unrichtige Todesjahr 605 in meine *Math. u. Astron. d. Araber* (S. 132) aufzunehmen. Wie Steinschneider nachgewiesen hat, starb er 601 (13. Dezember 1204); dies hat Lippert nicht berücksichtigt. — In diesem Artikel befindet sich ein weiterer Fehler, auf den Lippert nicht aufmerksam macht: *kitâb el-istikmâl* (= Buch der Vollendung) steht zweimal da, beim Buche des Ibn Aflaḥ und dem des Ibn Hûd; beim ersteren sollte stehen: *kitâb el-hei'a* (Buch der Astronomie), oder einfach *el-kitâb* (das Buch), da nachher noch folgt „über die Astronomie“.

S. 321. Milâos = Menelaos. Nur durch einen Artikel von diesem Autor getrennt erscheint nochmals Menâlâos = Menelaos, ein Beweis, daß schon zur Zeit Ibn el-Qifṭî's diese griechischen Namen in den arabischen Schriften verstümmelt vorkamen, so daß manchmal ihre Identität nicht erkannt wurde. Daß die beiden genannten identisch sind, ist zweifellos, der erste Artikel beginnt: „Milâos, mathematischer Gelehrter, geschickt in der Geometrie“; der zweite: „Menâlâos, der Mathematiker, einer von den Führenden in der Geometrie“; daß beim ersten Artikel die Angabe der verfaßten Werke fehlt, mag zu dem Irrtum verleitet haben, es seien dies zwei verschiedene Gelehrte. Lippert übergeht dies alles stillschweigend.

S. 322. Marâjâ el-Bâbilî. Der *Fihrist* (S. 270) ist nicht zitiert, also auch seine abweichende Lesart Mazâbâ nicht angegeben.

Ibid. Mâgnus aus Emessa. Der *Fihrist* (S. 293) ist nicht zitiert.

S. 326. Maslama b. Aḥmed el-Marǵîṭî. Die Lesart Maǵrîṭî, die allgemein adoptiert ist, und die auch die Mss. von Paris und Escorial (nach Sédillot und Casiri) haben, erwähnt Lippert nicht.

S. 337. Nazîf el-Nafs (od. Nafas?). Lippert bemerkt zu Nafs gar nichts, obgleich Ibn Abî Uṣaibi'a, I, 238, den Lippert zitiert, statt el-Nafs el-Qass (= der Priester) hat. Abûlfarag 326 (Ausgabe von Pocock) hat allerdings el-Nafs, die Ausgabe von Beirût 1890, S. 305, dagegen el-Qass.

S. 338. Hârûn b.'Alî b. Hârûn b. Jaḥjâ b. Abî Manṣûr. Durch falsche Lesarten ist hier eine Verwirrung entstanden: Lippert wie auch ich (vergl. *Die Mathem. u. Astron. d. Araber*, S. 34), hielt diesen Astronomen für identisch mit dem im *Fihrist*, S. 144, behandelten Enkel Jaḥjâ b. Abî Manṣûrs, mit Hârûn b.'Alî b. Jaḥjâ; dieser ist aber schon 288 (901) gestorben, und es wird im *Fihrist* auch gar nichts davon gesagt, daß er Astronom gewesen sei. Unser Autor kann aber auch nicht, wie den Namen nach angenommen werden müßte, der Urenkel Jaḥjâs sein, denn nach dem *Fihrist*, S. 143, hatte Jaḥjâ keinen Sohn Namens Hârûn, sondern die vier Söhne Muh., 'Alî, Sa'îd el-Ḥasan; es bleibt uns also nichts anderes übrig, als nach dem zweiten Hârûn noch „b. 'Alî" einzuschieben, was in der Tat das Münchener Ms. 440 f. 127ª (Lippert bemerkt dies in der Note nicht) und das Pariser Ms. 2112 nach Sédillot (l. c. p. LXI) haben; dann wäre unser Autor also der Ururenkel Jaḥjâs, Hârûn b. 'Alî b. Hârûn b. 'Alî b. Jaḥjâ, gestorben 376 (987); dieses Todesjahr stimmt recht gut, denn sein Vater 'Alî b. Hârûn b. 'Alî b. Jaḥjâ starb nach dem *Fihrist* (S. 144, Z. 12) im Jahre 352. In meinem Artikel 65 ist also der Name des Astronomen in der angegebenen Weise zu ergänzen, statt Enkel Ururenkel zu setzen, und das Todesjahr 288 (901) zu verändern in 376 (987). Es ist allerdings sonderbar, daß der *Fihrist* diesen Astronomen nicht erwähnt, der ja ein Zeitgenosse seines Verfassers gewesen ist, es wäre denn, daß mit dem S. 144, Z. 20 genannten Abû 'Abdallâh Hârûn b. 'Alî b. Hârûn unser Astronom gemeint wäre, von Beschäftigung mit Astronomie steht aber in diesem Artikel gar nichts.

S. 379. Jûḥannâ (od. Jaḥjâ) b. el-Baṭrîq: Ibn Abî Uṣaibi'a I, 205, ist nicht zitiert. Auch im *Fihrist* ist er an acht Orten genannt, es ist ihm aber kein eigener Artikel gewidmet.

S. 391. Jûsuf el-Herawî. Der Artikel ist hier etwas vollständiger als im *Fihrist*; er wird ein bedeutender Astrolog seiner Zeit genannt, und das Werk, dessen Titel ich (vergl. meine *Math. u. Astron. d. Araber*, S. 57) mit *„Buch über die astrologische Betrügerei (Heuchelei)"* übersetzt habe, heißt hier vielleicht richtiger: *„über das astrologische Glück"* (*rizq* = unverhofftes Glück, das das Geschick bringt; der *Fihrist* hat *zarq*); da er ein hervorragender Astrolog war, wird er wohl nicht gegen seine Kunst geschrieben haben.

S. 404. Abû'l-Ḥakem el-Maġrebî el-Andalusî. Hier ist weder Ibn Abî Uṣaibi'a II, 144, noch Ibn Challikân I, 274, Übers. II, 82, noch Abûlfarag, 396, zitiert. Es ist zu meinem Artikel 290 (*Math. u. Astron. d. Araber*, S. 121) noch nachzutragen, daß nach Ibn el-Qifṭî einer der Schüler Abû'l-Ḥakems in Bagdad Negm ed-dîn Aḥmed b. el-Serî b. el-Ṣalâḥ (s. in meinem Buche Art. 287, S. 120) war, der nach den Quellen ein Jahr vor seinem Lehrer gestorben ist.

S. 408. Abû Sahl el-Masîḥî. Hier ist Ibn Abî Uṣaibi'a I, 327, nicht zitiert.

S. 410. Abû 'Abdallâh b. el-Qalânisî. Hier wäre am Platze gewesen, die Lesart el-Balensî (der Valencianer), die Casiri (I, 407) statt el-Qalânisî hat, anzuführen.

Ibid. Abû 'Alî el-Muhandis el-Miṣrî. Ibn Challikân, II, 192, Übers. III, 599 und Abûlfarag, 385, nicht zitiert.

S. 426. Abû'l-Faḍl el-Châzimî. Dieser Astrolog, der aus einer Konjunktion der 7 Gestirne (Sonne und Mond und die fünf Planeten) im Sternbild der Wage im Jahre 582 schreckliche Stürme und anderes Unglück prophezeite, was aber nicht eintraf, ist kaum identisch mit 'Abderraḥmân el-Châzinî, Abû'l-fatḥ oder Abû Manṣûr, wie ich in meinem Buche *(Die Math. u. Astron. d. Araber*, S. 122, Note c) vermutet hatte.

S. 428. Abû'l-Futûḥ Neǵm ed-dîn, Ibn el-Ṣalâḥ. Ibn Abi Uṣaibi'a, II, 164, ist nicht zitiert.

S. 429. Abû'l-Qâsim el-Qaṣrî. Ich habe in meinem Buche (Art. 184, S. 80) el-Qaṣarî geschrieben, die erstere Lesart ist wohl die richtige; ich halte ihn auch nicht mehr für identisch mit dem im *Fihrist* (284) und bei Casiri (I, 419) genannten Astrologen Qaṣrânî, es ist also auch im Artikel 133 (S. 61) meines Buches der Name Abû'l-Qâsim el-Qaṣrânî in Abû'l-Qâsim el-Qaṣrî zu verwandeln, auf was ich übrigens daselbst schon in einer Klammerbemerkung hingedeutet habe.

S. 435. Abû Jaḥjâ el-Merwazî. *Fihrist* 263 ist nicht zitiert.

S. 436. Abû Ja'qûb el-Ahwâzî. Ibn Abi Uṣaibi'a I, 238 ist nicht zitiert.

S. 437. Ibn Abî Ḥajja (od. Ḥaija), der Astrolog aus Bagdad (fehlt in meinem Buche), war ein Schüler von Ǵa'far b. el-Muktafî (siehe Artikel 142 meines Buches).

S. 439. Ibn Abî Ṭâhir. Dies ist der in meinem Buche (Artikel 497, S. 198) genannte Moẓaffar b. 'Alî b. el-Moẓaffar; es heißt hier von ihm: „er beschäftigte sich eifrig mit Astrologie in Bagdad, er hatte Glück in der Vorhersagung des Verborgenen, und er fand daher meistens Glauben".

S. 440. Ibn el-Simbâdî. Hier hätte Lippert anführen dürfen, daß Casiri I, 417 hat: Ibn el-Nebdî; aus Simbadî, geschrieben Sinbadî, konnte leicht Nebdî entstehen, welches die richtige Lesart sei, ist nicht zu entscheiden.

S. 441. Banû Mûsâ b. Šâkir. Bei diesem wichtigen Artikel ist weder der *Fihrist* 271, noch Abûlfarag 280, noch Ibn Challikân II, 79, Übers. III, 315, noch Abûlfid. II, 241, zitiert!

S. 443. Ibn Riḍwân el-Miṣrî. Hier ist weder Ibn Abi Uṣaibi'a II, 99, noch Abûlfarag 356, zitiert. Der Schluß dieses Artikels lautet bei Ibn el-Qifṭî: „Ibn Riḍwân hatte eine mittelschöne Schrift, aber gerade und deutlich; ich sah von seiner Hand geschrieben die Abhandlung des Ibn el-Haiṯam über das Licht des Mondes. — — — Am Ende stand geschrieben: Es schrieb dieses 'Alî b. Riḍwân b. 'Alî b. Ǵa'far, der Arzt, für sich selbst, und kam zu Ende damit in der Mitte des Ša'bân 422" (1032).

In Bezug auf den Index habe ich schon erwähnt, daß Abû'l-Wefâ an drei verschiedenen Stellen vorkommt, ich habe noch einige ähnliche Fälle zu notieren: Jûsuf b. Jaḥjâ b. Isḥâq el-Sebtî, der Schüler des Moses b. Meimûn, steht an zwei Stellen auf S. 485, zuerst unter dem Namen Jûsuf el-Nâšî el-Isrâ'ilî, und dann unter dem Namen Jûsuf b. Jaḥjâ b. Isḥâq el-Sebtî etc. Lippert wurde durch die Lesart el-Nâšî, die er S. 167 statt der richtigen el-Fâsî in den Text aufgenommen hat, irregeführt; hätte er aber den Artikel S. 392 über diesen Gelehrten, der ein Freund Ibn el-Qifṭis in Ḥaleb war, näher angesehen, so hätte er dort gefunden, daß daselbst hinter seinem Namen

wie S. 167 *nazîl ḥaleb* (d. h. Gast von Ḥaleb, oder wohnend in Ḥaleb) steht, auch liest man dort: „er war (seiner Zeit) Arzt in Fâs (Fes) im Maġreb", es ist also EL-FÂSÎ das richtige und nicht EL-NÂSÎ; man nannte ihn eben bald EL-SEBTÎ, bald EL-FÂSÎ, in der Tat hat auch IBN ABI UṢAIBI'A II, 213: „er stammte aus dem Maġreb, aus der Stadt Fâs". — Auf der gleichen Seite (485) des Index steht: JÛSUF EL-SÂHIR, bekannt unter dem Namen EL-QASS, und drei Zeilen weiter unten: JÛSUF EL-QASS, dieselbe Persönlichkeit. — Und nochmals auf der gleichen Seite steht: JÛSUF B. IBRÂHÎM, der Freigelassene des IBRÂHÎM B. EL-MAHDÎ, und sechs Zeilen weiter unten: JÛSUF EL-ṬABÎB (der Arzt) ABÛ'L-ḤASAN, wieder dieselbe Persönlichkeit; LIPPERT hätte noch aufnehmen können: JÛSUF EL-ṬABÎB EL-MUNAǦǦIM, wie der gleiche Autor S. 382 genannt wird, der kein anderer ist als der in meinem Buche (S. 42, Art. 78) genannte ABÛ'L-ḤASAN (so bei IBN ABÎ UṢAIBI'A II, 34, u. a. a. O.), JÛSUF B. IBRÂHÎM B. EL-DÂJA, der Verfasser der Geschichte der Ärzte; ja er wird sogar oft von IBN ABÎ UṢAIBI'A auch genannt JÛSUF B. IBRÂHÎM EL-ḤÂSIB (der Rechner). Wir geben aber zu, daß man sich bei der Abfassung eines Index auch auf den Standpunkt stellen kann, alle Namen genau so in den Index aufzunehmen, wie sie im Texte stehen, ohne Rücksicht auf Identität; wir müssen in der Tat annehmen, LIPPERT habe diesen Standpunkt zur Richtschnur genommen, sonst würde er nicht DIOPHANTOS an zwei Orten anführen, das eine Mal unter D, das andere Mal unter Ḍ.

Wenn man alle unsere Aussetzungen zusammenhält mit denjenigen DE GOEJES in der Deutschen Litteraturzeitung, so kann man nicht gerade von einer glücklichen Lösung der Aufgabe sprechen, die der Herausgeber dieses Werkes mit Unterstützung der Berliner Akademie der Wissenschaften übernommen hatte. Hätte sich LIPPERT bloß darauf beschränkt, in den Noten die abweichenden Lesarten der benutzten Handschriften zu geben, so hätten wir mit ihm nur über die Berechtigung eines so eng begrenzten Planes streiten können; indem er aber durch Herbeiziehung von IBN ABÎ UṢAIBI'A und des *Fihrist* diese Grenzen selbst überschritten hat, so mußte sofort die Mangelhaftigkeit seiner Arbeit zu Tage treten, und unser Urteil konnte nicht milder ausfallen. Es ist ja wohl zu begrüßen, daß dieses Werk endlich zur Veröffentlichung gelangt ist, und wir verkennen die große Arbeit nicht, die auf diese Ausgabe verwendet worden ist, allein ohne genaue Vergleichung mit den in diesem Buche zitierten und mehr noch mit den nicht zitierten Quellenwerken ähnlicher Richtung kann dasselbe von denjenigen nicht benutzt werden, die auf irgend einem Gebiete der arabischen Kulturgeschichte arbeiten wollen.

Zürich. H. SUTER.

E. Wölffing. Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. **I. Teil: Reine Mathematik.** Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. Leipzig, Teubner 1903. [= Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **16** : 1]. 8⁰, XXXVI + 416 S. Mark 14.

Es kommt zuweilen vor, daß man bei der Einsichtnahme eines Buches versucht wird, sich sofort von dem Inhalt desselben eine Vorstellung zu bilden, bevor man es wirklich gelesen hat, und wenn sich später diese Vorstellung als

unrichtig erweist, liegt es sehr nahe, den Verfasser zu beanstanden, weil er nicht das leistete, was man erwartet hatte. Ein solches Buch ist das Wölffingsche, und zwar sind es drei verschiedene Umstände, die dazu beitragen können, von demselben etwas anderes zu erwarten, als der Verfasser darin bietet. Zuerst gibt schon der Haupttitel „Mathematischer Bücherschatz", zusammengestellt mit dem im Untertitel vorkommenden Worte „wichtigsten", die Vorstellung ein, daß es sich um eine auserlesene mathematische Bibliothek handelt. Weiter wird man aus dem Umstande, daß man hier ein Heft der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften vor sich hat, geneigt werden anzunehmen, daß das Buch etwa von derselben Art, wie die Riccardische *Bibliotheca matematica italiana* ist, also eine durchgearbeitete und darum besonders zuverlässige Sammlung von bibliographisch-literarischen Angaben enthält. Endlich läßt uns die ausführliche Einleitung, die eine 26 Seiten lange kritische Durchmusterung der sonstigen literarischen Hilfsmittel auf dem Gebiete der Mathematik bringt, vermuten, daß die folgende Bibliographie auch wirklich kritisch bearbeitet worden ist.

Fängt man mit diesen Voraussetzungen an, den *Mathematischen Bücherschatz* näher zu studieren, muß man sich bald enttäuscht fühlen, und zwar um so mehr, je eingehender man sich mit mathematischer Bibliographie beschäftigt hat. In der Tat verzeichnet das Buch gar keine ausgewählte Sammlung mathematischer Schriften, denn teils ist die ganze periodische Literatur absichtlich ausgeschlossen worden, teils werden alle Schriften, die sich auf spezielle Teile der höheren Mathematik beziehen, unabhängig von ihrem größeren oder geringeren Wert aufgeführt; nur hinsichtlich elementarer Lehrbücher und mathematisch-historischer Schriften ist eine Auswahl getroffen worden. Weiter sieht der Sachkundige recht bald, daß Herr Wölffing zwar ein interessierter und fleißiger Sammler ist, daß er aber noch nicht die Kenntnisse und die Übung besitzt, die nötig sind, um eine wirklich kritische Bibliographie zu bearbeiten, so daß er von seinen Quellen auch in solchen Fällen abhängig gewesen ist, wo ein Bibliograph *ex professo* leicht die wünschenswerten Verbesserungen eingeführt haben könnte. Freilich muß auch in Betracht gezogen werden, daß Herr Wölffing für diese so umfassende Arbeit nur eine sehr beschränkte Zeit zur Verfügung gehabt hat.

Emanzipiert man sich aber von der Vorstellung, daß der *Mathematische Bücherschatz* uns ein kritisches Verzeichnis der wirklich wertvollen mathematischen Literatur des 19. Jahrhunderts bieten will, die im Buche selbst keinen Rückhalt findet, so liegt es wohl am nächsten, das Urteil über das Buch davon abhängig zu machen, ob der Plan gut und die Ausführung derselben so weit möglich gelungen ist.

In betreff des Planes ist schon bemerkt worden, daß Herr Wölffing absichtlich die periodische Literatur ausgeschlossen hat, und der Grund dazu wird in der Einleitung angegeben. Herr Wölffing hebt hier ausdrücklich hervor, daß er nur die nichtperiodische Literatur berücksichtigt hat, nicht weil die Zeitschriftenliteratur weniger wichtig wäre, auch nicht, weil man für dieselbe bereits ein Repertorium besäße, sondern lediglich auf Grund der Erwägung, daß er ohne eine solche Beschränkung ein uferloses, die Kräfte eines Einzelnen vielleicht übersteigendes Werk in Angriff zu nehmen fürchtete, während er sich vielmehr vorgesetzt hatte, sein Unternehmen in einer gegebenen Anzahl von Jahren wirklich zu Ende zu führen.

Dieser Bemerkung des Herr WÖLFFING stimme ich vollständig bei; will man entscheiden, ob die fragliche Beschränkung angebracht ist oder nicht, muß man sich in der Tat nicht fragen: „ist es nützlich eine mathematische Bibliographie auf die nichtperiodische Literatur zu beschränken?", sondern: „ist es nützlich, daß eine Bibliographie der nichtperiodischen Literatur zur Verfügung steht, oder ist es besser, dieselbe ganz zu vermissen?", und wie diese Frage zu beantworten ist, scheint mir nicht zweifelhaft zu sein. Vielmehr glaube ich, daß die Fachgenossen damit einverstanden sein werden, daß eine solche Bibliographie, trotz ihrer notgedrungenen Beschränkung auf die nichtperiodische Literatur, ihnen ein sehr willkommenes und nützliches Nachschlagebuch werden kann.

Aber nur wenig bin ich damit zufrieden, daß Herr WÖLFFING auch in solchen Fällen, wo es ausnahmsweise aus rein sachlichen Gründen besonders angebracht ist, eine gewisse Schrift aufzuführen, dieselbe ausschließt, nur weil sie der periodischen Literatur angehört. So z. B. findet sich S. 153 die Göttinger Dissertation von A. SACHSE: „Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen" (1879), während die neue, unter Bezugnahme auf die bekannte Entgegnung von P. DU BOIS-REYMOND (vergl. S. 106) berichtigte, Auflage der SACHSE'schen Schrift fehlt, offenbar aus dem rein formalen Grunde, weil sie in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 3, 1880 (S. 229—276) erschienen ist. Ebenso fehlt die Abhandlung von W. FR. MEYER: *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie*, die bekanntlich im ersten Bande (S. 79—292) des Jahresberichtes der deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht wurde, während S. 89 zwei Übersetzungen dieser Abhandlung aufgeführt sind; beiläufig sei bemerkt, daß auch diese Übersetzungen eigentlich der periodischen Literatur angehören, denn sie sind Sonderabzüge aus dem Bulletin des sciences mathématiques und dem Giornale di matematiche.

Ob und wie weit Lehrbücher der Elementarmathematik aufgeführt werden sollen, ist meiner Ansicht nach eine Geschmackssache, und das Verfahren eine Auswahl von solchen zu geben, kann ich darum sehr wohl billigen.

Dagegen bin ich nicht ganz damit einverstanden, daß Herr WÖLFFING, wie er in der Einleitung ausdrücklich hervorhebt, die Werke über Mathematik im allgemeinen, ebenso geschichtliche und biographische Schriften, die sich auf einzelne Orte und Personen beziehen, sowie Gesamtausgaben der Werke von Mathematikern ausgeschlossen hat. Daß die Aufführung dieser Arten von Schriften eine uferlose Arbeit gewesen wäre, kann natürlich nicht behauptet werden. In betreff der allgemeinen und gesammelten Werke könnte sein Verfahren möglicherweise so erklärt werden, daß er bei der Inangriffnahme seiner Arbeit nur an solche Benutzer des Buches dachte, die direkte Auskunft über die Literatur einer gewissen Frage wünschen. Streicht man aber die allgemeinen und gesammelten Werke, kann man wohl ebensogut die historischen Schriften fortlassen, die sich nicht auf eine bestimmte Theorie beziehen; führt man auf der anderen Seite solche historische Schriften auf, wie z. B. die S. 2 vorkommenden unbedeutenden Monographien über das Studium der Mathematik in Schweden und in Finnland in älterer Zeit, so sollte man meiner Ansicht nach nicht solche biographische Arbeiten, wie z. B. die über NEWTON von BREWSTER oder die über LEIBNIZ von GUHRAUER ausschließen. Indessen gebe ich gerne zu, daß meine Bemerkung praktisch genommen nicht von großem Belang ist.

Wie schon aus dem Titel hervorgeht, bietet das Buch ein systematisches Verzeichnis der betreffenden Schriften; die Anzahl der Abteilungen oder Stichwörter beträgt zusammen 313, beginnend mit „Geschichte der Mathematik“ und abschließend mit „Mathematischen Belustigungen“; von den Stichwörtern gehören 78 der Arithmetik und Algebra, 54 der Analysis, 173 der Geometrie an, und innerhalb jeder Abteilung sind die Titel alphabetisch nach den Verfassernamen geordnet. Für jede Schrift sind, außer Verfassernamen und Titel (der oft wesentlich abgekürzt ist), womöglich Druckort und Druckjahr (event. der letzten Auflage), sowie Verleger und Ladenpreis angegeben. Im Bedarfsfalle sind die Titel an mehr als einer Stelle aufgeführt, und überdies kommen zahlreiche Verweise vor. Am Ende des Buches finden sich zwei Register, nämlich ein Sachregister (12 Seiten) und ein Autorenregister, das nicht weniger als 43 dreispaltige Seiten in Anspruch nimmt.

Ohne Zweifel werden die meisten Benutzer des *Mathematischen Bücherschatzes* Herrn Wölffing dafür Dank wissen, daß er die Titel systematisch und nicht durchgehend alphabetisch geordnet hat. Selbstverständlich können gegen sein Klassifikationsschema (Herr Wölffing bemerkt in der Einleitung, daß er dabei die Anordnung des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik im wesentlichen zugrunde gelegt hat) wie gegen alle anderen vorgeschlagenen Einteilungen der Mathematik Ausstellungen gerichtet werden, aber hinsichtlich einer Bibliographie dient ja die Klassifikation nur dazu, daß die Benutzer die Literatur eines besonderen Gegenstandes leicht auffinden werden, und in den meisten Fällen wird dies Auffinden durch das Sachregister erleichtert.

Warum Herr Wölffing auf Angabe der Seitenzahlen verzichtet hat, gibt er in der Einleitung nicht an; möglicherweise beruht es darauf, daß in den von ihm benutzten Quellen diese Zahlen oft fehlen. Als einen teilweisen Ersatz dafür sind die Ladenpreise anzusehen, aber für meinen Teil würde ich Herrn Wölffing empfohlen haben, überall die Seitenzahl, sofern diese ihm bekannt war, anzugeben.

Ich habe im vorhergehenden über den Plan der Wölffingschen Arbeit berichtet, und gehe jetzt zur Ausführung desselben über. Dabei will ich zuerst einen Umstand berühren, wodurch dieser Plan nicht unerheblich modifiziert worden ist. Es ist oben bemerkt worden, daß Herr Wölffing die Zeitschriftenliteratur nicht berücksichtigt hat, aber bekanntlich ist es zuweilen etwas schwierig, Separatabzüge aus Zeitschriften als solche zu erkennen, und es bringt ja eigentlich keinen Übelstand mit sich, wenn sich einige Titel von Separatabzügen unter die anderen Titel einschleichen. Herr Wölffing ist auch dieser Ansicht gewesen, geht aber noch einen Schritt weiter. In der Einleitung teilt er nämlich mit, daß er nicht nur keine kräftigeren Anstrengungen gemacht hat um Separatabzüge auszumerzen, sondern sogar absichtlich eine Anzahl von Abhandlungen aus Gesellschaftsschriften aufgeführt hat, welche im Buchhandel einzeln zu haben sind. Dies Verfahren macht ja seine Bibliographie wertvoller für die Benutzer im allgemeinen, aber man könnte bemerken, daß der Leser dadurch in gewissen Fällen eine vollständig unrichtige Vorstellung von der Reichhaltigkeit der nichtperiodischen Literatur über einen gewissen Gegenstand bekommt. So z. B. enthält die Abteilung „Mengenlehre“ (S. 156), abgesehen von einem Verweise, 12 Titel, aber von diesen beziehen sich nicht weniger als 7 auf Separatabzüge aus Gesellschafts- oder Zeitschriften, nämlich Annales de la faculté des sciences de Marseille (2, 1892, 33—43; E. Amigues);

Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlinger (**40**, 1883, 2: 31—35; I. Bendixson); Mathematische Annalen (**47**, 1896, 20—32, C. Burali-Forti; **21**, 1883, 545—591, G. Cantor); Acta Mathematica (**2**, 1883, 305—314; G. Cantor); Archiv der Mathematik (11_2, 1892, 353—407; H. Kühn); Bibliotheca Mathematica (6_2, 1892, 9—25; G. Vivanti). Nimmt man hierzu, daß die aufgeführten Schriften von R. Bettazzi (*La teoria delle grandezze*) und A. Buchholz (*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*) gewiß nicht hauptsächlich die Mengenlehre behandeln (in den Fortschritten der Mathematik wird die erste zur Philosophie der Mathematik und die zweite zur Analytischen Geometrie des Raumes gerechnet), so stellt es sich heraus, daß für die Abteilung „Mengenlehre" nur drei Schriften übrig bleiben, nämlich zwei Doktordissertationen und eine französische Übersetzung aus den Mathematischen Annalen.

Auf ganz dieselbe Weise kann das Mitnehmen von Sonderabzügen leicht dazu veranlassen, daß man eine unrichtige Vorstellung von der Produktivität gewisser Verfasser bekommt. So z. B. wird für A. F. Berger im Autorenregister auf 11[1]) verschiedene Seiten verwiesen, aber von diesen Verweisen beziehen sich 7 auf Sonderabzüge.

Wie ich schon angedeutet habe, hat der jetzt hervorgehobene Umstand für die meisten Benutzer der Wölffingschen Bibliographie wenig zu bedeuten, wichtiger ist zu wissen, inwieweit die Arbeit vollständig und zuverlässig ist. In Bezug hierauf habe ich einige Stichproben gemacht, und es scheint mir daraus hervorzugehen, daß Herr Wölffing die ihm zur Verfügung stehenden oder gestellten Quellen, so weit es ihm möglich gewesen ist, ausgenutzt hat. Ich setze absichtlich hinzu: „so weit es ihm möglich gewesen ist", und diese Worte deuten darauf hin, daß er teils eine ziemlich beschränkte Zeit zur Verfügung gehabt hat, teils noch kein Bibliograph von Fach ist. Was ich damit meine, werde ich an einigen Beispielen näher erläutern. Wenn ein wirklicher Bibliograph aus verschiedenen Quellen die zwei Titel (vergl. S. 6 und 12) notiert hätte:

> **Dickstein, S.**, Die mathem. Begriffe und Methoden. I. Warschau 1891.
> **Dickstein, S.**, Begriffe und Methoden der Mathem. (poln.). Warschau 1891. Gebethner. 10 M.,

so würde er entweder sogleich erkannt, oder ohne Mühe ermittelt haben, daß sich beide Angaben auf eine und dieselbe Arbeit in polnischer Sprache (vergl. S. 132): *Pojęçia i metody matematyki* beziehen. — Wenn er in einer Bibliographie die zwei Titel finden würde (vergl. S. 147 und S. 406 des Autorenregisters):

> **Schlesinger, L.**, Über lineare homogene Differentialgleichungen 4. Ordnung, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als des 1. Grades bestehen. Diss. Berlin 1887. Mayer & Müller. 2,4 M.
> —, Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen 3. Ordnung. Diss. (Kiel) Berlin 1888. Mayer & Müller. 1,8 M.,

1) Eigentlich würde im Register noch auf S. 97 und 98 verwiesen werden (an der ersten Stelle wird eine Schrift von A. F. Berger unrichtig C. H. Berger zugeschrieben, und der an der anderen Stelle aufgeführte A. Berger ist mit A. F. Berger identisch); auch in diesen beiden Fällen handelt es sich um Separatabzüge.

so würde er wahrscheinlich im voraus wissen[1]) daß diese zwei Dissertationen von zwei verschiedenen Verfassern herrühren, sonst aber sicherlich die zwei „Diss." verdächtig finden und dann leicht ermitteln, daß die erste Schrift Ludwig Schlesinger, die zweite Lipmann Schlesinger zum Verfasser hat. — Ebenso würde er sofort sagen können, daß (vergl. S. 176) eine Abhandlung von A. von Braunmühl aus dem Jahre 1887 nicht eine Dissertation sein kann (Braunmühl war damals seit einigen Jahren Privatdozent). — Ein geübter Bibliograph würde ohne weiteres eine solche Angabe wie die folgende (vergl. S. 35) in Verdacht haben:

Libri, G., Mémoire sur la théorie des nombres (ital.). Paris 1833,

denn es wäre in der Tat merkwürdig, wenn Libri, der französisch ebenso leicht wie seine Muttersprache schrieb, in *Paris* eine Arbeit in *italienischer* Sprache veröffentlicht hätte. In der Tat ist die 1833 erschienene Arbeit von Libri in französischer Sprache abgefaßt und gehört eigentlich der periodischen Literatur an (siehe Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut de France 5, 1838, 1—75), während die italienische *Memoria sopra la teoria dei numeri*, die wirklich als besondere Schrift erschien (24 S. 4°), nicht in Paris 1833, sondern in Florenz 1820 herausgegeben wurde (vgl. z. B. A. Stiattesi, *Commentario sulla vita e le opere di G. Libri*, ed. 2 [1880], 106, 109). — Dagegen konnte wohl auch ein wirklicher Kenner der mathematischen Literatur ohne nähere Untersuchung die folgende Angabe (vgl. S. 7) abschreiben:

Hill, C. J., Geometri på philosophiskt sätt betraktad. 4 upl. Stockholm 1830. Deleen. 28 skill.,

wenn er keine Auskunft über das Druckjahr der ersten Auflage erhielte. Wußte er dagegen, daß das erste Heft der ersten Auflage schon 1802 unter dem Titel: *Geometri på ett alldeles nytt sätt betraktad* erschien (ich weiß nicht, ob dieser Umstand Herrn Wölffing bekannt war), so würde er gewiß die Angabe als unrichtig bezeichnen, denn C. J. Hill war im Jahre 1793 geboren, und konnte also nicht der Verfasser der fraglichen Schrift sein. Tatsächlich hat C. J. Hill mit derselben nichts zu tun gehabt[2]) (es war mir unbekannt, daß sie jemals mit seinem Namen in Verbindung gesetzt worden ist), die erste Auflage gibt als Verfasser „P. Enander" an, während die drei folgenden anonym sind, und der wirkliche Name des Verfassers ist Mårten Sturtzenbecker (1760—1836).

Mit den vorangehenden Bemerkungen habe ich gar nicht beabsichtigt, die Arbeit der Herrn Wölffing zu bemängeln, sondern ich wollte nur an einigen Beispielen zeigen, was ich mit der Redeweise „so weit es ihm möglich gewesen ist" meinte; zugleich dürfte es klar sein, daß ich Recht hatte, als ich am Anfange dieser Besprechung behauptete, Herr Wölffing sei von seinen Quellen

1) Vergl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 20 (1888), S. 1341 des Namensregisters, woraus hervorgeht, daß die Redaktion der Fortschritte die zwei Schriften verschiedenen Verfassern zuschreibt.

2) Beiläufig erlaube ich mir den Benutzern des *Mathematischen Bücherschatzes* abzuraten, sich desselben zu bedienen um zuverlässige Auskunft über die Schriften von C. J. Hill zu bekommen. S. 325 wird eine Dissertation „Om osculerande parabler" Hill zugeschrieben, ist aber von dem Respondenten C. W. Eneberg verfaßt; auf der anderen Seite ist Hill Verfasser des S. 96 erwähnten Universitätsprogrammes: „Bidrag till binomial-theoremets historia" (Lund 1850), als dessen Verfasser W. Faxe angegeben wird.

auch dann abhängig gewesen, wo der wirklich Sachkundige dieselben leicht berichtigt haben könnte. Herrn Wölffing würden dagegen solche Berichtigungen eine sehr große Mühe und Zeitaufwand gekostet haben, und ich kann darum sehr wohl billigen, daß er keinen ernsten Versuch in dieser Richtung gemacht hat. Mehr zu empfehlen wäre vielleicht ein Versuch, die Literatur gewisser spezieller Fragen zu ergänzen; so z. B. gibt es über das Apolloniossche Taktionsproblem (vgl. S. 222—223) wenigstens drei deutsche Schriften, die Herr Wölffing in seinen Quellen nicht gefunden hat, nämlich:

C. H. Haumann, *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen.* Breslau 1817.

Stürmer, *Das Berührungsproblem des Apollonius von Perga.* Grünberg 1859.

G. U. A. Vieth, *Leitfaden zu vollständiger Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius.* Dessau 1820.

Die letzte Schrift wird von dem deutschen Übersetzer der *Elemente der Geometrie* von J. H. van Swinden (Jena 1834; S. 255) besonders empfohlen. Vielleicht findet Herr Wölffing Gelegenheit, für eine neue Auflage seiner Arbeit einige Nachforschungen in der von mir jetzt angedeuteten Richtung anzustellen.

Bei der Bearbeitung einer neuen Auflage wäre es auch angebracht, die Angaben von Druckort und -jahr wenigstens in den Fällen zu ergänzen, in denen die Fortschritte der Mathematik und das Poggendorff'sche *Handwörterbuch* allein die nötigen Aufschlüsse bringen. Beispielsweise wird S. 105 eine Schrift von A. Dronke: „Einige hypergeometrische Reihen nebst Zahlenwerten" verzeichnet, ohne daß Druckort und -jahr angegeben werden; aus der Poggendorff schen Arbeit (B. III, S. 381) ersieht man sogleich, daß es sich hier um einen kleinen Artikel in der Zeitschrift für Mathematik **8**, 1863 (S. 401—408) handelt. Ebensoleicht ersieht man aus den Fortschritten der Mathematik **15** (1883), S. 438, daß die S. 73 aufgeführte Schrift von P. A. Nekrasow: „Über die Gleichung $u^m - pu^n - q = 0$", deren Druckort nicht angegeben wird, in *russischer* Sprache abgefaßt ist und im **11**. Bande (S. 1—173) der „Sammlung" der Mathematischen Gesellschaft in Moskau erschien.

Daß Herr Wölffing die Titel oft wesentlich abkürzt, hat ohne Zweifel seinen Grund darin, daß er Raum hat sparen wollen, und die Absicht ist natürlich lobenswert. In gewissen Fällen aber ist er vielleicht zu weit gegangen, so daß der Benutzer irre geleitet werden kann. So z. B. wird S. 121 die rein historische Schrift von H. Weissenborn: *Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange* unter dem abgekürzten Titel: „Die Prinzipien der höheren Analysis" aufgeführt.

Es ist klar, daß bei der Bearbeitung einer Bibliographie das mühsamste ist, die Titel der betreffenden Schriften zu sammeln, aber auch die Klassifikation derselben bietet zuweilen Schwierigkeiten dar, besonders wenn man die Schriften selbst nicht einsehen kann, und auch die Arbeit des Herrn Wölffing bestätigt an vielen Stellen die Richtigkeit dieser Beobachtung. In einigen Fällen beruhen die Schwierigkeiten wohl auf dem Klassifikationsschema selbst; so z. B. dürfte es nicht leicht zu entscheiden sein, wo die Grenze zwischen den Abteilungen „Zahlbegriff" (S. 33) und „Allgemeine Zahlentheorie" (S. 34—36) zu ziehen ist, und ich für meinen Teil würde die Schrift *Talets teori i enlighet med nyare åsigter* (S. 35) in erster Linie unter „Zahlbegriff" gesucht haben. In

anderen Fällen aber sind die Titel so unbestimmt, daß man daraus den wirklichen Inhalt der betreffenden Schriften nicht erkennen kann. So z. B. befindet sich S. 5 unter „Philosophie der Mathematik" eine Dissertation *De analogia mathematica* verzeichnet, die in Wirklichkeit eine Darstellung der Proportionslehre bringt, und S. 359 unter „Mathematischen Belustigungen" ein Programm *Delectamenta analytica*, das nur einige Sätze über oskulierende Kurven und Flächen enthält.

Im vorhergehenden habe ich beispielsweise auf einige Stellen hingewiesen, wo Verbesserungen der Wölffingschen Arbeit angebracht werden können. Alle solche von mir notierten Stellen hier zu verzeichnen, wäre zwecklos, nur in betreff der mathematisch-historischen Schriften erlaube ich mir einige Bemerkungen hinzuzufügen. Natürlich sind diese Schriften in erster Linie in der Abteilung „Geschichte der Mathematik" verzeichnet; aber auch in anderen Abteilungen kommen historische Schriften vor, und die ganze Abteilung „Porismen" (S. 207) bezieht sich eigentlich auf Geschichte der Mathematik.

S. 1. Die 1810 erschienene Arbeit von Ch. Bossut hat den Titel: *Histoire* [nicht „Essai sur l'histoire"] *générale des mathématiques depuis leur origine jusqu'à l'année 1808.* Gewiss kann sie als zweite Auflage des *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* vom Jahre 1802 angesehen werden, aber Bossut selbst gibt dies weder auf dem Titelblatte noch im Vorwort an. — Nicht die dritte, sondern die zweite Auflage von Cajoris *History of mathematics* erschien 1895. — Die zweite Auflage der Cantorschen *Vorlesungen* wurde nicht 1900, sondern 1901 beendet (das Vorwort des 3. Bandes ist vom Juli 1901).

S. 2. Zeile 14 lies „Entwickelungsgeschichte" statt „Entwickelung". — Das *Saggio sulla storia delle matematiche* von P. Franchini erschien in Lucca 1821.

S. 3. Nach P. Riccardi (*Contributo degl'Italiani alla storia delle scienze matematiche pure ed applicate;* Memorie dell' accad. d. sc. di Bologna 6_5, 1897, S. 762) erschien die italienische Übersetzung von Libris *Histoire des sciences mathématiques* 1842. Der auffällig billige Ladenpreis (3,9 Mark) dieser Übersetzung beruht darauf, daß nur einige Lieferungen herausgegeben werden konnten, weil die österreichische Regierung die Fortsetzung verbot (siehe Riccardi a. a. O.). — Die angebliche „Histoire des mathématiques dans l'antiquité et en moyen-âge" von P. Mansion ist nur ein Bericht über Hankels Buch: *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, der im Bullettino di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1875, 185—220, erschien, und von dem auch Sonderabzüge (60 S. 8^0) existieren. — Von der italienischen Übersetzung der *Histoire des mathématiques* Montuclas ist nur ein Bogen gedruckt worden.

S. 4. Die Arbeit von P. Tannery: *La géométrie grecque.* I. ist ganz dieselbe, die S. 206 unter dem irreleitenden Titel: *Histoire générale de la géométrie élémentaire* aufgeführt ist. Der vollständige Titel lautet: *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. I. Histoire générale de la géométrie élémentaire.*

S. 11. Es ist mir nicht klar, warum unter dem Stichwort „Algorithmen" die Schrift von C. F. Müller, *Henricus Grammateus* („Grammaticus" ist natürlich Schreibfehler) *und sein algorithmus de integris* aufgeführt wird, während die Schrift von Curtze: *Der Algorismus proportionum des Nicol. Oresme* unter „Potenzen" (S. 93) zu suchen ist. Bekanntlich verstand man im Mittelalter unter „Algorismus" das Rechnen nach indisch-arabischer Weise, und später,

als diese Rechnungsart die gewöhnliche geworden war, bedeutete „Algorithmus" Rechnen mit („gemeinen" oder „cossischen") Zahlen. Die MÜLLERsche Schrift ist also ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik und Algebra.

S. 16. Im Titel: UNGER, F. A., „Methodik der praktischen Math." ist das letzte Wort Schreibfehler für „Arithm.", und dadurch wird offenbar die Angabe vollständig irreleitend. Übrigens wird dieselbe Schrift S. 28 unter dem Titel: „Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung" aufgeführt, und der nicht Sachkundige kann wohl kaum erraten, daß es sich an beiden Stellen um eine und dieselbe Schrift handelt.

S. 43. Hier wird die Abhandlung von C. WESSEL „Essai sur la représentation analytique de la direction" unter „Imaginäre Größen", aber die Schrift von S. A. CHRISTENSEN „CASPAR WESSEL og de komplekse tals teorie" unter „Komplexe Größen" gesetzt, obgleich diese nur einen Bericht über jene Abhandlung enthält.

S. 68. Hier finden sich die zwei Titel:

Ferrari, L., I sei cartelli di matematica. Milano 1876.

Giordani, E., I sei cartelli di matematica alla risoluzione delle equazioni cubiche. Milano 1878(!). Bernardoni.

Diese beiden Titel beziehen sich auf eine und dieselbe Schrift; deren Titel lautet: *I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di LUDOVICO FERRARI coi sei contro-cartelli in risposta di NICOLÒ TARTAGLIA comprendenti le soluzioni de'quesiti dall'una e dall'altra parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da ENRICO GIORDANI* (Milano 1876, 220 S. 8⁰). Um die abgekürzten Titel verständlich zu machen, muß man also an beiden Stellen nach „matematica" das Wort „disfida" hinzufügen, und an der zweiten Stelle vor „alla" das Wort „intorno" setzen. Übrigens muß natürlich der Umstand, daß die zweite Abkürzung „1878" hat, wesentlich dazu beitragen, daß der nicht sachkundige Leser die zwei Titel auf zwei verschiedene Schriften beziehen wird.

S. 89. Die Abhandlung von W. FR. MEYER, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* ist auch ins polnische (von S. DICKSTEIN) übersetzt unter dem Titel: *O stanie obecnym teoryi niezmienników* (Warszawa 1899).

S. 117. Hier fehlt das grosse *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* von S. F. LACROIX, dessen zweite Auflage 1810—1819 in drei starken Quartbänden erschien. Obgleich diese Arbeit nicht historisch ist, leistet sie dem Historiker oft gute Dienste, da sie eine grosse Anzahl von wertvollen bibliographischen und literarischen Notizen, besonders inbetreff der mathematischen Schriften aus dem Ende des 18. Jahrhunderts, enthält, und darum erwähne ich hier ihr Fehlen. Unter **„Lacroix"** führt Herr WÖLFFING freilich ein „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" auf, dessen 8. Auflage angeblich in zwei Teilen in Paris (Verleger nicht erwähnt) 1878-1879 erschienen sein soll, aber diese Angabe bezieht sich ohne Zweifel auf die 8. Auflage des *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, die 1874 in zwei Bänden bei Gauthier-Villars in Paris erschien. — Ganz beiläufig bemerkte ich, daß von diesem „Traité élémentaire" auch eine italienische Übersetzung (*Trattato elementare del calcolo differenziale e del calcolo integrale*, Firenze 1829) existiert.

S. 130. Unter „Maxima und Minima" wird hier: GIESEL, K. F., „LEIBNITII nova methodus pro maximis et minimis. Pr. Leipzig 1884" aufgeführt. Be-

kanntlich wurde die Schrift zur Feier des 250jährigen Jubiläums der Erfindung der Differentialrechnung veröffentlicht, und sie enthält zuerst eine Einleitung über die Geschichte der Mathematik vor Leibniz, dann einen Neudruck der epochemachenden Abhandlung *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Acta Eruditorum 1684, 467—473) mit erläuternden Anmerkungen. In *erster* Linie gehört also die Schrift der Abteilung „Höhere Analysis" (S. 115) an, wo aber weder der Titel noch ein Verweis zu finden ist, obgleich Herr Wölffing selbst in der Einleitung (S. XXXI) ganz richtig bemerkt, daß er mit Verweisen (er könnte „und mit Wiederholungen von Titeln" hinzugefügt haben) gar nicht sparsam gewesen ist.

Ich habe schon bemerkt, daß in den meisten Fällen das Auffinden der Literatur einer gewissen Frage durch das Sachregister erleichtert wird. Da aber die Verweise dieses Registers sich nicht auf die Seitenzahlen, sondern auf die Nummern der Stichwörter beziehen, kann das Auffinden zuweilen mühsam werden. So z. B. wird im Sachregister für „Geometrie, experimentale" auf die Abteilung **146** verwiesen, die aber mehr als 13 zweispaltige Druckseiten mit mehr als 600 Titeln umfaßt; natürlich wäre es für den Benutzer viel bequemer gewesen, Auskunft über die Seitenzahl zu bekommen.

Bei der Bearbeitung des Autorenregisters, dessen Herstellung gewiß große Mühe gekostet hat, hat Herr Wölffing versucht, Autoren von gleichen Vor- und Zunamen auseinander zu halten, hebt aher selbst in der Einleitung hervor, daß es ihm nicht in allen Fällen gelungen sein dürfte; die Richtigkeit seiner Vermutung wird auch bestätigt durch meine Bemerkung über die zwei Verfasser L. Schlesinger. Auf der anderen Seite spaltet das Autorenregister ausnahmsweise einen Verfasser in zwei; so z. B. ist (S. 373) J. Åstrand identisch mit J. J. Åstrand (1819—1900) und der S. 98 aufgeführte A. Berger (statt 1853 lies 1883) identisch mit A. F. Berger (1844—1901).

In diesen zwei Fällen ist freilich besondere Personenkenntnis nötig, um bestimmt wissen zu können, dass es sich nicht um zwei Verfasser mit demselben Namen handelt. Dagegen scheint es mir, als ob man ohne weiteres feststellen könnte, dass der im Register aufgeführte „Erlerus" mit dem unmittelbar vorangehenden H. W. Erler identisch ist. Nach S. 37 hat nämlich der angehliche „Erlerus" 1841 in Halle eine Schrift: „Elementa doctrinae numerorum de quovis modulo" veröffentlicht, während zufolge S. 35 H. W. Erler 1841 in Halle eine Schrift „Elementa doctrinae numerorum de quovis modulo exposita" herausgab. Aber die Wahrscheinlichkeit, daß zwei verschiedene Verfasser mit *demselben* Namen (denn die Form „Erler*us*" erklärt sich ja leicht, da man weiß, daß die Schrift lateinisch abgefaßt war) in *demselben* Jahre und an *derselben* Stelle Abhandlungen mit *demselben* Titel (daß das Wort „exposita" in der für die S. 37 benutzten Quelle fehlt, hat ja keine Bedeutung) veröffentlichten, kann wohl gleich Null gesetzt werden. Übrigens vermute ich, dass die S. 37 benutzte Quelle keine andere als der *Librorum in bibliotheca speculae Pulcovensis anno 1858 exeunte contentorum catalogus systematicus* (St. Petersburg 1860) ist, wo S. 306 die Schrift des „Erlerus" sich findet, und wenn diese Vermutung richtig ist, so braucht man keine Konjektur, denn im Namenregister des Katalogs wird S. 915 unter „Erler, H. G." (G. ist wohl = Guilelmus = Wilhelm) gerade auf S. 306 verwiesen, während der Name „Erlerus" im Register gar nicht vorkommt.

Daß eine Arbeit, die fast nur Personennamen und Büchertitel in verschiedenen Sprachen enthält, nicht von Druckfehlern frei sein kann, ist fast selbstverständlich. Am häufigsten finden sich wohl solche Fehler in den Titeln, die schwedisch oder dänisch abgefaßt sind, aber hierfür hat Herr Wölffing nicht überall die Schuld; kleine Fehler in den Verfassernamen sind zwar nicht sehr häufig, aber auch nicht besonders selten — beiläufig bemerkte ich, daß Herr Constantin le Paige überall (S. 90, 104, 299, 319, 401) „O. le Paige" genannt wird.

Wie ich schon angegeben habe, enthält die Einleitung eine ausführliche Übersicht über die vorhandenen literarischen Hilfsmitel auf dem Gebiete der Mathematik. Die Übersicht ist an sich dankenswert, paßt aber meiner Ansicht nach nicht zu der folgenden Bibliographie, denn das Publikum, an welches sich diese eigentlich wendet, wird sich nur wenig für jene interessieren. Auf der anderen Seite werden, wie ich am Anfange meines Artikels betont habe, die wirklichen Bibliographen, die sicherlich mit Interesse von der Übersicht Kenntnis nehmen werden, dadurch zu Erwartungen veranlaßt, denen die Bibliographie nicht Genüge leisten kann.

Eine eingehende Besprechung dieser Übersicht der mathematisch-literarischen Hilfsmittel wäre ohne Zweifel sehr angebracht, besonders da sie an vielen Stellen wertvolle Anregungen zur Verbesserung der vorhandenen oder Herstellung neuer Hilfsmittel dieser Art enthält, aber auf eine solche Besprechung muß ich hier verzichten, da sie sich auf ganz andere Gegenstände als die oben berührten beziehen würde, und also am besten in einem besonderen Artikel zu behandeln ist. Nur einige kleine Bemerkungen inbetreff der in der Einleitung vorkommenden mathematisch-bibliographischen Notizen füge ich hier ein. Von der S. VII erwähnten Zeitschrift Pantobiblion. Internationale Bibliographie der polytechnischen Wissenschaften. Monatliche Übersicht der auf diesen Gebieten neu erschienenen Buch- und Journalliteratur, herausgegeben in St. Petersburg von A. Kerscha, kam, so viel ich weiß, nur eine Nummer (IV. S. + 288 Sp.) des 1. Jahrganges (1891) heraus. Das Bücherverzeichnis nimmt 80 Spalten, die Rezensionen 208 Spalten ein. — S. XVIII wird angegeben, daß 18 Bände vom Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche des Fürsten B. Boncampagni erschienen sind, aber bekanntlich ging die Zeitschrift erst nach der Herausgabe des 20. Bandes ein, und im 20. Bande (nicht im 18. Bande, wie es S. XI steht) findet sich auch das Generalregister. — Außer der S. XVIII erwähnten Arbeit von Guimarães gibt es eine ältere mathematische portugiesische Bibliographie von F. de Castro Freire in der *Memoria historica da faculdade de mathematica* (Coimbra 1872, S. 135—195: „Bibliographia mathematica desde 1772 até outubro de 1872"). — Den S. XXVIII aufgeführten mathematischen Wörterbüchern sind noch folgende hinzuzufügen: P. Hérigone, *Dictionnaire contenant les étymologies et significations des noms et termes plus obscurs de mathématiques* (Anhang zur Schrift: *Les six premiers livres d'Euclide*, Paris 1639); J. Moxon, *Mathematical dictionary* (London 1680, 2. Aufl. herausgegeben von H. Coley 1692); F. Picatoste, *Vocabulario matemático-etimológico* (Madrid 1862).

Ich bin jetzt zum Schlusse meiner Besprechung gekommen, und es erübrigt nur, mein Gesamturteil zu formulieren. Daß der *Mathematische Bücherschatz* keine durchgearbeitete und besonders zuverlässige Arbeit ist, habe ich schon hervor-

gehoben und durch Belege bewiesen, aber eine solche Arbeit hat Herr Wölffing nicht leisten können. Ja, ich wage es zu behaupten, daß wenn ihm dies wirklich möglich gewesen wäre, so würde seine Bibliographie uns nicht vorliegen, denn ein Bibliograph *ex professo* hätte nicht während der Herrn Wölffing zur Verfügung gestandenen Zeit eine Arbeit beenden können, die er für druckreif halten könnte. Dagegen hat Herr Wölffing den Mathematikern ein sehr nützliches und, soweit es ihm ohne wesentliche Mitwirkung von Kennern auf diesem Gebiete möglich war, im großen und ganzen gutes literarisches Hilfsmittel geschenkt. Daß der *Mathematische Bücherschatz* eigentlich nur die nichtperiodische Literatur berücksichtigt, ist gewiß zu bedauern, und darum wäre es zu wünschen, daß wir auf dem Gebiete der mathematischen Bibliographie noch fünf so interessierte und fleißige Sammler wie Herrn Wölffing hätten; dann würden wir schon eine Bibliographie der gesamten mathematischen Literatur des 19. Jahrhunderts bekommen haben, die zwar nicht kritisch bearbeitet wäre, aber dennoch bis auf weiteres als Ersatz für die noch immer mit Spannung erwartete mathematische Bibliographie des Herrn G. Valentin dienen könnte.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1
4_3 (1903) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2
1903 : 2—3.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый В. В. Бобынинымъ. Москва. 8⁰. [3
1_3 : 10 — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8⁰. [4
32 (1901) : 1. — Die Seiten 1—65 enthalten Referate der im Jahre 1901 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, J. Cardinaal. Amsterdam. 8⁰. [5
11 : 2 (octobre 1902 — avril 1903).

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1492—1493. [6

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq (1902). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 131—134. (J. T.) — Nature 67, 1903, 245. — Philos. magazine 5_6, 1903, 290. — The mathem. gazette 2, 1903, 249. [7

Cantor, M., Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln? [8
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 113—117.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 205—206. (G. Eneström.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 206—209. (G. Eneström.) — 3^3 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 209—210. (G. Eneström.) [9

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik. 1 (1902). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 213—218. (G. Eneström.) [10

Versluys, J., Beknopte geschiedenis der wiskunde (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1674. [11

Ball, W. W. R., Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese di D. Gambioli e G. Puliti. 1 (1903). [Rezension:] Periodico di matem. 5_2, 1903, 342. [12

Tannery, P., Notions historiques [de mathématiques]. [13

Tannery, J., Notions de mathématiques (Paris, Delagrave 1903), 324—348.

Klimpert, R., Storia della geometria. Traduzione di P. Fantasia (1901). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1248. [14

Reye, Th., Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1315—1316. [15

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte (1902). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1903, 492—501. (E. B. Wilson.) — Mathesis 3_3, 1903, 116—118. — Wiadomosci matem. 7, 1903, 94—99. (S. D.) — Nyt Tidsskr. for Mathem. 14, 1903, 24—26. (C. Juel.) — The mathem. gazette 2, 1903, 267—268. [16

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 4_3, 1903, 277—280. (H. Bosmans.) [17

Dannemann, F., Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften. I. Aufl. 2 (1902). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 273—274. (K. Weise.) [18

Rusmacher, C., Kurze Biographien berühmter Physiker (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1973. [19

b) Geschichte des Altertums.

Mahler, E., Die Entstehung der Zeit- und Kreisteilung [bei den Babyloniern]. [20

Orientalistische Litteraturzeitung 6, 1903, 9—17.

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. [Rezension der B. I—V:] Jornal de sc. mathem. 15, 1903, 38—40. (G. T.) — [Rezension der B. IV—V:] Arch. der Mathem. 5_3, 1903, 309—310. (M. Cantor.) — [Rezension des B. V:] Le matematiche pure ed applicate 3, 1903. 6 S. (C. Alasia.) [21

Günther, S., Das Polarlicht im Altertum. [22

Beiträge zur Geophysik (Leipzig) 6, 1903, 98—107.

Wieleitner, H., „Lunulae Hippocratis." [23

Blätter für das Gymnasial-Schulwesen (München) 39, 1903, 541—543.

Milhaud, G., Aristote et les mathématiques. [24

Archiv für Geschichte der Philosophie 9_3, 1903, 367—392.

Heiberg, J. L., Paralipomena zu Euklid. [25

Hermes (Berlin) 38, 1903, 46—74, 161—201, 321—356.

Vaux, C. de, Le livre des appareils pneumatiques et des machines hydrauliques par Philon de Byzance (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1553—1555. (H. Suter.) [26

***Tannery, P.,** Héron d'Alexandrie. [27

Journal des savants 1903.

***Manilius, M.,** Astronomicon. Recensuit A. E. Housman. London, Grant Richards 1903. [28

8°. — [4½ sh.]

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 2041. (W. Schmidt.) [29

Schmidt, W., Zu dem Berichte des Simplicius über die Möndchen des Hippokrates. [30

Biblioth. Mathem 4_3, 1903, 118—126.

Mortet, V., La mesure des voutes romaines d'après des textes d'origine antique. [31

Bibliothèque de l'école des chartes 61, 1900, 37 S.

Mortet, V., Notes sur le texte des „Institutiones" de Cassiodore. II. Notes et corrections relatives au „De geometria." III. Observations sur le caractère de la Géométrie dans l'œuvre de Cassiodore et sur l'enseignement de cette science dans les premiers siècles du moyen âge. IV. Observations sur la Géométrie de Cassiodore. [32

Revue de philologie (Paris) 24_2, 1900, 272—281; 27_2, 1903, 65—78, 141—150.

c) Geschichte des Mittelalters.

Suter, H., Der Verfasser des Buches „Gründe der Tafeln des Chowârezmi." [33

Biblioth. Mathem 4_3, 1903, 127—129.

***Seybold, C.,** Die Drusenschrift „Kitâb Alnoqat Waldawâir. Das Buch der Punkte und Kreise". Nach dem Münchener und Tübinger Codex. Tübingen 1902. [34

4°, 111 S. — Festschrift.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. (1902). [Rezension:] Götting. gelehrte Anz. 1903. (A. von Braunmühl.) — The mathem. gazette 2, 1903, 214—215. [35

Björnbo, A. A., Hermannus Dalmata als Übersetzer astronomischer Arbeiten. [36

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 130—133.

Lambo, Ch., Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet (1902). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. de sc. matem. 6, 1903, 96. [37

d) Geschichte der neueren Zeit.

***Frizzo, G.,** De numeris libri duo authore Joanne Noviomago, esposti ed illustrati. Appendice. Verona, Drucker 1903. [38

8°, 25 S.

Mayer, J., Der Astronom Cyprianus Leovitius (1514—1574) und seine Schriften. [39
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 134—159. — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1860.

Richter, P. E., Tycho Brahes „Astronomiae instauratae mechanica" von 1598. [40
Centralbl. für Bibliothekw. 20, 1903, 56—63.

Müller, Adolph, Johann Keppler, der Gesetzgeber der neueren Astronomie (1903). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 268. (A. Berberich.) [41

***Förster, W.,** Ptolemäus und Keppler. [42
Das Weltall (Berlin) 3, 1902.

***Schmidt, J.,** Keplers Erkenntnis- und Methodenlehre. Jena 1903. [43
8°, 45 S. — Dissertation.

Eneström, G., Über den Ursprung des Termes „ratio subduplicata". [44
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 210—211. — Anfrage.

Bosmans, H., Une particularité de l'astronomie chinoise au XVII[e] siècle. [45
Bruxelles, Soc. scient., Annales 27, 1903. 4 S.

Maupin, G., Opinions et curiosités touchant la mathématique. II (1902). [Rezension:] Periodico di matem. 5_3, 1903, 342. — Nature 67, 1903, 531—532. [46

Œuvres des Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. V. Correspondance. Mai 1647 — février 1650. VI. Discours de la méthode et Essais. Paris, Cerf 1903, 1902. [47
4°, 669 S.; XIV + 727 S. — [Rezension des B. VI:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 4_3, 1903, 280—285. (G. Lechalas.)

Eneström, G., Über die verschiedenen Auflagen und Übersetzungen von Descartes' „Géométrie". [48
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 211. — Anfrage.

Bosmans, H., La carte lunaire de van Langren conservée aux archives générales du royaume, à Bruxelles. [49
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 4_3, 1903, 108—139 + Karte.

Favaro, A., Vincenzio Viviani e la sua „Vita di Galileo". [50
Venezia, Istituto Veneto, Atti 62 : 2, 1903, 683—703.

Hoyer, Andreas Gärtner, der „sächsische Archimedes" (1903). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 370—371. (M. Richter.) [51

***Meth, B.,** Über ein älteres Verfahren der Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in irreduktible Faktoren. Berlin 1902. [52
4°, 27 S. — Programm des Kaiser Wilhelms-Realgymnasiums. — Das fragliche Verfahren wurde im Jahre 1719 von P. Halcke in den *Deliciae mathematicae* angegeben. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 284—285. (Strokmann.)

Segre, C., Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidea. [53
Torino, Accad. d. sc., Atti 38, 1903. 15 S.

***Lebon, E.,** Sur un manuscrit d'un cours de J. N. Delisle au Collège royal. Paris, Delain 1902. [54
8°. — Über die „Eléments géométriques de la sphère céleste dictés en Collège royal". — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 64.

Loria, G., Giambattista Caraccioli. Schizzo biografico. [55
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 33—38.

Amodeo, F., Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli (1902). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 95—96. [56

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach J. S. de Gua de Malves (1902). [Rezension:] *Stuttgart*, Mathem. Verein, Mitteil. 5_2, 1903, 63—64. (E. Wölffing.) — Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 166. (M. Cantor.) [57

***Fink, E.,** Eliah Wilna und sein elementargeometrisches Kompendium. Frankfurt a. M., Kauffmann 1903. [58
8°, 29 S. — Festschrift zur Jubiläums-Feier der Unterrichtsanstalten der israelitischen Religionsgesellschaft in Frankfurt a. M. — Eliah Wilna lebte 1720—1797. — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1735.

Mehmke, R., [Über eine Maschine aus dem Jahre 1770 zur Auflösung von Gleichungen]. [59
Zeitschr. für Mathem. 49, 1903, 98. — Anfrage.

***Bortolotti, E.,** Influenza dell' opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche. Discorso letto il 4 novembre 1902 in occasione della sollenne apertura degli studi nella r. università di Modena. [60
Modena, Univ., Annuario 1902/1903. — [Anzeige:] *Milano*, Istit. lomb., Rendiconti 36, 1903. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 64.

Eneström, G., Über die Mathematiker Charpit und Français. [61
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 212. — Anfrage.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. I (1903). [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 302. [62

London, J., A century of progress in acoustics. [63
Toronto, Royal soc. of Canada, Proceedings 7_2, 1901, 43—54.

Muir, Th., The theory of orthogonants in the historical order of its development up to 1832. [64
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 24, 1902, 244—288.

Muir, Th., The theory of Jacobians in the historical order of its development up to 1841. [65
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 24, 1902, 151—195.

Dickstein, S., O korrespondencyi Jana Śniadeckiego z Akademią nauk w Petersburgu. [66
Wiadomości matem. 7, 1903, 22—31.

* **Streit, H.,** Die wissenschaftlichen Forschungen und Entdeckungen des älteren Seebecks auf dem Gebiete der Elektricität und des Magnetismus. Schlawe 1902. [67
4°, 22 S. + 1 Taf. — Programm des Progymnasiums in Schlawe. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 290—291. (Strohmann.)

Klein, F., Über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Fünfter Bericht (1903). [Rezension]: Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 1315. (H. Fleischer.) [68

Cantor, M., Ferdinand Schweins und Otto Hesse. [69
Heidelberger Professoren aus dem 19. Jahrhundert (Heidelberg 1903) 2, 221—242.

Модзалевскій, Б. Л., Н. И. Лобачевскій. (Письма его къ И. Е. Великопольскому.) [70
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 12$_2$, 1902, 85—101. — Modzalevskij, B. L., Briefe von N. I. Lobatchevskij an J. E. Welikopolskij. — Welikopolskij (geb. 1797, gest. 1868) war Schwiegersohn von Lobatchevskij.

Stäckel, P., Johann Bolyais Raumlehre. [71
Mathem. und naturwiss. Berichte aus Ungarn 19 (1901), 1903. 12 S.

Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance (1902). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 82—83. (G. L.) [72

Sturm, R., Zusammenstellung von Arbeiten, welche sich mit Steinerschen Aufgaben beschäftigen. [73
Biblioth. Mathem. 4$_3$, 1903, 160—184.

* **Jahrans, K.,** Das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, historisch-kritisch dargestellt. Ludwigshafen 1902. [74
8°, 56 S. — Programm.

Васильевъ, А. В., М. В. Остроградскій. [75
Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 11$_2$, 1902, C: 3—10. — Wasiliev, A. V., M. V. Ostrogradskij.

Teixeira, F. G., Apontamentos biographicos sobre Daniel Augusto da Silva [1814—1878]. [76
Boletim da direcção geral de instrucção publica (Lisboa) 1, 1903, 829—840 + Porträt.

G., P., XXVe anniversaire de la mort du p. Angelo Secchi. [77
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 4$_3$, 1903, 215—228.

Бобынинъ, В. В., Первый русскій элементарноматематическій журналъ. [78
Fiziko-matem. nauoki 1$_2$, 1902, 289—302. — Bobynin, V. V., Die erste russische elementarmathematische Zeitschrift.

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz (1902 — 1903). [Rezension des B. 1:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 68—70. (G. L.) — Bollet. d. sc. mathém. 27$_2$, 1903, 143—144. — [Rezension der B. II—III:] Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 361. (J. Bernstein.) [79

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятели Исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Бальдассарре Бонкомпаньи. [80
Fiziko-matem. nauoki 1$_2$, 1902, 303—316. — Bobynin, V. V., Die Literatur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Baldassarre Boncompagni.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band, herausg. von A. J. von Oettingen. Lieferung 8—11. Leipzig, Barth 1903. [81
8°, S. 505 — 792. — [12 *M*.]

Sintzoff, D., Bibliographia mathematica rossica 1900. [82
Kazan, Fiz.-mathem. obchtch., Isvjestia 12$_2$, 1902. 30 S.

International catalogue of scientific literature. A. Mathematics. B. Mechanics. Published by the Royal society of London. London, Harrison 1902. [83
8°, 16 + 201 S.; 14 + 128 S.

Wölffing, E., Abhandlungsregister [aus dem Gebiete der angewandten Mathematik] 1902. [84
Zeitschr. für Mathem. 49, 1903, 112—144.

e) Nekrologe.

Antoni **Baranowski** (1835—1902). [85
Wiadomości matem. 7, 1903, 108—109. (S. D.)

Nikolaus **Bugajeff** (1837—1903). [86
L'enseignement mathém. 5, 1903, 295.

Manuel Maria **Contreras** (1833—1902). [87
México, Soc. Alzate, Revista 1902, 44—46 [mit Porträt]. (J. de Mendizábal-Tamborrel.)

Alfred **Cornu** (1841—1902). [88
México, Soc. Alzate, Revista 1902, 27—28 [mit Porträt]. (Abdruck aus dem „Bulletin de la société astronomique de France" 1902.)

Luigi **Cremana** (1830—1903). [89

L'enseignement mathém. 5, 1903, 294—295. (H. Fehr.) — Periodico di matem. 1_3, 1903, 53—56 [mit Schriftverzeichnis]. — Supplemento al Periodico di matem. 6, 1903, 113—114. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 390—391. — Americ. journ. of mathem. 25 : 1, 1903 [nur Porträt].

Attilio **Crepas** (1880—1903). [90

Periedico di matem. 5_3, 1903, 344.

Maximilian **Curtze** (1837—1903). [91

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 357—368 [mit Porträt]. (M. Cantor.) — Altpreußische Monatsschrift 1903. (M. Jacobi.)

Ernest **Duporcq** (1873?—1903). [92

L'enseignement mathém. 5, 1903, 218. (A. Buhl.)

Hervé **Faye** (1814—1902). [93

México, Soc. Alzate, Revista 1902, 29—31 [mit Porträt]. (Abdruck aus dem „Bulletin de la société astronomique de France" 1902.) — Revue génér. d. sc. 13, 1902, 897—898. (Ch. Nordmann.)

Matteo **Fiorini** (1827—1901). [94

Torino, Accad. d. sc., Atti 36, 1901, 416—418. (N. Jadanza.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [95

New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 9_2, 1903, 517. — Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 322. (A. Cohn.)

Walther **Gröbli** (1852—1903). [96

Schweizerische Bauzeitung 42, 1903, 2 S. (F. Rudio.)

William **Harkness** (1837—1903). [97

Science 17_2, 1903, 601—604. (A. N. Skinner.)

Ernest **de Jonquières** (1820—1901). [98

Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 136, 1903, 1021—1031. (E. Guyou.)

Hermann **Klein** (1832—1902). [99

Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 302—304 [mit Porträt]. (R. Heger.)

G. B. **Marangoni** (1865—1903). [100

Periodico di matem. 5_3, 1903, 344.

Peter Sergejewitsch **Nasimoff** (1851—1901). [101

Kazan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestia 12_2, 1902, 1—6 + Porträt. (A. Wasilieff.)

Johannes **Pernet** (1845—1902). [102

Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 47, 1902, 438—439. (F. Rudio.)

Josef **Petzval** (1807—1891). [103

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 324—344. (L. Gegenbauer; Abdruck aus „Zeitschr. des österr. Ingenieur-Vereins" 54, 1902.)

Ernst **Schröder** (1841—1902). [104

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 249—265, 468 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (J. Lüroth.)

George Gabriel **Stokes** (1819—1903). [105

Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1903; Geschäftl. Mitt. 70—80. (W. Voigt.) — Nature 67, 1903, 337—338. (W. Kelvin).

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [106

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 185—200 + Porträt. (A. Macfarlane.)

Henry William **Watson** (1827—1903). [107

Nature 67, 1903, 274—275. (G. H. Bryan.)

Heinrich **Wild** (1833—1902). [108

Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 47, 1902, 443—451. (F. Rudio.)

f) Aktuelle Fragen.

Eneström, G., Über zweckmäßige Abfassung der Titel mathematischer Aufsätze. [109

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 201—204.

Müller, F., Über die Abkürzung der Titel mathematischer Zeitschriften. Mit Erläuterungen und historischen Notizen. [110

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 426—444.

Alasia, C., Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo (1902). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 82. (G. L.) [111

Forsyth, A. R., Report of the British association committee on teaching of mathematics. [112

British association, Report 72 (Belfast 1902), 1903, 473—480. — The mathem. gazette 2, 1903, 197—201.

Congresso internazionale di scienze storiche [1903]. [113

Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 92—94.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent C. H. Anding in Cambridge (Mass.) zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas in Lawrence.

— Professor Mathias Cantor in Straßburg zum Professor der Physik an der Universität in Würzburg.

— Privatdozent C. C. Engberg in Lincoln zum Professor der Mathematik an der Universität von Nebraska daselbst.

— W. E. Franklin zum Professor der Physik an der „Lehigh university" in South Bethlehem.

— Professor N. E. Gilbert zum Professor der Physik am „Dartmouth college" in Hanover (New Hampshire).

— Professor J. Harkness in Bryn Mawr zum Professor der Mathematik am „Mc Gill university" in Montreal (Canada).

— Privatdozent J. I. Hutchinson in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university" daselbst.

— Privatdozent A. Korn in München zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. Lindelöf in Helsingfors zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. Nätsch in Dresden zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent G. Rost in Würzburg zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor O. Sintzoff in Ekaterinoslaw zum Professor der Mathematik an der Universität in Charkoff.

— Privatdozent V. Snyder in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university" daselbst.

— G. W. Stewart zum Professor der Physik an der Universität von North Dakota.

— Privatdozent H. M. Tory in Montreal (Canada) zum Professor der Mathematik an der „Mc Gill university" daselbst.

— Privatdozent E. von Weber in München zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

Todesfälle.

— Nikolaus Bugajeff, Professor der Mathematik an der Universität in Moskau, geboren in Duschet (Gouv. Tiflis) den 2. September (a. St.) 1837, gestorben in Moskau den 29. Mai (a. St.) 1903.

— Ainslie Common, Astronom in London, gestorben in London den 2. Juni 1903, 61 Jahre alt.

— Friedrich Deichmüller, Professor der Astronomie an der Universität in Bonn, geboren in Stadtilm (Schwarzburg-Rudolstadt) den 25. Februar 1855, gestorben in Bonn im Mai 1903.

— Leopold Gegenbauer, Professor der Mathematik an der Universität in Wien, geboren in Asperhofen (Nied.-Österreich) den 2. Februar 1849, gestorben in Wien den 3. Juni 1903.

— Meyer Hamburger, Dozent der Mathematik an der technischen Hochschule in Berlin, geboren in Posen den 5. April 1838, gestorben in Berlin den 9. Juni 1903.

— Filippo Keller, Professor der Physik an der Universität in Rom, geboren in Nürnberg den 27. Januar 1830, gestorben 1903.

— Oskar Röthig, Professor an der Friedrich Werder'schen Oberrealschule in Berlin, geboren in Berlin den 31. Oktober 1834, gestorben daselbst den 14. Juni 1903.

— Hermann Scheffler, Oberbaurat in Braunschweig, produktiver Verfasser auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, geboren in Braunschweig den 10. Oktober 1820, gestorben daselbst den 13. August 1903

— Wojciech Urbański, früher Direktor der Universitätsbibliothek in Lemberg, geboren in Chodorów (Galizien) den 28. März 1820, gestorben in Lemberg den 26. Juni 1903.

— Stanislav Vecchi, Professor der darstellenden Geometrie an der Universität in Parma, geboren in Parma den 10. Juli 1843, gestorben daselbst den 23. Mai 1903.

— Eduard Weyr, Professor der Mathematik an der tschechischen Technischen Hochschule in Prag, geboren in Prag den 21. Juli 1852, gestorben in Zabor den 23. Juli 1903.

Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung.

— Herr J. Drach in Poitiers bereitet eine „Histoire des sciences mathématiques en France au 19e siècle“ vor, die etwa 20 Druckbogen betragen und in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften erscheinen wird.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— At the Columbia university (New York) Professor D. E. Smith will deliver during the academic year 1903—1904 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— At the universitiy of Chicago Mr. S. Epsteen has delivered during the summer session 1903 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— At the Stanford university Professor G. A. Miller will deliver during the first semester of the academic year 1903—1904 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

Gekrönte Preisschriften.

— *Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig.* Herr Ernst Neumann in Breslau hat für die Bearbeitung der Preisaufgabe: „Die in der Abhandlung von Poincaré *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (Acta Mathem. 20, 1896) enthaltenen Untersuchungen sollen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden“ den Preis bekommen.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1904. On demande une contribution à l'étude algébrique et géométrique des formes n-linéaires, n étant plus grand que 3.

— *Accademia Pontaniana di Napoli.* Tema del concorso per l'anno 1904. Importante contributo alla teoria intrinseca generale delle curve piane.

Vermischtes.

— Auf der 47. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Halle a. S., Oktober 1903, wird Herr Felix Müller einen Vortrag über die Frage: „Welche Bedeutung hat für den Lehrer der Mathematik die Kenntnis der Geschichte, Literatur und Terminologie seiner Wissenschaft?“ halten.

Über den griechischen Mathematiker Dionysodoros.

Von Wilhelm Schmidt in Helmstedt.

Außer den berühmten Problemen der Quadratur des Kreises, der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels scheint die Alten in nicht geringem Maße auch die Aufgabe interessiert zu haben, wie man eine Kugel in zwei Segmente zerlege, die zueinander im gegebenen Verhältnisse stehen. Soweit wir es verfolgen können, ist sie zuerst von Archimedes (*De sphaera et cylindro* II, 4 ed. Heiberg) gestellt und, freilich mit Auslassung der Analysis, gelöst. Nach Eutokios (Archim. *Op.* III, 154, 2; 178, 20) sollen aber schon Diokles und Dionysodor die Analysis des Archimedes, der sich an des Menechmos (Archim. *Op.* III, 94) Lösung von dem Delischen Probleme angeschlossen zu haben scheint, nicht in ihren Ausgaben vorgefunden und deshalb selbständig neu bearbeitet haben. Eutokios gibt beide Lösungen, die des Dionysodor, welcher wie Archimedes den Schnitt einer Parabel und Hyperbel verwendet und dieselbe kubische Gleichung löst, und die des Diokles.

Man hat wohl geglaubt, auf die Lösung der erwähnten Aufgabe durch Dionysodor beziehe sich auch die Notiz Vitruvs IX, 8, 1 (S. 234[2], 3 ed. Rose): Dionysodorus conum reliquit. Es handelt sich bei Vitruv um die verschiedenen Arten der Sonnenuhren, die er nebst ihren Erfindern nur kurz nennen will, ohne sie näher zu beschreiben. Außer solchen auf geraden Platten werden auch Sonnenuhren mit halbkugel-, beil-, kegel-, köcherförmiger Vertiefung, ja mit spinngewebeartiger konischer (conarachne) genannt. Hohle Sonnenuhren, z. B. hemisphärische, kennt ja auch die moderne Zeit. Eine Beziehung der Notiz des Vitruv zu der obigen Aufgabe wäre nur dann möglich, wenn eben Kegelschnitte dazu gedient hätten, um für die vertiefte Sonnenuhr ein bestimmtes Kugelsegment abzuschneiden. Aber das kann der Ausdruck: 'conum reliquit' weder sprachlich noch überhaupt nach dem Zusammenhange bedeuten. Jedenfalls war die Sonnenuhr des Dionysodor nicht sphärisch, sondern konisch.

Schließlich wird in HERONS *Metrika* II, 13 eine Schrift „Über den Wulst" (die Speira, *Περὶ τῆς σπείρας*) einem DIONYSODOR zugeschrieben und folgendes daraus angeführt: „Es ist aber von DIONYSODOR in dem Buche, welches betitelt ist „Über den Torus", gezeigt worden, daß das Verhältnis, welches der Kreis $B\Gamma\Delta E$ (Fig. 1) zur Hälfte des Parallelogramms $\Delta EH\Theta$ hat, auch der von dem Kreise $B\Gamma\Delta E$ erzeugte Torus zu dem Cylinder hat, dessen Achse $H\Theta$, dessen Grundflächenradius $E\Theta$ ist". Die nicht gerade eindringende Weisheit wird dann zu einer höchst umständlichen Inhaltsberechnung der als Unterlagen von Säulen verwendeten Speiren benutzt und auch durch ein Zahlenbeispiel veranschaulicht ($r = Z\Gamma = 6$ Einheiten; $R = AZ = A\Gamma + Z\Gamma = 8 + 6 = 14$; Höhe des Cylinders $= 2r$; die Länge des als Zylinder betrachteten Torus (gedacht als Höhe dieses Zylinders) $= 2 R \pi$), nach der Formel:

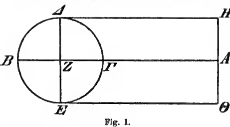


Fig. 1.

$$1)\quad V(\text{Speira}) = \frac{r^2\pi \,.\, R^2\pi \,.\, 2r}{R \,.\, 2r/2},$$

dann nach der einfacheren:

$$2)\quad V(\text{Speira}) = r^2\pi \,.\, 2\,R\pi\,.$$

Da die erste Formel gegenüber der zweiten, ohne ausgleichenden anderweitigen Vorteil, eine kaum zulässige Weitläufigkeit aufweist, so versteht man ihren Zweck nicht recht.

Dies ist in der Hauptsache alles, was uns die antiken Schriftsteller an mathematischen Kenntnissen von einem DIONYSODOR berichten. Leider steht an den erwähnten Stellen niemals eine nähere Bezeichnung dabei, weder der Name des Vaters noch der Heimat. Danach müßte wohl ein damals allbekannter Mann gemeint sein.

Sehen wir jetzt die literarisch erwähnten DIONYSODORE[1]) ein wenig an.

Da ist zunächst DIONYSODOR aus Melos. STRABO XII, 3, 16 S. 770, 1—5 nennt ihn Geometer (*τῷ Μηλίῳ γεωμέτρῃ*), PLIN. XII 248 (Kap. 109) sagt: Melius hic fuit; geometriae scientia nobilis, und erzählt dann

1) Vergl. CANTOR, *Gesch. d. Mathem.* I², 383; ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertume,* S. 250; SUSEMIHL, *Griech. Litteratur d. Alexandr.* I, 728, 762, 763; TANNERY in einer kleinen Bemerkung zu CANTOR, Biblioth. mathem. 1_3, 1900, S. 267; LORIA, *Le scienze esatte nell' antica Grecia,* IV, Modena 1900, S. 64; F. HULTSCH, zwei Artikel über DIONYSODOROS bei PAULY-WISSOWA, *Realencyclopädie*, Bd. V (ihre Aushängebogen standen mir durch die Güte des Verfassers zur Verfügung).

die amüsante Anekdote von dem nach seinem Tode auf seinem Grabe gefundenen, d. h., wie HULTSCH meint, von einem guten Freunde auf Verabredung daselbst niedergelegten Briefe, in dem DIONYSODOR seinen hinterlassenen (weiblichen) Erben weisgemacht habe, er habe bis zu seinem Grabe im Mittelpunkte der Erde 42000 Stadien zurückgelegt. Da er nun den Erdumfang mit ERATOSTHENES zu 252000 Stadien annahm, so hat er (worauf HULTSCH aufmerksam macht) π zu 3 gerechnet. Das flößt uns nicht gerade Achtung vor seinen mathematischen Kenntnissen ein, obwohl neuerdings noch aus dem 3. Jahrh. nach Chr. ein Beispiel, wo π = rund 3 gerechnet wird, in den *Oxyrrhynchos Papyri III*, 1903, London, S. 143 von GRENFELL und HUNT ans Licht gezogen ist.

Weiter kennen wir aus STRABO a. a. O. einen DIONYSODOR aus der Landschaft Amisene in Pontus (mit der Hauptstadt Amisos, südlich vom Schwarzen Meere). STRABO rechnet ihn unter die hinsichtlich ihrer mathematischen Bildung denkwürdigen Männer jener Landschaft (*ἄνδρες ἄξιοι μνήμης κατὰ παιδείαν ἐνταῦθα μαθηματικοί*). Diesem DIONYSODOR pflegte man bisher die Lösung der ARCHIMEDischen Aufgabe auf analytischem Wege zuzuschreiben, so CANTOR, so LORIA und HULTSCH.

Aber neuerdings ist dem Amisener noch ein Konkurrent erstanden in DIONYSODOR aus Kannos im südlichen Karien (unweit Perge), einem Zeitgenossen eines EUDEMOS. Hiermit kann, da DIONYSODOR mindestens nach dem Erscheinen der ARCHIMEDischen Schrift *De sphaera et cylindro* tätig gewesen sein muß, nur EUDEMOS von Pergamon, der Freund des APOLLONIOS von Perge, gemeint sein, dem dieser die drei ersten Bücher seiner Kegelschnitte widmete. Der Kaunier wird in einem von CRÖNERT aus der Herkulanensischen Rolle No. 1044 veröffentlichten Fragmente[1] als Lehrer des auch von APOLLONIOS geschätzten, später (etwa um 175—150) am Seleukidenhofe tätigen PHILONIDES folgendermaßen erwähnt: „PHILONIDES[2] hörte zuerst EUDEMOS, darauf aber DIONYSODOR, den Sohn des DIONYSODOR, aus Kannos". APOLLONIOS hatte den PHILONIDES nach APOLLONIOS *Conic. II procem.*[3] dem EUDEMOS selber empfohlen; denn er schreibt ihm: „Wenn der Geometer PHILONIDES, den ich Dir in Ephesos vorgestellt habe, in die Gegend von Pergamon kommen sollte, so teile

1) Frgm. 25 bei CRÖNERT, *Der Epikureer PHILONIDES* in den Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1900, S. 952: *Φιλωνίδης ἤκουσε μὲν Εὐδήμου πρῶτον, μετὰ δὲ ταῦτα Διονυ⟨σο⟩δώρου τοῦ Διον⟨υσοδώρ⟩ου Καυνίο⟨υ⟩.*

2) PHILONIDES scheint aus Laodicea zu stammen. Vgl. U. KÖHLER, *Ein Nachtrag zum Lebenslauf des Epikureers PHILONIDES;* Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1900, S. 999 (ist mir leider nicht zur Hand).

3) *Φιλωνίδης ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβάλῃ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μετάδος αὐτῷ.*

ihm (das 2. Buch der Kegelschnitte) mit". Nach einem anderen Fragmente[1]) hatte Philonides Vorlesungen des Dionysodor, den er um 180 vor Chr. gehört haben mag, nachgeschrieben und bekannt gemacht.

Wenn wir nun sehen, daß ein Schützling des genialen Apollonios von Perge seine Studien zuerst bei Eudemos[2]) macht, dann bei Dionysodor fortsetzt, so ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, daß durch Vermittlung ihres gemeinsamen Schülers oder Freundes, zumal bei der Nähe ihrer Wohnsitze Kaunos und Perge, auch ein wissenschaftlicher Verkehr zwischen Dionysodor und Apollonios sich angebahnt haben wird. Auf alle Fälle hat ja Dionysodor, wie sich aus mehrfachen Zitaten ergibt, die Kegelschnitte des Apollonios studiert, und er mag daraus die Anregung zu seiner eigenen analytischen Lösung der Archimedischen Aufgabe, die wohl damals die gelehrte Welt in Erregung versetzt haben wird, empfangen haben, mag nun wirklich zur Zeit des Dionysodor die Analysis des Archimedes verschollen gewesen sein (was wir aus chronologischen Gründen für wenig wahrscheinlich halten) oder mag die dahingehende Notiz auf bloßer Kombination des Eutokios beruhren. Auch Zeuthen a. a. O., S. 247, zieht des letzteren Angabe in Zweifel, indem er meint, „das von Eutokios gefundene Manuskript könne (unter Umständen) ein Bruchstück von einer selbständigen Behandlung trinomischer Gleichungen sein". Hatte aber auch Dionysodor die Archimedische Lösung vor sich, so hat seine eigene, sich ebenfalls mit Menechmos berührende Lösung gleichwohl selbständige Bedeutung. Also dieser Dionysodor aus Kaunos, nicht der aus der Amisenischen Landschaft ist nach unserer Auffassung der Fortsetzer Archimedischer Forschung.

Sollte die Schrift „Über den Wulst" lauter solche banale Dinge, wie das Fragment es zeigt, enthalten haben, so würden wir Bedenken tragen, es einem so bedeutenden Manne, wie es der Kaunier gewesen zu sein scheint, zuzuweisen. Aber es könnte diese Schrift ja Stellung zu den spirischen Schnitten genommen und das Fragment in einem anderen Zusammenhange

---

1) Fragm. 7, S. 945, bei Crönert (vgl. H. Usener, Rh. Mus. 1901, S. 147): *Ἐν μέντοι βυβλίοις ὑπομνήματα φέρει δύ' ἀρχαῖα . . τῶν παρ' Ἀρτέμωνι ἀπὸ τοῦ πρὸς τὸ πρῶτον μέχρι πρὸς τὸ τρίτ⟨ον⟩ καὶ⟨τρια⟩κοστὸν ἐκλ⟨εκ⟩τῶν ⟨ὁμε⟩ιλιῶν καὶ σχ⟨ολ⟩ῶν τῶν ⟨π⟩αρὰ Διονυσ⟨οδ⟩ώρῳ* „Doch gibt er heraus (eig. bringt) unter den Büchern zwei alte Kommentare (Kollegheftе) der ausgewählten, bei Artemon über das 1. bis 33. (Buch Epikurs „Über die Natur" gehaltenen) Vorträge und der Vorlesungen bei Dionysodor." Aus Fragm. 32, S. 954, geht noch hervor, daß dieser Mathematiker Dionysodor den Epikureern zugetan war, obwohl sich diese sonst gegen die Mathematik ablehnend verhielten. Vgl. Usener, a. a. O. S. 146.

2) Eudemos von Pergamon scheint um 180 vor Chr. gestorben zu sein. Das Todesjahr des Apollonios von Perge setzt Crönert um 170 an.

gestanden haben. Daß über spirische Schnitte ein wissenschaftlicher Freund des APOLLONIOS Selbständiges und Wichtiges zu sagen gewußt hat, wird jedermann zugeben. Dies ist freilich, da die spirischen Schnitte nach ausdrücklicher Angabe des PROKLOS (im Anschluß an GEMINOS?) von PERSEUS erfunden sind, an die Voraussetzung geknüpft, daß auch PERSEUS schon um 200 vor Chr. geblüht hat.

Über ein bibliographisches Repertorium der handschriftlichen mathematischen Literatur des Mittelalters.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

Mit vollem Recht haben die Pfleger der Geschichte der Mathematik dem Studium des Mittelalters verhältnismäßig wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Im Vergleich mit der griechischen und der neueren Mathematik bietet die des Mittelalters in der Tat sehr wenig Interessantes dar. Von einer Entwickelung in dieser Epoche ist kaum zu reden; bedeutende mathematische Fortschritte wird man hier vergebens suchen. Durch schlechte Übersetzung und wiederholtes Kommentieren verunstaltete Überreste der griechischen und arabischen Mathematik bilden den Hauptbestandteil der mittelalterlichen Überlieferung; und was die im Mittelalter neu hinzugekommenen Werke betrifft, schrieb mir kurz vor seinem Tode Curtze sehr bezeichnend, daß man beim Studium eines solchen niemals fragen soll: „was hat der Verfasser selbst geleistet?" sondern immer: „aus welchen griechischen oder arabischen Büchern hat er sein Werk kompiliert?" Mehr und mehr habe ich deswegen die Überzeugung gewonnen, daß man die Mathematik des Mittelalters nicht so sehr um ihrer selbst willen zu studieren habe, sondern weil wir einerseits in ihr viele Überreste aus älteren Zeiten besitzen, die sonst verloren gegangen sind, andererseits nur durch genaue Kenntnis der mittelalterlichen Überlieferung die auf sie fußenden Neubildungen der Renaissance analysieren können. So z. B. ist Al-Narizis Kommentar, welcher wenigstens teilweise nur in lateinischer Übersetzung existiert, eine Hauptquelle für die Kenntnis der griechischen Mathematik, während Regiomontans *De triangulis* und mehrere andere Werke derselben Zeit nur durch Vergleich mit den mittelalterlichen lateinischen Übersetzungen von Gebers Astronomie, Theodosios' und Menelaos' Sphärik richtig beurteilt werden können. Ptolemaios' Optik und Planisphärium, welche nur in lateinischen Übersetzungen erhalten sind, sind auf der einen Seite Hauptquellen für unsere Kenntnis

der griechischen Optik und Astronomie, auf der anderen Seite unentbehrlich, um die optischen und astronomischen Arbeiten der Renaissance zu verstehen.

Das hier Gesagte ist nichts Neues; jeder Kenner der Geschichte der exakten Wissenschaften wird es einfach Trivialitäten nennen. Ich habe aber diese allgemeinen Bemerkungen vorausschicken müssen, um aus ihnen den Schluß zu ziehen, daß, während es beim Studium der Mathematik des Altertums und der neueren Zeit in erster Reihe darauf ankommt, aus jedem Buche die Quintessenz heraus zu ziehen, um die mathematischen Entdeckungen feststellen und analysieren zu können, es bei den meisten der zu der mittelalterlichen Überlieferung gehörenden Texte nicht so sehr darauf ankommt, den hauptsächlichen Inhalt zu bestimmen, sondern vielmehr gilt, entweder den Umfang des Urtextes zu rekonstruieren oder die Gestalt genau zu präzisieren, in welcher der Text auf die Mathematiker der Renaissance kam — oder aber es gilt sowohl das eine als das andere.

Deswegen sind gereinigte textkritische Ausgaben eine „conditio sine qua non"; jedoch ist es in vielen Fällen — wenn die Urtexte *nicht* verloren sind — viel wichtiger, an den überarbeiteten und kommentierten Texten in ihren verdorbenen Formen festzuhalten. Weil es somit öfters nicht nur um die Textreinigung zu tun, sondern ein zweifaches Ziel zu erreichen ist, so wird die Textbehandlung umständlicher als sonst. Es genügt z. B. nicht das Planisphärium des Ptolemaios von Maslems Kommentar und von Übersetzungsfehlern u. dgl. zu befreien; wir müssen auch das Werk genau in der Gestalt kennen, in welcher es von den jüngeren Mathematikern benutzt wurde.

Wer mir bis auf diesen Punkt Recht gibt, der wird auch noch der Behauptung beistimmen, daß wir in der Behandlung der mittelalterlichen mathematischen Überlieferung auf einem Irrwege sind, wenn wir diese Überlieferung hauptsächlich um des Mittelalters selbst willen untersucht haben, und daß man viele Texte zu leichtsinnig herausgegeben hat, ohne erst die notwendigen Vorarbeiten erledigt zu haben. Ich sage nicht zu viel, wenn ich behaupte, daß es oftmals ein reiner Zufall ist, ob die modernen Ausgaben der mittelalterlichen lateinischen Texte gut und brauchbar geraten sind oder nicht.

Curtzes Ausgabe vom *Liber trium fratrum* z. B. ist schlecht, weil er nur schlechte Handschriften verwendet und die guten nicht verglichen hat, seine Anaritiusausgabe ist nur leidlich, weil er mit den Herausgebern des arabischen Urtextes nicht zusammengearbeitet hat, und weil sich später herausstellte, daß eine bessere Handschrift als die einzige von ihm benutzte existiert, seine Ausgabe von Savasordas *Liber embadorum* ist gut, wäre

aber, wie er selbst zngegeben hat, entschieden besser geworden durch Heranziehung einer Florentinerhandschrift, die er später als die beste aller vorliegenden Savasordahandschriften erkannt hat.[1]) Govis Ausgabe von Ptolemaios' Optik ist ganz unbrauchbar, weil er nur eine einzige Handschrift benntzte, die er außerdem nicht lesen konnte. Heibergs Ausgabe der lateinischen Übersetzung von Archimedes' Kreismessung ist allem Anschein nach gut; es ist aber dies ein reiner Zufall, denn Curtzes Ausgabe von Ahmed ben Jusufs *De arcubus similibus*, die derselben Handschrift entnommen ist, ist ganz mißglückt, weil in anderen Handschriften die echte Redaktion vorliegt, während der von Curtze herausgegebene Text eine jüngere Bearbeitung ist. Sehr gut ist dagegen Tannerys Ausgabe von Robertus Anglicus' *Tractatus quadrantis*; sie beruht aber anf einer ziemlich umfangreichen Untersuchung und Vergleichung vieler Handschriften. — Unsere „modernen" Ausgaben sind also noch denselben Znfälligkeiten unterworfen wie die des 16. Jahrhnnderts. Gibt der Zufall dem Herausgeber eine gute Handschrift in die Hand, so wird die Ausgabe leidlich gut, wie es z. B. dem Peter Apian mit seiner Ausgabe von Gebers Astronomie (1534) erging — wenn nicht, so wird die Ausgabe eben so schlecht wie z. B. die von Albattanis Astronomie (Nürnberg 1537).

Daß das Studium der mittelalterlichen mathematischen Überlieferung bisher noch nicht ernstlich genng in Angriff genommen wurde — man hat allerdings vorläufig auch Wichtigeres zu tun gehabt — ist nicht zu leugnen. Wir sind deshalb gezwungen, die Grundlage zu schaffen, welche allein eine genügende und erschöpfende Textbehandlung gewähren kann. Das Schlimme dabei ist aber, daß in dieser Beziehung ein wahrer Notstand herrscht, indem die Überlieferungen der mittelalterlichen Mathematik in einem Chaos liegen. Nur ganz einzelne der vielen hier in Frage kommenden Sammlungen lateinischer Handschriften sind so gut katalogisiert, daß wir ihren Inhalt ziemlich genau feststellen können, und nur wenige lateinische Handschriften mathematischen Inhalts sind von Fachmännern untersucht und beschrieben; und doch sind genaue und detaillierte Handschriftenbeschreibungen durchaus notwendig, weil in zahlreichen Fällen die Texte mit keinen oder gar mit falschen Autorennamen nnd Titeln versehen sind und öfters in mehreren voneinander stark abweichenden Redaktionen vorliegen. Von Euklid-Jordanus' *De ponderibus* z. B. kann ich 6 oder 7 wesentlich verschiedene Redaktionen konstatieren, und zwar alle mit demselben Anfang.

Nach vergeblichen Versuchen, mich in dieser Verwirrung zurecht zn

1) Vgl. unten p. 332.

finden, ist es mir klar geworden, daß es nur eine einzige Methode gibt die notwendige Ordnung herbeizuschaffen, und zwar folgende: Die Texte müssen ohne Rücksicht auf Über- und Unterschriften nach ihren Anfangsworten alphabetisch zusammengestellt werden. Ferner müssen Texte mit demselben Anfang und verschiedenen Schlußworten auseinander gehalten werden. Die auf diese Weise bestimmten Texte und verschiedenen Textredaktionen müssen dann mittels des Inhaltes und durch Zusammenstellung sämtlicher Datierungen, Über- und Unterschriften näher bestimmt werden.

Mit Hilfe der bekannten Codd. Paris. 9335 und Dresd. Db. 86, ca. 50 anderer Handschriften, die ich in Italien untersucht habe, und der gut katalogisierten Handschriften in Erfurt und Oxford habe ich mir auf diese Weise einen alphabetischen Zettelkatalog über ca. 400 verschiedene Texte (oder Textredaktionen) mathematischen, astronomischen oder astrologischen Inhalts verschafft. In dieses System gilt es nun nach und nach die Texte anderer Handschriften ähnlichen Inhalts einzufügen. Ob es auf diese Weise gelingen wird, einmal eine *Bibliotheca mathematica latina mediiaevalis* zu verfertigen, darüber wage ich noch nichts zu versprechen. Es hängt dies von vielen Faktoren ab, derer ich nicht Herr bin.

Als Probe lasse ich ein paar Artikel folgen, die schon zur Veröffentlichung reif sind.

1.

Declarare *volo qualiter faciam . . . et aequedistat arcui bg.*

Titel: *Liber Milei* (varr. *Millei, Mileij, Milleii, Myleii, Myllaei) de figuris spericis* (varr. *de speris, de arcubus, de spericis, de sphaeralibus figuris).*

3 Bücher (ohne Vorrede) mit bezw. 44 à 46, 8 u. 15 Propp.

d. i. ***Menelaos'*** Sphärik (σφαιρικά) I—III in lat. Übersetzung aus dem Arab. durch ***Gherardo Cremonese*** († 1187). Einzige lat. Übersetzung vor der des Maurolycus (1558). Der Übersetzer wird nicht genannt, in den Verzeichnissen über die Übersetzungen Gherardos steht aber: *liber Milei tractatus III.*

Mss: A (ohne Kommentar) Par. 9335** [1]), XIV, 32ᵛ—54ᵛ; Arsen. 1035,** XIV—XV, 81ʳ—104ʳ; Reg. 1268,** XIV, 212ʳ—238ʳ; S. Marc. Flor. 213** (= Conv. soppr. J. V. 30), XIV, 34ʳ—52ᵛ; S. Marc. Flor. 184** (Bibl. Laur.) XV, 47ʳ—79ᵛ (defekt); Marc. 328** (= Valent. XI. 63), XV, 120ʳ—157ʳ; Marc. 329** (= Valent. XI. 5), XV, 219ʳ—283ʳ; Vat. 3380,* XVI, 281ʳ—315ᵛ.

1) * bedeutet, daß die Handschriften von Fachmännern untersucht (oder ** verglichen) sind.

B (mit Kommentar von Campanus am Rande) Palat. 1351,** XIV, 234r—287v; Vindob. 5277,** XVI, 171r—185r & 361r—378v.

C (mit Kommentar von Campanus im Texte) Reg. 1261,* XIV, 223r—257v; Vat. 4571,* XIV, 1r—20v; Marc. VIII. 32** (= Valent. XI, 90), XIV, 35r—84v.

D (unsicher, weil nicht genau untersucht) Rheno-Traject. 725, XV, 111—164. — Vgl. auch R. Beer, *Die Handschriftenschätze Spaniens*, Wien 1894, p. 127.

E (Fragmente) Digby 168, XIII—XIV, 119—120: *Excerpta*; Digby 178, XIV—XV, 112—115: *Propositiones additis hic illic demonstrationibus brevibus*; Par. 7406, XIV?, 95—98: I, propp. 1—10.

Unediert. Ausgabe in Vorbereitung. Literatur: Steinschneider, Z. M. P.[1]) **10**, p. 483 ff; Boncompagni, *Platone Tiburtino*, p. 35—36; *Gherardo*, p. 5 & 63—64; Wüstenfeld, p. 60; Leclerc II, p. 410 & 492; Montfaucon I, p. 427; Fabricius, *Bibl. Graec.* IV, p. 24; Björnbo, A. G. M. W. **14**, p. 1—154; B. M. 3_3, p. 65 & 69; 4_3, p. 240 & 244.

Menelaos aus Alexandria ca. 100 n. Chr. Hauptwerk Sphärik. Griech. Urtext verloren; Fragmente in Theons Kommentar zu Ptolemaios VI, cap. 11; Auszüge im Pappos VI, 1—5. — Arab. Übersetzung und Rezension: s. Steinschneider, Z. M. P. **10**, p. 481; Z. D. M. G. **50**, p. 196 ff; B. M. 12_2 (1898), p. 73 ff; Suter, A. G. M. W. **10**, p. 27, 39, 82, 152, 155 & 228; Wenrich, p. 210; Leclerc I, p. 229; Björnbo, A. G. M. W. 14, p. 14—16. — Hebr. Übersetzung: s. Steinschneider, H. Ü. p. 515—16; Björnbo, A. G. M. W. 14, p. 16—17. — Lat. Druckausgaben der Sphärik, alle von Gherardos Übersetzung unabhängig: [1]) Maurolycus, Messina 1558. [2]) Mersenne, Paris 1644 (Abdruck von [1]), nur die Propositionen). [3]) Halley, Oxford 1758. Vgl. Björnbo, A. G. M. W. 14, p. 19—22.

Anm. ***Propositis*** *in sphaerae superficie ... in nostris duobus sphaericorum libellis exponemus*, d. i. Menelaos' *Sphärik* I—III in der Ausgabe von Maurolycus (1558). 3 Bücher mit bezw. 47, 48, 23 Propp. — verkürzt und bearbeitet. Mss: Par. 7251, XVI* (Abschrift oder Druckms.); Erlang. 909, XVI (Abschrift); Bodl. (Kat. 1697) 6556. 9 (Abschrift? verschollen?).

2.

Oportet *postquam optamus complere ... maior angulo maiore qui est bag.*

Titel: *Liber Jacob* (var. *Jacobi*) *Alkindi* (var. *Alchindi*) *de aspectibus* od. *de aspectu* od. *de causis diversitatum aspectus et dandis demonstrationibus geometricis super eas.*

1 Buch ohne Satzaufzählung, aber mit Vorrede.

d. i. ***Alkindis*** Optik in lat. Übersetzung aus dem Arab. durch ***Gherardo Cremonese*** († 1187). Einzige lat. Übersetzung. Der Übersetzer wird nicht genannt, in den Verzeichnissen über die Übersetzungen Gherardos steht aber: *Liber Alchindi de aspectibus tractatus I.*

[1]) Über die Verkürzungen siehe unten S. 333.

Mss: A (vollständig) Par. 9335,** XIV, 75r—82r; Ambr. T. 100. sup.,* XIV, 1r—18v; Bas. F. II. 33,** XIV, 122—127; Coll. Corp. Chr. 254, XIV & XVI—XVII, 191—199 (enthält nicht, wie Coxe und Wüstenfeld angeben, zwei Werke von Alkindi. Ursache dieses Mißverständnisses ist, daß die Vorrede (197—199) im XVI—XVII Jh. hinter dem Texte (191—196) hinzugefügt wurde); Ambr. P. 21. sup.,* XV, 135r—162r; Harl. (Brit. Mus.) 1, ?, f. 41—53? (enthält nach dem Kataloge *liber Jacobi Alkyndi de aspectibus).*

B (defekter Text: .. **secundum** *rectitudinem perueniet .... ad ipsam partem, quod sic probatur. Desideratur finis.*) Vat. 2975,* XVI, 216r—231v; Coll. Rom. H. C. 93* (= Bibl. Vitt. Em. Rom. 2548 (Mss. Gesuitic. 419)), XVI, 107r—122v.

C (Fragmente) Digby 168, XIII—XIV, f. 129: *Ex libro Jacob Alchindi de perspectiva.*[1])

Unediert. Ausgabe in Vorbereitung. Literatur: Boncompagni, *Gherardo*, p. 5 & 64—65; Wüstenfeld, p. 62; Leclerc II, 404 & 414; Steinschneider, B. B. 5, p. 436; Suter, A. G. M. W. 10, p. 26.

Ja'qûb b. Ishâq b. el-Sabbâh el-Kindi, Abû Jûsuf aus Basra lebte in Bagdad, starb ca. 873/74. Er trug den Beinamen „Philosoph der Araber" und schrieb über Philosophie, Mathematik, Astronomie, Medizin und Musik. Ob seine im *Fihrist* angeführte *Abhandlung über die Verschiedenheiten der Bilder* oder der im Cod. Par. arab. 2467 vermutlich aus demselben Werk erhaltene *Auszug aus der Verbesserung der Optik* mit Gherardos lat. Übersetzung identisch ist, ist noch nicht festgestellt. Vgl. Flügel, *Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes* I, 2; Suter, A. G. M. W. 10, p. 23—26; Z. M. P. 37, p. 10—15; Steinschneider, B. B. 5, p. 433—37; B. M. 5_2 (1891), p. 44—45 & 8_2 (1894), p. 100; H. Ü. p. 562 ff.; Leclerc I, p. 160—68; Nagy, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc. storiche) 4_5 (1895), p. 157—70; Loth, *Al-Kindi als Astrolog*, Leipzig 1845.

3.

Qvi *omnes mensurandi dividendique ... satis sufficere ad hoc non dubitetur.*

Titel: *Liber embadorum a Savasorda* (var. *Savasorda Judeo*) *in hebraico compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus anno Arabum DX* (eine Handschrift hat *DC*) *mense saphar.* Hinzu fügt die Unterschrift einiger Handschriften: *die XV eiusdem mensis, hora tertia, Sole in XX gradu et XV minuto Leonis, Luna in* etc. vgl. Curtzes Ausgabe.

4 Kapitel (Bücher) mit kurzer Einleitung und Satzaufzählung (s. die Ausgabe).

---

[1]) Aus Cod. Ambr. D. 451. inf.*, XVI saec. ist Alkindis Optik ausgeschnitten worden (verschollen?).

d. i. ***Abraham bar Chijja*** ha-Nasi (der Fürst): *Chibbur ha-Meschika we-ha-Tischboret* in lat. Übersetzung aus dem Hebr. durch ***Platone Tiburtino*** (tätig ca. 1100—1125). Einzige lat. Übersetzung, nach obiger Angabe am 20. Juni 1116 vollendet.

Mss: A (sichere) Par. 11246,** XIV, 1r—37v; Par. 7224,** XVI Abschr. des vorigen); S. Marc. Flor. 207** (= Conv. soppr. J. VI. 36), XII—XIII, 23r—40v (nur die ersten 2/3 des Textes); S. Marc. Flor. 184** (Bibl. Laur.), XV, 120r—164r (geht fol. 159r lin. 4 = Ausgabe p. 178, lin. 13 in einen anderen Text über, ist also im Schluß defekt).

B (unsicher, weil nicht genau untersucht) Dubl. (Trinity Coll.) 390, Jahr 1565: Savassorda Judaeus *Liber de areis a* Platone Tiburtino *latine versus;* eine Handschrift soll Graf Isolani in Bologna besitzen.

Ediert von M. Curtze in Abhandlungen z. Gesch. d. mathem. Wissensch. **12**, Leipzig 1902, p. 10—183 mit deutscher Übersetzung; Auszüge in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 321—337. (Curtze benutzte Par. 11246 & 7224 — S. Marc. Flor. 207 & 184 habe ich mit der Ausgabe verglichen; 207 ergab sich als die beste dieser 4 Handschriften.) Literatur: Steinschneider, Serapeum 1858 (No. 3 & 6); Hebr. Bibliogr. VII, p. 85; Z. M. P. 12, p. 18; B. M. 10_2 (1896), p. 37; Boncompagni, *Platone Tiburtino*, p. 31—39; Wüstenfeld, p. 43—44; Libri II, p. 480—86; Bubnov, *Opera Gerberti* (Berl. 1899), p. 302 ff.; Leclerc II, p. 393—394.

Abraham bar Chijja lebte Ende des XI. und Anfang des XII. Jahrhunderts meist zu Barcelona. Sein Ehrentitel „Sahib al Schorta" (Oberst der Leibwache) wurde in „Savasorda" verdreht. Wahrscheinlich war er Plato von Tivoli mit der Übersetzung seines Werkes behilflich. Der hebr. Urtext existiert in mehreren Handschriften (s. B. M. 10_2 (1896), p. 36). Das von Plato ausgelassene Vorwort und der Epilog sind herausgegeben; vgl. die hebr. Zeitung Hammagid 1858 und Steinschneider *Mischnat ha-Middot* (Berlin 1864) und *Mekize Nir damim* (Berlin 1895). Über Schriften und Leben des Abraham s. auch Steinschneider, Z. M. P. **10**, p. 466 & **12**, p. 1—44 & 16, p. 370; B. M. 4_2 (1890), p. 41—43; Z. D. M. G. 28, p. 633; Leclerc II, p. 387—389.

Wie man leicht sehen wird, ist die Abfassung dieser Artikel ganz systematisch. Angegeben wird:

Textanfang . . . Textschluß (event. mit Varianten).

Texttitel (mit Varianten), event. Subskriptionen.

Bücheranzahl, Vorrede, Satzaufzählung.

Feststellung des Textes, event. des lat. Übersetzers.

Lateinische Handschriften (event. in Klassen eingeteilt) und bei jeder Handschrift die betreffende Bibliothek oder Sammlung, wenn möglich Zeit (Jahrhundert) und Platz des Textes (fol. — fol.). In Klammern nähere Aufschlüsse über die betreffende Handschrift, wenn solche notwendig sind. Wenn die Handschrift unsicher ist, dann Texttitel nach dem betreffenden Katalog.

Ausgaben und Literaturstellen, wo der im Artikel behandelte Text (oder Über-

setzung), die lat. Handschriften und Ausgaben desselben genannt werden — ausgenommen sind jedoch die betreffenden Handschriftenkataloge.

Notwendigste Aufschlüsse über Verfasser und Textgeschichte mit den wichtigsten Literaturstellen.

Besondere Anmerkungen und Verweise auf andere Artikel.

Zu beachten sind folgende Verkürzungen.

B. M. = Bibliotheca Mathematica.

Z. M. P. = Zeitschrift für Mathematik und Physik [mit Supplement].

A. G. M. W. = Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

B. B. = Bullettino des Fürsten B. Boncompagni.

Z. D. M. G. = Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft.

H. Ü. = Steinschneider: *Die Hebräischen Übersetzungen des Mittelalters.*

Kat. 1697 = *Catalogus Mss. Angliae et Hyberniae*, Oxoniae 1697.

Boncompagni, *Gherardo* = *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese.*

Boncompagni, *Platone Tiburtino* = *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino.*

Leclerc = *Histoire de la médecine arabe.*

Libri = *Histoire des sciences mathématiques en Italie.*

Montfaucon = *Bibliotheca Bibliothecarum mss. nova.*

Wenrich = *De auct. Graec. verss. Syriac. Arab.*

Wüstenfeld = *Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische* (in Abh. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 22).

Sul matematico cremonese Leonardo Mainardi.

Di Antonio Favaro a Padova.

Nella seconda edizione del *Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. Baldassarre Boncompagni* Enrico Narducci, che lo compilò e che era assai competente in materia di paleografia, attribnisce l'esemplare del trattato „Artis metrice pratice seu mensurative" di Leonardo Mainardi da Cremona contenuto nel codice 302 (253) al secolo XIV, e ripetutamente lo afferma nella descrizione di esso: singolare però ch'egli non abbia avvertito come sul dorso del manoscritto una indicazione da lui riportata lo attribuisce, non già a Leonardo, ma a Gherardo Cremonese, e quindi non abbia in qualche modo richiamata la attenzione degli studiosi sopra questa strana differenza tra la esterna e la interna indicazione. Più singolare mi sembra ancora che, descrivendo un altro esemplare del medesimo trattato contenuto nel codice 303 (254) egli riferisca senza alcuna osservazione le tre prime linee del *recto* della car. 1ª di tale manoscritto e nelle quali si legge: „Leonardi Maynardi Astronomi et Physici ac Mathematici opus. Florebat sub anno 1488. Franciscus Arisius in *Cremona litterata*, fol. 347 Tomo p.º"; poichè questa indicazione così positiva discordava tanto essenzialmente dall' apprezzamento da lui fatto intorno all' età del codice poco prima descritto.

Non pretendo di poter risolvere la questione sollevata dal Sig. G. Eneström intorno al tempo nel quale veramente fiorì Leonardo da Cremona, oppure il vero autore del citato trattato, e mi terrò a riportare quanto si legge del Mainardi, oltre che presso l'Arisi, nelle altre fonti di storia letteraria Cremonese meglio accreditate.

1. Vida, M. Hier., *Cremonensium orationes III adversus Papienses in controversia principatus* (Cremonae 1550), car. 50*t.*:
   „Fuit ante Plasium Leonardus Mainardus qui suo tempore non tantum inter nostros, sed etiam inter omnes in iis studiis tenuit principatum."
2. Cavitelli, *Annales* (Cremonae 1588) car. 222*t.* sub a. 1496: „Leonardus Maynardus excellens Physicus Cremonensis fuit in magna extimatione ob ejus doctrinam."

2. Corte, Bart., *Notizie istoriche intorno a' medici scrittori milanesi* (In Milano 1718) pag. 284:
„Ad lecturam Mathematicarum. Magister Frater Leonardus de Majnardis de Cremona. Floren. 60. — Hujus Opera, gothico charactere exarata et per Clarissimum Virum Franciscum Arisium, eruditorum Cremonae Principem relata in tom. I *Cremon. literat.* pag. 347 sub an. 1488, apud me autographa servantur, prout etiam ibidem in nube Arisius ipse testatur."
4. Dalle schede mss. della „Biografia Cremonese" di Vincenzo Lancetti. VI. lettera M. (Libreria Civica di Cremona. BB. 8 . 2):
   a) Mainardi, Leonardo. Alla pag. 222 degli *Annali* del Cavitelli leggesi: „Leonardus Maynardus excellens Physicus Cremonensis fuit in magna extimatione ob ejus doctrinam." Nella seconda Orazione del Vida contro i Pavesi, trovasi quest' altra testimonianza: „Fuit ante Plasium Leonardus Maynardus, qui suo tempore non tantum inter nostros, sed etiam inter omnes in iis studiis (mathematicis) tenuit principium (*sic*). Fu dunque il Mainardi nomo di grido, e come fisico e come matematico, e fiorì verso il 1530 (*sic*). Il nostro diligente Arisi ebbe notizia dal dotto suo amico Lazaro Agostino Cotta di un opuscolo inedito del Mainardi, da esso trovato in Milano (non certamente nell' Ambrosiana, ove non esiste) intitolato: „Leonardi Cremonensis Artis metricae practica compilatio", della quale questo è il principio." Artem metricam, seu mensurativam, occasione quadam prospiciens iam a multis videram expositam diversis regulis et figuris, ut compendiose habentur, deliberavi hac summula praestringere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita, quam quippe tripartior, iuxta triplam mensurae rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem. Aggiunge che in margine all' opuscolo erano delineate le convenienti figure. (Aris. T. 1. p. 347).
   b) Mainardi, da Bresciani, lib. delle famiglie nob. [mss. inedito]. 1496. Leonardo med. coll. scrisse de Aegritudine infantium, de febri ethica, de partu mulierum, e lesse filosofia morale in Milano.
   c) Mainardi, Leonardo — Astronomo; aggiungasi: Giulio Salerno Pavese, nella sua terza Orazione contro i Cremonesi, nominando il Mainardi lo dice Ferrarese. Ciò è falso. Il Borsetti, se tal fosse, lo avrebbe compreso nella sua storia del Ginnasio Ferrarese.
   d) Mainardi, fra Leonardo, Cremonese.
   Sua Opera. Vedi Corte, *Medici Milanesi*, p. 284. „
   e) Mainardo, Leonardo lodato.
   Vida, *Orat. 1 in Pap.*, pag. 50 tergo, 1ª edizione.

Di qni adunque sembrerebbe potersi conchiudere che le fonti Cremonesi fanno appartenere Leonardo Mainardi, perfettamente individuato per il matematico in questione, alla seconda metà del secolo XV: farebbe soltanto eccezione il Lancetti il quale con evidente errore lo fa fiorire verso il 1530, e diciamo con evidente errore, perchè nessuna delle fonti ch'egli cita lo autorizzava a tale erronea affermazione. Siccome pertanto il citato Cavitelli menziona ripetutamente sotto l' anno 1530 il famigerato Maramaldo, vi ha lnogo a dubitare che il Lancetti l'abbia confnso con Mainardo e si sia perciò indotto alla ingiustificata assegnazione.

Stima tuttavia il Sig. Eneström che il Leonardo Mainardi da Cremona debba assegnarsi al Secolo XIV, fondandosi, oltre che sulla opinione del Narducci basata sull' esame paleografico del manoscritto sopra l'affermazione del Vida, credendo egli che in essa si legga: „Fuit ante Blasium Leonardus Mainardus" ed aggiungendo che per „Blasius" non possa intendersi altri che Biagio Pelacani da Parma, morto nel 1416. Però il Vida scrisse effettivamente „ante Plasium", ed il „Plasius" quivi menzionato altri non è che Battista Piasio da Cremona vissuto fra il XV ed il XVI secolo e del qnale il Baldi (*Cronica de Matematici, overo epitome dell'istoria delle vite loro.*, Urbino, MDCCVII) scrive: „Battista Piasio [D. C. 1501], nobile cremonese, filosofo, medico ed astrologo, fu lettore di filosofia e di astrologia nello Studio di Ferrara, chiamatovi dal marchese Leonello. Predisse molte cose, le quali riuscirono vere. Scrisse molto, e fra l'altre cose, prese la difesa di Gerardo contra il Monteregio: ma queste fatiche non sono nscite alla luce." Più precisamente ne scrive l' Arisi (*Cremona literata*, T. I, p. 333—334): „In stadio suorum annorum fere nonagenario major cucurrit 1492 Kalend. Februar. sepultus in Ecclesia S. Augustini ad Sacellum Divi Nicolai Tolentinatis".

Di qui adunque, salvo l'affermazione del Narducci, nella quale non è nemmeno da escludersi in via assoluta un errore di stampa, sembrerebbe accertato che Leonardo Mainardi da Cremona abbia effettivamente fiorito nella seconda metà del secolo XV.

Qui però potrebbe sorgere un' altra questione, cioè se il Leonardus Cremonensis, autore del trattato „*Artis metrice practice*" sia proprio il Leonardo Mainardi, conforme abbiamo trovato affermato e fu dal Curtze creduto. Io non sono per il momento in grado di risolvere tale difficoltà, e non intenderei di farlo nemmeno nella presente occasione; voglio però anticipare una notizia che non mi sembra priva di importanza. Il Codice presentemente nella Biblioteca Mediceo-Laurenziana di Firenze, e che era altrevolte nèlla Biblioteca del Convento di San Marco, pure di Firenze, segnato col n⁰. 212, membranaceo del secolo XV, contiene a car. 133—135

delle scritture geometriche stese negli anni 1404 e 1405 da un „LEONARDUS DE ANTONIIS de Cremona, ordinis minorum, bacalarius", intorno al qnale nessuna notizia ci fu dato di rinvenire appresso gli scrittori di cose Cremonesi. Fosse dunqne mai qnesto LEONARDUS DE ANTONIIS *de Cremona* il vero autore del trattato attribuito a LEONARDUS MAINARDUS *de Cremona?*

Léonard de Vinci et la composition des forces concourantes.

Par P. Duhem à Bordeaux.

En un récent article sur *Les origines de la statique*,[1]) nous avons consacré un chapitre étendu à Léonard de Vinci. A la fin de ce chapitre, nous avons analysé un fragment où Léonard semble avoir entrevu une démonstration satisfaisante de la loi du plan incliné; nous terminions ainsi cette analyse:

„Quel principe dicte à Léonard de Vinci cette affirmation exacte? Il est difficile de le déclarer avec une entière certitude. Toutefois, les lignes que nous venons de citer nous semblent indiquer que la règle à laquelle il est fait appel, d'une manière plus ou moins consciente, est non point la règle du parallélogramme des forces, mais bien cette proposition: le moment d'une résultante de deux forces est égal à la somme des moments des composantes."

„Léonard était-il donc parvenu à la connaissance de cet important théorème? Dans ceux de ses manuscrits qui ont été publiés, nous n'en avons relevé aucune trace autre que celle qui vient d'être relatée. Les manuscrits encore inédits, ceux, en particulier, qui composent le célèbre *Codex Atlanticus*, renferment-ils des passages capables de confirmer cette opinion? Il est permis de l'espérer et, partant de souhaiter la publication de ces précieuses reliques."

Pour confirmer l'opinion que nous émettions dans ce passage, il n'est pas besoin d'attendre la publication de nouveaux manuscrits de Léonard. Cette confirmation est donnée avec une entière évidence par les notes contenues en plusieurs feuillets du manuscrit E[2]) de la bibliothèque de l'Institut, feuillets dont nous n'avions pas, tout d'abord, reconnu l'extrême importance. L'analyse de ces notes va nous montrer qu'avant Stevin et Roberval, Léonard a connu et employé ce théorème:

1) P. Duhem, *Les origines de la statique*. Aristote et Archimède. Léonard de Vinci. Jérôme Cardan. L'impossibilité du mouvement perpétuel (Revue des questions scientifiques 4₃, 1903, 462—516.

2) *Les manuscrits de Léonard de Vinci*, publiés par Ch. Ravaisson-Mollien; Ms. E de la bibliothèque de l'Institut (Paris 1883).

Si l'on considère deux forces concourantes et leur résultante, le moment de la résultante par rapport à un point pris sur l'une des deux composantes est égal au moment de l'autre composante par rapport au même point.

Dans les pensées de Léonard, comme d'ailleurs dans les raisonnements de Stevin, les deux composantes sont les tensions de deux cordes, tensions dont la résultante est égale et directement opposée à un poids qne supportent ces deux cordes.

A maintes reprises, il appliqne le théorème qne nons avons énoncé à un poids N suspendu au milieu B d'nne corde dont les extrémités A, C sont sur une même horizontale (Fig. 1). Du point A, il abaisse une perpendicnlaire AF sur la corde CB ou snr son prolongement, et une antre perpendicnlaire AD sur la verticale du point B. Il déclare qne la tension de la corde CB et le poids N maintiendraient en équilibre nn corps formé des deux bras de levier *potentiels* AF, AD, s'il était susceptible de tourner antour dn point A. Voici quelqnes passages[1]) dont la netteté ne me semble laisser place à aucun doute:

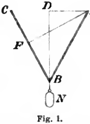


Fig. 1.

„Première: A est le pôle de la balance angulaire AD et AF; et leurs appendices sont DN et FC."

„Seconde: Plus grossit l'angle de la corde qui, au milieu de sa longuenr, soutient le poids N (Fig. 2), d'antant plus diminue son levier potentiel et croît le contre-levier potentiel qui soutient le poids." Et Léonard, ayant tracé la figure de telle sorte que AB soit le qnadruple de AC, marque 1 le poids N et met sur la corde FD le chiffre 4 qui mesure sa tension.

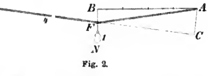


Fig. 2.

Il ponrsuit en ces termes, nons marquant clairement qnelle snbstitution d'un cas d'équilibre à un antre lui a donné le théorème dont il s'occupe: „Cette figure (Fig. 3) représente la précédente ACB potentielle; mais parce qne la réelle pèse et la potentielle non, j'y ajoute le bras MN ponr le contre-poids dn bras O."

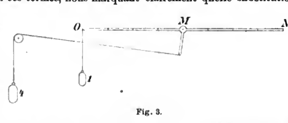


Fig. 3.

1) Ms. *E*, fol. 65, recto.

Revenant à la Fig. 2, il ajoute; „*AFD* sont les soutiens réels du poids *N* et les lignes *AC* et *AB* sont le levier et le contre-levier potentiel du poids *N*, et les appendices demi-réels *CD* et *BF* sont ceux dont l'un est joint au levier potentiel et l'autre au contre-levier potentiel *AB*."

„Jamais le contre-levier *AB* ne peut avoir de changement, par quelque changement que puisse avoir l'angle fait par la corde réelle *AFD*; et jamais le levier *AC* ne peut avoir une longueur permanente par le changement du susdit angle *AFD*; mais il se fera plus petit d'autant que l'angle *AFD* se fera plus grand."

Si les deux points *A* et *D* restent fixes, ainsi que le poids *N*, la tension de la corde *DF* sera inversement proportionelle au levier potentiel *AC*: „Où le levier potentiel est en être,[1]) la force sera aussi en être. La force sera d'excellence d'autant plus grande que le levier potentiel sera de moindre quantité."

La corde *DFA* ne peut jamais être rectiligne, car le levier potentiel *AC* étant nul, la tension de la corde *DF* serait infinie: „Jamais[2]) la corde ou puissance quelconque, posée dans la situation d'égalité avec ses extrémités opposées, ne se pourra redresser ayant quelque poids au milieu de sa longueur." — „Jamais[3]) le levier potentiel n'est consumé par aucune puissance."

En aucun cas, la tension de chacune des deux cordes n'est la moitié du poids supporté; il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que les deux cordes fussent parallèles, ce qui ne peut être:

„Si le levier *AD* (Fig. 4) était double[4]) de son contre-levier *AB*, alors la corde *DE* sentirait la moitié du poids *F*, et cela ne peut pas arriver si le levier *AD* n'est pas dans la position d'égalité [la position horizontale], chose qui ne peut être si les appendices qui concourent à la suspension du poids *F* ne sont pas équidistants entre eux."

E B A C D F

Fig. 4.

Jusqu'ici nous avons vu Léonard appliquer le théorème énoncé à un cas particulier; la verticale, menée par le poids soutenu, était bissectrice de l'angle des deux cordes qui supportent ce poids; mais il en a également fait usage dans le cas général; le passage que nous allons citer[5]) en témoigne.

1) Ms. *E*, fol. 60, verso.
2) Ms. *E*, fol. 60, verso.
3) Ms. *E*, fol. 60, recto.
4) Ms. *E*, fol. 61, verso; cf. fol. 63, recto.
5) Ms. *E*, fol. 63, recto.

LÉONARD trace deux figures, en chacune desquelles deux cordes, faisant un certain angle, soutiennent un poids dont la verticale n'est nullement bissectrice de cet angle. En l'une de ces figures (Fig. 5), le levier *DR* de la corde *FE* et le contre-levier *SD* du poids *Q* sont égaux entre eux; aussi LÉONARD affecte-t-il du même chiffre 3 le poids *Q* et la tension de la corde *FE*. En l'autre figure (Fig. 6), le levier *AB* de la corde *FG* est triple du contre-levier *BC* du poids *E*, et LÉONARD, évaluant toujours à 3 le poids *E*, marque 1 sur la corde *FG*, afin d'en indiquer la tension. Cette seconde figure est accompagnée de ce commentaire: „Il est d'autant plus facile de tendre la corde faite angulaire par le poids qui se soutient au milieu d'elle, que la situation de ses extrémités opposées est moins oblique; donc la corde *BGF* a moins de fatigue à reprendre la droite extension que la corde précédente *DEF*, et ceci se manifeste par le levier et le contre-levier de l'une et de l'autre obliquité. En effet, le levier *AB* sur le pôle *B* est triple de son contre-levier *BC*. Donc l'appendice *AF* demi-réel, avec puissance d'un, peut contre 3 dans l'appendice opposé semi-réel *CE*; et, dans la précédente, 3 de puissance sont contre 3 de résistance.“

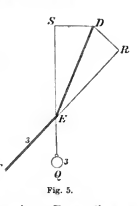


Fig. 5.

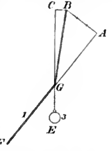


Fig. 6.

Ces diverses citations montrent avec la dernière évidence que LÉONARD a eu une connaisance très exacte du théorème que nous avons énoncé; or ce théorème entraine avec lui toutes les règles de composition des forces concourantes.

On peut, comme l'on sait, en déduire ce corollaire: *Par rapport à un point pris sur la direction de la résultante, les deux composantes ont des moments de signes contraires qui ont même valeur absolue.* LÉONARD a-t-il aperçu ce corollaire? La réponse affirmative à cette question me paraît seule capable d'expliquer un fragment[1]) contenant une figure très explicite (Fig. 7) et un commentaire malheureusement plus obscur. Voici

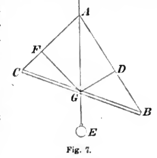


Fig. 7.

1) Ms. *E*, fol. 67, verso.

ce commentaire: „Si deux cordes d'obliquités différentes et contraires descendent d'un même endroit et se joignent aux extrémités opposées de la poutre située en une obliquité quelconque, toujours le centre de gravité de la poutre se trouve dans la ligne entre-centrique en même temps que le centre des suprêmes hauteurs des cordes qui la suspendent.“

La ligne *entre-centrique* dont parle Léonard est la verticale du point de suspension A; quant aux *suprêmes hauteurs* dont il est ici question, et qui ne peuvent être que les lignes GF, GD de la figure, pourquoi auraient elles été tirées, sinon parce qu'elles sont les leviers potentiels des deux cordes AB, AC?

Les divers fragments que nous venons de citer et de commenter énoncent les idées les plus exactes sur la composition des forces concourantes. Pourquoi faut-il que Léonard, abandonnaut ces idées aussitôt qu'émises, se soit immédiatement rallié à une règle toute différente de la précédente et tout à fait erronée? *En la page même*[1]) où se trouve le fragment que nous venons d'analyser, Léonard écrit: „Pour les deux cordes qui concourent avec différentes obliquités à la suspension d'un même grave, la proportion entre les poids soutenus par elles sont telles que sera celle de leurs obliquités. On le prouve: Soient les deux cordes d'obliquités différentes AD et CD (Fig. 8) qui sont telles que l'une d'elles est double de l'autre, comme nous montrent les bras de la balance, BC étant double du bras BA, les obliquités d'appendices AD et CD descendant des extrémités de ces bras. Donc la corde CD sent la moitié du poids que sent la corde AD.“ Le chiffre 3 marqué par Léonard au dessous du poids E semble indiquer qu'il regarde ici ce poids comme égal à la somme des tensions des deux cordes.

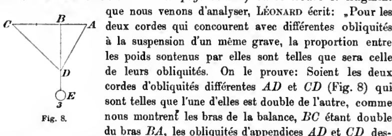


Fig. 8.

A la page précédente,[2]) nous lisons:

„Le grave suspendu dans l'angle de la corde divise le poids pour les cordes en telle proportion qu'est la proportion des angles inclus entre lesdites cordes et la ligne centrale du poids. On le prouve: Soit l'angle de ladite corde BAC (Fig. 9), dans lequel est suspendu le grave G, à la corde AG. Soit donc cet angle coupé dans la position de l'égalité [la position horizontale] par le ligne FB, puis

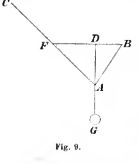


Fig. 9.

1) Ms. *E*, fol. 67, verso.
2) Ms. *E*, fol. 66, verso.

tire la perpendiculaire DA, à l'angle A, qui soit en droite continuation avec la corde AG, et la proportion qu'a l'espace DF avec l'espace DB, le poids que sent la corde BA l'aura avec le poids que sent la corde FA."

Dans les feuillets suivants[1]), Léonard use sans cesse de cette règle incorrecte.

En résumé, il n'est aucun théorème fondamental de la statique des corps solides dont Léonard de Vinci n'ait eu, au moins à une certaine époque de sa vie, une claire aperception. Il en est au sujet desquels sa pensée n'a pas subi de fluctuations; telle la condition d'équilibre d'un système mobile autour d'un axe et sollicité par des forces situées dans un plan perpendiculaire à cet axe. Il en est, au contraire, au sujet desquels son esprit a éprouvé des hésitations et des variations, abandonnant la vérité un instant saisie pour s'attacher de nouveau à l'erreur; de ce nombre sont la règle du plan incliné et la règle de composition de deux forces concourantes.

Les géomètre du XVI[e] siècle qui, comme Cardan et Benedetti, ont nourri leur statique des pensées de Léonard de Vinci, nous ont conservé celles des découvertes de ce génie auxquelles il avait toujours et fermement adhéré. Celles, au contraire, au sujet desquelles il avait hésité ne nous ont pas été transmises par eux, sans doute parce qu'au milieu des pensées incertaines et contradictoires de Léonard, ils n'étaient pas capables de démêler la vérité de l'erreur. Ces découvertes là ont dû être refaites sur nouveaux frais.

C'est ainsi que la loi de composition des forces concourantes a dû être retrouvée par Stevin et par Roberval. Stevin en a donné l'énoncé général, mais il n'a pu en fournir une démonstration convaincante, sauf dans le cas où les deux composantes sont rectangulaires. La démonstration de Roberval est plus concluante; comme celle de Léonard de Vinci, elle ramène, en dernière analyse, la question aux lois d'équilibre d'un système mobile autour d'un axe; mais cette réduction est obtenue par la voie la plus pénible et la plus compliquée; au contraire, la méthode de Léonard, qui éclate aux yeux à la comparaison des figures 2 et 3, est d'une admirable simplicité. Non seulement Léonard avait devancé Stevin et Roberval, mais il les avait surpassés.

1) Ms. E, fol. 68, recto et verso; fol. 69, recto et verso; fol. 70, recto; fol. 71, recto.

Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

I. 1727—1731.

Vor sechs Jahren habe ich in dieser Zeitschrift[1]) ein Verzeichnis der in Stockholm aufbewahrten Briefe von Leonhard Euler an Johann I Bernoulli veröffentlicht und Aufschlüsse über deren Inhalt gegeben. Dabei wurde hervorgehoben, daß die Briefe zwar keine wesentlich neuen Beiträge zur Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts bringen, dennoch von historischem Gesichtspunkte aus von Interesse sind, besonders weil man dadurch instand gesetzt wird, den Zeitpunkt gewisser Entdeckungen von Euler näher zu präzisieren; als Belege hierfür können zwei Artikel von mir, nämlich über die Entdeckung der allgemeinen Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten[2]) und über die Entdeckung der Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche[3]), dienen.

Anläßlich der oben genannten Aufschlüsse bin ich zuweilen von Fachgenossen um nähere Auskunft über den Inhalt gewisser Briefe ersucht worden, und dieser Umstand hat mich angeregt, die Briefe selbst der mathematisch-historischen Forschung zugänglich zu machen. Eigentlich genügt es, den Namen des Briefschreibers zu nennen, um eine Veröffentlichung der Briefe zu motivieren[4]). Ich beabsichtige darum dieselben nebst erläuternden Anmerkungen in der Bibliotheca Mathematica zum Abdruck zu bringen, und beginne jetzt mit den sieben ersten Briefen, die

1) Eneström, *Sur les lettres de Léonard Euler à Jean I Bernoulli;* Biblioth. Mathem. 1897, S. 51—56.

2) Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants*; Biblioth. Mathem. 1897, S. 43—50.

3) Eneström, *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques;* Biblioth. Mathem. 1899, S. 19—24.

4) Vgl. M. Cantor in der Allgemeinen deutschen Biographie 6, Leipzig 1877, S. 424 (Art. Euler).

1727—1731 geschrieben sind. Diese bilden gewissermaßen ein abgeschlossenes Ganzes, denn nach dem 11. August 1731 scheint der Briefwechsel zwischen EULER und BERNOULLI für längere Zeit aufzuhören, und von den späteren Briefen besitzen wir keinen, der älter als 1737 ist.

Die Briefe von BERNOULLI an EULER sind schon teils von FUSS[1]), teils von mir[2]) veröffentlicht, und es könnte also möglicherweise als überflüssig betrachtet werden, dieselben hier abzudrucken. Auf der anderen Seite bilden die nämlichen Briefe eine wichtige Ergänzung der EULERschen, und ich habe mich darum entschlossen auch jene hier einzuführen.

Der erste aufbewahrte Brief von EULER ist vom 5. November 1727, und sicherlich ist dieser auch der erste des ganzen Briefwechsels. Freilich antwortet EULER darin auf eine briefliche Anfrage von JOHANN BERNOULLI, und im Briefe kommt der Ausdruck „quemadmodum in novissimis literis significasti“ vor, aber ohne Zweifel handelt es sich um ein Schreiben von JOHANN BERNOULLI an seinen Sohn DANIEL, nicht an EULER. Die folgenden fünf Briefe von EULER sind bezw. vom 10. Dezember 1728, 18. Februar 1729, 16. Mai 1729, 21. Oktober 1729 und 11. Juli 1730 datiert. EULER hatte also 1727—1730 sechs Briefe an BERNOULLI gesandt, bekam aber 1728—1729 nur drei Antworten, nämlich vom 9. Januar 1728, 18. April 1729 und 17. Dezember 1729, und der Brief von 1730 scheint nicht beantwortet worden zu sein. Alle bisher erwähnten Briefe sind lateinisch geschrieben, aber am 25. Mai 1731 richtete EULER an BERNOULLI einen Brief in deutscher Sprache und bekam darauf eine deutsche Antwort vom 11. August 1731. Damit dürfte, wie ich schon bemerkt habe, der Briefwechsel für längere Zeit aufgehört haben.

Unter den Fragen, die in den Briefen behandelt wurden, sind in erster Linie die folgenden drei zu nennen: 1) über die Logarithmen negativer Größen; 2) über Integration gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung; 3) über die Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche.

In betreff der ersten Frage nimmt BERNOULLI hauptsächlich denselben Standpunkt ein, wie etwa 16 Jahre früher in seinem Briefwechsel mit LEIBNIZ, während EULER die Schwierigkeiten hervorhebt, welche entstehen, wenn man $\log x = \log (-x)$ annimmt. Zu einer Verständigung gelangten

1) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle publiée par* P. H. FUSS, T. II (St.-Pétersbourg 1843), S. 1—94. — Hierzu gehört noch die von mir in der Bibliotb. Mathem. 1898, S. 58—60 veröffentlichte „scheda“ des JOHANN BERNOULLI vom 16. April 1740.

2) *Trois lettres inédites de JEAN Ier BERNOULLI à LÉONARD EULER par* G. ENESTRÖM; Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, 1880, Nr. 21.

die Briefschreiber nicht, und erst ein paar Jahrzehnte später kam Euler dazu, die Frage näher zu untersuchen und damit endgiltig zu erledigen.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die behandelt werden, sind wesentlich dieselben, mit denen sich Euler im 3. Bande der Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae beschäftigt hat; besonders interessieren sich die Briefschreiber für die Gleichung

$$y^m \frac{d^2y}{dx^2} = ax^n \left(\frac{dy}{dx}\right)^r.$$

Die Frage der Gleichnng der kürzesten Linie auf einer Oberfläche wurde von Bernoulli angeregt, und was sich hierüber in den Briefen findet, stimmt wesentlich mit dem überein, das später von Euler im 3. Bande der Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae und von Bernoulli im 4. Bande seiner *Opera omnia* auseinandergesetzt wurde.

Auch mit Problemen über tautochrone und isochrone Kurven beschäftigen sich die Briefe, in nahem Anschlusse an die einschlägigen Abhandlungen von Euler in den Commentarii academiae scientiarnm Petropolitanae, und die zwei Briefe in deutscher Sprache sind ausschließlich der mathematischen Theorie der Musik gewidmet.

Mehr im Vorübergehen werden einige andere Gegenstände behandelt, z. B. über die Bewegungen von Kanonenkugeln; über die Glieder der Reihe $1, 1.2, 1.2.3, \ldots, 1.2.3\ldots n$, die gebrochenen Werten von n entsprechen; über eine Verallgemeinerung des Problems von der kürzesten Linie auf einer Oberfläche; über die Bewegnng eines Körpers auf einer Kurve, die in einem beweglichen Vertikalplane liegt.

Noch andere Fragen werden beiläufig erwähnt als von Euler oder von seinen Kollegen in Angriff genommen.

1.

Euler an Bernoulli 5. November 1727.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Euler spricht seinen herzlichsten Dank ans für das Wohlwollen, das ihm Bernoulli bei vielen Gelegenheiten erwiesen hat. — Gewisse kritische Bemerkungen von N. Harscher in betreff der Abhandlnngen von Bernoulli. — Schwierigkeiten bei der mathematischen Behandlung der Ausströmung von Flüssigkeiten durch Öffnungen von Gefäßen. — Eine von Euler in Angriff genommene Abhandlnng über die Theorie des Schalles. — Die Lösung von J. Hermann des Problemes die tantochrone Kurve im resistenten Medium zu bestimmen. — Die geometrische Bedentung der Gleichung $y = (-1)^x$.

Vir Excellentissime Celeberime Fautor atque Patrone summe semper Colende!

Postulat officium meum, ut, quod coram negligentius peregeram, id

absens literis diligentius, et quantum tenui calamo fieri potest, accuratius perficiam, Tibique, Vir Excellentissime, gratias, quantas mente concipere possum, maximas agam, pro summis quae largiter in me contulisti, beneficiis. Non solum mihi, de Praestanstissima Tua et Carissima, qua prae omnibus longe excellis, scientia, interiora penetralia benevole patefacere et largiri haud dedignatus es, verum etiam sine ullo meo merito, sollicite eo incubuisti, ut officium quoddam in Patria, si fortuna favisset, nec non alibi occuparem. Pro ingentibus hisce innumerisque aliis beneficiis, quomodo me, quodammodo saltem, sufficienter enim vires meas longe superat, gratum Tibi sistam, nescio. Id tamen agam, et ita me geram, ut Te eorum, quibus me mactare voluisti, beneficiorum nunquam poeniteat, atque Tibi me observantissimum et quavis occasione obstrictissimum, exhibebo. Deum autem Ter Optimum Maximum ex animo precor, ut Vitam tuam in Carissimae tuae familiae emolumentum et solatium, in Litterarum promotionem et augmentum, in multos annos protrahere velit, Tibique bonam valetudinem, felices laborum tuorum successus, et quaecunque ad vitam banc commodo transigendam sequentemque coelestem adipiscendam conducunt, clementer largiri. Ad haec Tuo me favori, meaque studia submisse commendo, rogoque ut, quo hactenus me complexus fuisti amore, favore et patrocinio, in posterum me impertire benevole perrecturus sis.[1])

Petis, Vir Excellentissime, ut perscribam ea, quae Exp. D. HARSCHER[2]) aliquando iu Te mecum locutus est. Quantum recordor, res ita se habuit: In bibliotheca publicâ primum incepit de trajectoriis reciprocis loqui, de quibus se tot scbediasmata in Actis Erudit. deprebendere ajebat,[3]) sibi autem totam rem plane nullius usus neque in vita communi neque in medicina videri (quasi quae illuc applicari nequeant, nihili essent facienda), ut merito quae de illis excogitata sunt, veritates fatuae vocari possint,

1) Bei dem Durchlesen der etwas übertriebenen Ausdrücke von EULERS Dankbarkeit muß man in Betracht ziehen, daß der Briefschreiber am 15. April 1707 geboren war und also noch nicht 21 Jahre erfüllt hatte.

2) NIKOLAUS HARSCHER, geboren in Basel den 1. Mai 1683, wurde 1698 Philosophiae Magister, 1704 Doctor Medicinae, 1707 Professor der Historie und Eloquenz in Marburg, 1711 Professor der Eloquenz in Basel und starb in Basel den 27. Oktober 1742. Er hat viele Abhandlungen und Reden medizinischen und literarischen Inhalts veröffentlicht. Als Student beschäftigte er sich ein wenig mit der Mathematik und verteidigte 1698 die vierte Abhandlung von JAKOB BERNOULLI über unendliche Reihen (vgl. CANTOR, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* 3^2, S. 90).

3) Das Problem der reziproken Trajektorien wurde im Jahre 1720 von NIKOLAUS II BERNOULLI gestellt, und gab zu einigen Artikeln in den Acta Eruditorum Anlaß (vgl. CANTOR, a. a. O. 3^2, S. 473—474).

seque mirari Te in hujusmodi inutilibus studia Tua collocare. Hisce autem longe deteriorem esse dissertationem *De motu musculorum*[1]) quippe quâ in re medica vix absurdius quid excogitatum sit. Haec sunt, quae mihi recordanti inciderunt, et quae se exacte sic habere affirmare possum.

Cum ordo conventu nostro aliquid proponendi me tetigisset, primum de effluxu aquarum ex vasis perforatis quaedam proposui,[2]) quam materiam Cl. Tuus Filius jam perscripsit.[3]) Multis autem haec Theoria difficultatibus premitur, quemadmodum in novissimis literis significasti. Experientiam enim, quando cylindrorum fundis alii graciliores infiguntur, minus conspirantem habet, siquidem theoria tempus duplo fere minus exhibet.

Nuper incepi dissertationem meam de sono exponere,[4]) ubi primum aeris naturam ex tua Theoria deductam explicavi, circa eam inveni quod velocitas materiae subtilis in globulis aereis gyrantis tanta esse debeat, ut mota in directum lato possit tempore unius minut. sec. ad summum 1116, ad minimum 1070 ped. absolvere possit, quae velocitas apprime eadem est cum velocitate soni, num eae a se invicem forte dependeant nescio.

Celeb. Hermannus[5]) nuper solutionem tautochronarum in medio resistente[6]) dedit, exactissime eandem quam ego dederam.[7])

Incidi forsan in hanc aequationem $y = (-1)^x$, qualem ea figuram exhibeat, difficile determinatu videtur, cum y nunc affirmativum, nunc negativum, nunc imaginarium existat, mihi ea videtur non lineam continuam exprimere, sed infinita puncta discretim posita ad distantiam = 1 ex utraque axis parte, quae autem simul sumta aequentur axi.

Datum Petropoli: d. 5. Novemb. vet. st. A. 1727.

Vale Vir Excellentissime et favere perge Tui observantissimo et obstrictissimo servo

Leonh. Euler.

1) Die *Dissertatio de motu musculorum* von Johann Bernoulli wurde 1694 in Basel herausgegeben.

2) Dieser Vortrag von Euler scheint nicht gedruckt worden zu sein.

3) Siehe die Abhandlung von Daniel Bernoulli, *Theoria nova de motu aquarum per canales quoscumque fluentium;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, 1727 (gedruckt 1730), S. 111—125.

4) Euler hatte 1727 in Basel eine *Dissertatio physica de sono* herausgegeben.

5) Über Jakob Hermann (geboren in Basel den 16. Juli 1678, gestorben daselbst den 11. Juli 1733) siehe Cantor, a. a. O. 3², S. 275—276.

6) Vgl. die Abhandlung von Hermann, *Theoria generalis motuum qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpore indesinenter agentibus;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, S. 139—173, wo S. 158 eine Methode zur Lösung der Aufgabe angedeutet wird.

7) Vgl. die Abhandlung von Euler, *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum;* daselbst 4, 1729 (gedruckt 1735), S. 67—89.

Aufschrift:

Monsieur

Monsieur JEAN BERNOULLI

Tres Celebre Professeur des Mathematiques, et Membre des Academies Royales de Franche(!), d'Angleterre et de Prusse etc.

à

Bâle.

2.

Bernoulli an Euler 9. Januar 1728.

Antwort auf EULERS Brief vom 5. November 1727. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS a. a. O. S. 3—7.[1])

Inhalt. Die Ernennung von HERMANN zum Professor der Moralphilosophie an der Universität in Basel. — EULERS Untersuchungen über die mathematische Theorie der Ausströmung von Flüssigkeiten und der Geschwindigkeit des Schalles. — Experimente über vertikal abgeschossene Kanonenkugeln und Berechnung der Bewegungen solcher Kugeln. Eine Abhandlung von CHR. FATIO DE DUILLIER über Schwingungs- und Stoß-Mittelpunkt. — Wert der Größe $y = (-1)^x$ für verschiedene Werte von x. — Berichtigung eines Versehens von DANIEL BERNOULLI in betreff der Bewegungen von vertikal geworfenen Körpern. — Übersendung einer dynamischen Abhandlung von JOHANN BERNOULLI. — EULER wird aufgefordert mit DANIEL BERNOULLI in Eintracht zu leben.

Doctissimo atque ingeniosissimo Viro Juveni
LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Pergratae fuerunt literae Tuae Petropoli ad me datae die 5. Novembris st. v., quae me certiorem reddiderunt mei memoriam in Te nondum esse obliteratam neque temporis, neque loci longinquitate; si quid, ut agnoscis, in sublimiore mathesi a me profecisti, gaudeo, eoque magis, quod pro ea qua es ingenii felicitate, mirum in modum illud amplificas, quo spero futurum ut semina a me sparsa brevi tempore in immenses abeant segetes, quid enim a fundi Tui fertilitate expectare non licet?

Dedi 20. praeteriti mensis Decembris literas ad filium meum DANIELEM, quas eum accepisse spero. Significabam in illis electionem Celeb. HERMANNI ad professionem Ethices, atque monebam ut huic viro meo nomine ea de re gratularetur, quod factum fuisse non dubito; nunc idem ut repetas apud illum enixe Te rogo, cum plurima salute meis verbis illi denuncianda, non minus quam Filio meo.

Gratias ago pro perscripta crisi iniqua et fastuosa quam HARSCHERUS de me meisque editis scriptis tam inhumaniter ad Te dixit. Dabitur occasio, eam illi pro merito exprobrandi, atque invidi hominis judicio opponendi judicium mihi perquam honorificum tot aliorum virorum in mathematicis et anatomicis celeberrimorum.

Quae de motu aquarum effluentium ut et de velocitate soni memoras,

1) Einige kleine Fehler bei FUSS sind in dem folgenden Abdrucke verbessert worden

digna utique sunt ut excolas. Nullus dubito quin si recte tractentur, omnia quae experientia monstrat ex Theoria mea virium vivarum deduci possint.

Scripsit nuper Daniel meus facta fuisse experimenta, circa globos tormentarios in altum verticaliter explosos, eaque occasione communicavit quaedam a se commenta de modo supputandi tempora ascensus et descensus, habita ratione resistentiae aëris. Dicit inter alia se demonstrare posse globum verticaliter explosum, licet vi infinita, hoc est, cujus velocitas initialis infinita sit, impendere tamen tempus tantum finitum in totum ascensum absolvendum in aëre resistente. Ego vero ex eo tempore meditatus detexi methodum determinandi quaecunque circa hanc materiam desiderabat Filius. Notabo hic summatim tantum pro casu proposito principaliora, communicaturus methodum ipsam forsan prima vice qua ad Danielem scribam. Esto globus ferreus, qualis Petropoli adhibitus fuit, habens diametrum 3 poll. seu $\frac{1}{4}$ ped. Paris. (assumo hic mensuram Paris. quia haec mihi nota est, non item anglica). Suppono aërem per omnes dimensiones uniformiter densum, cujus densitas se habeat ad densitatem ferri ut 1 ad 7000, quemadmodum Filius assumit (quamvis verius se habeat ut 1 ad 6000), suppono etiam aërem esse perfecte elasticum, cujus nempe minimae particulae, ceu globuli consideratae, potentissimo elaterio sint praeditae; aliter enim se res haberet, quam hic descripturus sum, si aër esset instar fluidi non elastici ut aquae, cujus nempe particulae post impulsum in corpora non resilirent sed tantum a sequentibus ad latera removerentur et postea praeterlaberentur. Suppono item quod calculus et experientia ab Hugenio instituta docet, corpus grave a quiete cadens in vacuo descendere primo minuto secundo per $15\frac{1}{12}$ ped. Paris. Ponamus jam exempl. gr. globum tanta vi sursum explodi ut in vacuo ascendere posset per 1000 ped. His ita praemissis dico sequentia: 1. Ad ascensum 1000 ped. in vacuo requiritur tempus $8\frac{1}{6}$ sec., est enim

$$\sqrt{15\tfrac{1}{12}} : \sqrt{1000} :: 1 : 8\tfrac{1}{6}$$

quam proxime. 2. Idem globus eadem vi explosus in aëre resistente ascendet ad altitudinem $582\frac{3}{8}$ ped. 3. Pro hoc ascensu in aëre requiruntur $5\frac{3}{4}$ sec. quam proxime. 4. Pro subsequente descensu insumuntur $6\frac{1}{2}\frac{1}{5}$ sec. ita ut uno fere secundo citius ascendat quam descendat. 5. Hinc a momento explosionis ad momentum recidentiae globi elabentur $12\frac{83}{100}$ sec. in aëre, sed in vacuo $16\frac{1}{3}$ sec.; differentia est $3\frac{148}{300}$, seu proxime $3\frac{1}{2}$ sec. quibus in vacuo serius recidit quam in aëre. 6. Si globus noster careret pondere et suam tantum quantitatem materiae retineret, ille pergeret moveri in infinitum, sed ita retardaretur, ut post percursos pedes 4667 ln: 17371780 ipsi residua foret velocitas quae se haberet ad velocitatem initialem ut 1 ad n (per ln intelligo logarithmum numeri n ex tabulis logarithm.

sumendum). Hoc nihil aliud est quam casus particularis formulae illius generalis quam dedi in dissertatione mea de motu[1]) Cap. XII § 13 7. Tempns vero, quo globus noster non gravis percurreret hanc altitudinem, foret $= 228683 \times \overline{n - 1} : 48000$ sec. 8. Velocitas maxima, ad quam globns descendens in aëre continuo vergit, et qnidem data quavis quantitate propins, si in infinitnm descenderet, se habet ad velocitatem initialem quacum exploditur ut 61 ad 80. Adeoque descendendo in aeternnm primam suam velocitatem nunquam recuperabit globus. 9. Hinc velocitas illa, quae tempore infinito acquireretnr in aëre, aequalis est illi, quam globus acqnireret si in vacuo caderet ex altitudine $583\frac{3}{8}$ ped. h. e. uno tantum pede majore quam est ascensus in aëre, quem quippe invenimns esse $582\frac{3}{8}$ ped. 10. Velocitas initialis est ad velocitatem finalem, quam nempe acquirit globus recidens ad eundem locnm unde fuerat explosus, ut 135 ad 82. Hinc velocitas finalis ad velocitatem maximam *ad quam non* ut 1312 ad 1645, h. e. proxime ut 4 ad 5.

Commnnica haec qnaeso cum DANIELE meo, ut conferat cnm snis, dicasque ei Illustr. Comitem à Pergen desiderare, ut describi curet dissertationem illam gallicam de centro oscillationis et percussionis, quam olim Ill. CHRISTOPHORUS FATIO[2]) sub ductu et auspiciis meis conscripserat et cujus apographum mihi traditum mei filii Petropolim abeuntes secum deportarnnt. Quando descripta erit, poterit DANIEL alterutrum exemplar commoda sed promta et tuta occasione ad me transmittere, alterum sibi retinere.

Quaeris de $y = (-1)^x$, qnid illa sit? Ego sic statuo: sit

$$y = (-n)^x,$$

erit

$$ly = xl(-n),$$

adeoque

$$\frac{dy}{y} = dxl(-n).$$

Est vero

$$l(-n) = l(+n),$$

1) Es handelt sich hier um die Preisschrift des JOHANN BERNOULLI, *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, gedruckt in Paris 1727 im 1. Bande des Recueil des pièces qni ont remporté le prix de l'académie des sciences, und abgedrnckt im 3. Bande (S. 7—107) seiner *Opera omnia*.

2) Aus einem Briefe von JOHANN BERNOULLI an LEIBNIZ vom Januar 1695 geht hervor, daß CHRISTOPHER FATIO DE DUILLIER (ein älterer Bruder von NIKOLAUS) nach den Lektionen des BERNOULLI einen ziemlich starken Band mathematischen Inhalts geschrieben hatte; möglicherweise handelt es sich hier um eine Abteilung dieses Bandes.

nam in genere

$$dl(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{+z} = dl(z), \text{ hinc } l(-z) = l(z);$$

adeoque

$$\frac{dy}{y} = dxl(+n),$$

et integrando

$$ly = xln,$$

unde

$$y = n^x = (\text{in casu quo } n = \pm 1)\ 1^x = 1. \quad \text{Ergo } y = 1.$$

Caeterum novi anni auspicia, decursum ac finem cum multis aliis sequentibus ex animi sententia Tibi procedere voveo. Vale et fave. Dabam Basileae a. d. 9 Jan. 1728.

P. S. Filius meus credit globum in aëre sursum explosum vi licet infinita vel cujus velocitas initialis infinite sit magna, tamen nonnisi tempus finitum insumere in ascensum totalem, sed fallitur; invenio enim in hoc casu tempus ascensus esse etiam infinitum, quamvis (quod forsan illum fefellit) sit infinities minus, quam tempus ascensus in vacuo, si eadem illa velocitate initiali infinita exploderetur. Misi nuper per cursorem publicum specimen meum gallicum de Motu[1]) ad Clar. Schumacherum, Bibliothecarium vestrum, ab Illustri Academia vestra examinandum. Adventaverit fortassis ante has literas. Spero te alere pacem et concordiam cum Filio meo, ita enim ambo excitabitis admirationem vestri apud minus exercitatos in profundiori mathesi: praeterquam quod hoc suadeat obligatio erga Filium, qui unicus Petropolim te protraxit.

3.

Euler an Bernoulli 10. Dezember 1728.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 9. Januar 1728. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 46.

Inhalt. Geldangelegenheiten. — Die Logarithmen negativer Größen und die Gleichung $y = (-1)^x$. — Einige Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die integriert werden können.

Vir Excellentissime Celeberime.

Misi ego ante septimanam tessaram nummariam primam, nunc mitto alteram centum Rubelonum, ad 54. Stüberos, cujus summae dimidium Cl. Filius Tuus transmittit, idque quam primum Pater meus argentum accipiet, Tibi persolvet.

---

1) Das hier erwähnte „specimen gallicum de motu" ist wohl die S. 351 zitierte Preisschrift. Aus welchem Grunde diese Schrift von der Petersburger Akademie geprüft werden sollte, ist mir unbekannt.

Quae mihi nuper de potentiis quantitatum negativarum perscripsisti, solvunt quidem dubium propositum, et ipse interim in aliquot argumenta incidi, quibus mihi probare posse video, esse $lx = l - x$. Alia autem quoque sese obtulerunt, contrarium asserentia, et quibus assentiar prorsus nescio. Pro affirmativa praeter argumenta tua mihi perscripta, est hoc forte quoque argumentum. Sit $lxx = z$, erit

$$\tfrac{1}{2} z = l \sqrt{xx},$$

sed $\sqrt{xx}$ est tam $-x$ quam $+x$, quare $\frac{1}{2} z$ est lx et $l-x$. Posset quidem objici, xx habere duos logarithmos, sed hoc qui asser[ere vult][1]) infinitos adjudicare deberet.[2]) Haec autem ratio, quod differentialia lx et $[l-x$ sunt] aequalia, minus mihi probare videtur aequalitatem lx et $l-x$, cum ab aequalitate differentialium ad aequalitatem integralium concludere non liceat, ut $a+x$ non aequatur x, eo quod differentialia aequantur. Similis autem est casus noster, est enim $l - x = lx + l - 1$, unde ad aequalitatem lx et $l-x$ prius concludere non licet, quam demonstratum sit, $l-1$ esse 0. Contraria argumenta sunt haec absurdum deducentia. Si enim esset $lx = l - x$ foret $x = -x$ et $\sqrt{-1} = 1$. Posset autem hic objici, sed nescio an felici succesu, ab aequalitate logarithmorum ad aequalitatem numerorum conclusionem fieri non posse. Et tum adhuc dubium meum concernens curvam $y = (-1)^x$ valent. Concesso autem non esse $x = -x$, etiam si sit $lx = l - x$, vereor tamen ne hoc principium in calculo applicatum in errorem deducat. Uti sit radius circuli a, sinus y, cosinus x, exit ex methodo Tuâ quadraturam circuli ad logarithmos reducendi,[3]) area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}},$$

et posito $x = 0$ habebitur quadrans circuli

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l - 1.$$

Si ergo fuerit $l - 1 = 0$, oportet ut sit quoque $\sqrt{-1} = 0$, et tandem $1 = 0$. Quomodo me ex his contradictionibus explicam, plane ignoro, ideoque, Vir Celeberime, abs te intelligere desidero quid de iisdem sentias.

Memini cum adhuc Basileae degerem, aliquando me in hanc aequationem

1) Die in eckigen Klammern stehenden Worte sind von mir ergänzt; der Brief ist nämlich an einem Rande ein wenig beschädigt.

2) Hier hat Euler also das wahre Verhältnis gestreift, verfolgt aber nicht weiter den Gedanken.

3) Vgl. Johann Bernoulli, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral*; Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1702 (gedruckt 1704), S. 289—297 [speziell S. 297].

$$yyddy = xdx^2,$$

existente $ddx = 0$ incidisse, quam ad differentialem primi gradus reducere institueram sed irritu conatu. Hic autem nuper in methodum incidi tria genera aequationum differentio-differentialium ad differentiales reducendi.[1]) Primum genus comprehendit sub se omnes aequationes duobus terminis constantes, cujusmodi est aequatio proposita. Alterum genus est omnium earum aequationum, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem dimensionum numerum obtinet; unius autem dimensionis tam x quam dx et ddx pono, cujusmodi haec est aequatio[2])

$$ddx = x^n Y dx^{m-n} dy^{2-m} + x^p \mathfrak{Y} dx^{q-p} dy^{2-q}$$

ubi Y et $\mathfrak{Y}$ denotant functiones quasvis ipsius y. Ad tertium genus refero omnes eas aequationes, quarum singuli termini eundem dimensionum numerum continent. Methodum ipsam alio tempore perscribo, hic enim propter spatii angustiam finire cogor.

Vale Vir Excellentissime Celeberrime et favere perge

Die 10. Decembris A. 1728. Petropoli. Obstrictissimo servo Tuo L. Eulero.

Aufschrift:

A Monsieur
Monsieur Jean Bernoulli
Très Célèbre Professeur des Mathematiques
à
Bâle.

4.

Euler an Bernoulli 18. Februar 1729.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. — Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 20.

Inhalt. Lösung der Aufgabe: Die kürzeste Linie auf einer Oberfläche zu finden. — Einige Spezialfälle dieser Aufgabe, und besonders der Fall, wo die Oberfläche erzeugt wird von einer Geraden, die immer einen Punkt mit einer gegebenen ebenen Kurve gemeinsam hat, und durch einen außerhalb der Ebene der Kurve befindlichen festen Punkt geht. — Eine Eigenschaft homogener Gleichungen nullten Grades.

Vir Excellentissime Celeberime.

Quanquam non diu est, quod literas ad te dedi, atque ea propter nefas videri posset tam brevi intervallo bis literis te obruere: Tamen cum

1) Vgl. hierüber die Abhandlung von Euler, *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus;* Comment. acad. sc. Petrop. 3, 1728 (gedruckt 1732), S. 124—137.

2) In seinem Briefe vom 16. Mai 1729 bemerkt Euler, daß die folgende Gleichung unrichtig abgeschrieben ist.

problema a Cl. filio tuo mihi tuo nomine propositum[1]) feliciter solvisse mihi visus sim, non potui hoc tempore intermittere, quia solutionem meam tibi perscriberem, quapropter a te veniam mihi datum iri confido. Problema illud postulabat, ut in superficie quacumque a puncto dato ad datum ducatur linea brevissima. Tametsi vero mihi non ignotum erat, idem problema jam olim a te fratreque tuo in Act. Lips. fuisse agitatum, non dubitavi tamen, quin hoc tempore faciliorem et elegautiorem solutionem consecutus sis, eo quod de novo nunc iterum proposueris. Atque propter id ipsum primo intuitu difficilius mihi visum erat hoc problema, quam cujus solutionem viribus meis adipisci possem. Interim tamen omnem operam meam in eo collocavi, et brevi tempore elapso sequentem solutionem nactus sum. Data superficie quacnmque, accipio planum quoddam tanquam primarium et in eo rectam loco axis. In hoc axe sumo abscissas t, hisce normales in plano assumto voco x, et inde perpendiculares donec superficiei occurrant, appello y. Aequatione inter has tres coordinatas naturam superficiei expressam esse suppono, et nil aliud ago, nisi ut hanc aequationem certo modo restringam, quo lineam brevissimam tantum praebeat. Id quod fiet alterutram indeterminatam eliminando, et aequatio inter duas residuas projectionem lineae brevissimae in plano exhibebit. Ad hoc praestandum aequationem propositam ad differentialem reduco, quam hanc formam habere pono:

$$Pdx = Qdy + Rdt,$$

in qna P, Q et R functiones qnascumque ipsarum x, y et t significare possunt. Ut haec restringatur ex conditione problematis sequentem aequationem naturam lineae brevissimae involventem erui[2])

1) Es ist nicht unwahrscheinlich, daß Johann Bernoulli das Problem in seinem Briefe an Daniel Bernoulli vom 20. Dezember 1727 (siehe oben S. 349) gestellt hatte; jedenfalls dürfte Euler erst nach dem 10. Dezember 1728 davon Kenntnis erhalten haben (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, S. 21).

2) Hier hat Johann Bernoulli notiert: „Ego inveni (servatis litteris Eulerianis, sed posito $\sqrt{dt^2 + dx^2}$ constante, hanc aequationem:

$$\frac{Pdx - Rdt}{Pdt + Rdx} \times \frac{ddt}{dx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} = \frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx}.$$

Am Rande der dritten Seite von Eulers Brief hat Johann Bernoulli noch notiert: „Ego inveni (servatis iisdem literis, sed nulla posita constante) hanc aequationem:

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{Qddt - Rddy}{Qdt - Rdy},$$

quae congruit cum Euleriana, non vero cum altera. Hoc inde venit, qnia in substitutione valoris suarum literarum ex inadvertentia erratnm est; debet itaque deleri $dxddx$. Posita $\sqrt{dt^2 + dx^2}$ constante invenio

$$\frac{dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} = \frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx}.$$

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

in qua dt ponitur constans. Haec aequatio cum superiori conjuncta lineam brevissimam determinabit.

Hoc igitur ad solutionem problematis sufficere posset, quum autem in casibus particularibus admodum facilis evadat aequatio, nonnullos eosque primarios hic derivabo. Sit superficies proposita cylindrica, cujus axis t; abibit in hoc casu aequatio generalis in hanc

$$Pdx = Qdy.$$

Ex hac substituantur valores loco P et Q in inventa; habebitur

$$\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

seu

$$dxddx + dyddy = 0,$$

quae integrata dat hanc

$$dx^2 + dy^2 = nndt^2,$$

et

$$nt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Sit superficies proposita rotunda, cujus sectiones transversae per planum primarium sint circuli, transmutabitur aequatio generalis in hanc

$$xdx = -ydy + Rdt,$$

ut ergo sit $P = x$ et $Q = -y$, quare altera abibit in hanc

$$\frac{xddy - yddx}{xdy - ydx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

quae etiam integrari potest, resultante

$$l(xdy - ydx) = l\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

seu

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2};$$

ponatur

$$yy + xx = zz \text{ et } \sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du,$$

erit

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}};$$

pro sphaera est

$$zz + tt = bb,$$

ergo

$$du = \frac{bdt}{\sqrt{bb - aa - tt}},$$

ex qua aequatione monstrare possum lineam brevissimam in globo semper esse circulum maximum. Si in aequatione pro solidis rotundis ponatur $a = 0$, erit

$$xdy - ydx = 0, \text{ seu } y = nx,$$

quae etiam meras lineas brevissimas exhibet.

Corpora conoidica mihi denotant solida lineis ex curvae cujusvis singulis punctis ad punctum extra planum curvae fixum ductis, terminata, unde habentur coni consueti, si curva assumta fuerit sectio conica. Hujusmodi solida hanc habent proprietatem, ut sumto initio abscissarum t in vertice coni, aequatio sit inter t, x et y homogenea seu ejusdem ubique dimensionum numeri. Haec aequatio eo reducatur, ut t exprimatur in meris x et y; functio igitur ista x et y, ipsi t aequalis, unius tantum est dimensionis, quae si dividatur per x, evadit nullius dimensionis. Sit ea F, erit

$$\frac{t}{x} = F,$$

differentietur haec aequatio posito

$$dF = Mdx + Ndy,$$

erit

$$\frac{xdt - tdx}{xx} = Mdx + Ndy.$$

Sed propter id, quod F sit functio nullius dimensionis, inveni quod sit

$$Mx + Ny = 0.$$

Aequatio autem illa cum superiori generali

$$Pdx = Qdy + Rdt$$

comparata dat

$$P = Mxx + t \text{ et } Q = -Nxx.$$

Quia autem ex duabus aequationibus

$$Mdx + Ndy = \text{etc.} \quad \text{et } Mx + Ny = 0$$

valores ipsorum M et N erui possunt; erit facta substitutione

$$P = \frac{xydt - xtdy}{ydx - xdy} \quad \text{et} \quad Q = \frac{xxdt - txdx}{ydx - xdy}.$$

His valoribus subrogatis in altera aequatione generali obtinebitur

$$\frac{ydtddy - tdyddy + xdtddx - tdxddx}{ydtdy - tdy^2 + xdtdx - tdx^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2};$$

cujus integratio me diu torsit, tandem vero sic obtinui. Sit

$$dt^2 + dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et

$$tt + xx + yy = zz,$$

eritque

$$\frac{zdtddz + ds^2dt - ds^2dt - tdsdds}{zdzdt - tds^2} = \frac{dds}{ds},$$

et porro habebitur

$$ds = \frac{zdsddz + dz^2ds - zdzdds}{ds^2},$$

quae integrata dat

$$s = \frac{zdz}{ds} \quad \text{seu } ss = zz + C, \text{ unde}$$

$$s = \sqrt{tt + xx + yy + C},$$

atque ex hac proprietate in quovis casu applicatio facile absolvitur.[1])

Aequationes generales pro cylindris et conis ad ducendam lineam brevissimam etiam alio modo obtinui, ex eo quod superficies eorum in planos transmutari possunt, unde quidem facilius obtinentur. Ei tamen exposita methodus praeferri debet ob generalitatem.

Plura non scribo, nisi quod Cl. filius Tuus omnesque quos hic nosti valeant. Vale igitur favere perge

Vir Celeberime et Excellentissime

Obstrictissimo servo tuo

Petropoli ad d. 18 Februarii A. 1729. L. Eulero.

Aufschrift:

A Monsieur
Monsieur Jean Bernoulli
Très celebre Professeur des Mathematiques
à
Bâle.

5.

Bernoulli an Euler 18. April 1729.

Antwort auf Eulers zwei Briefe vom 10. Dezember 1728 und 18. Februar 1729. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 5—10.

Inhalt. Die Logarithmen negativer Größen. — Integration zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Die Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche.

Clarissimo ac Doctissimo Viro Leonhardo Eulero S. P. D.
Joh. Bernoulli.

Debeo responsum ad binas litteras quas a te accepi; ad priores, quibus significabas me acceptum 50 Rubelos a filio meo transmissos, quos Rev. tnus pater octiduo post rite persolvit, partim jam respondi in litteris meis ad filium datis, ubi ei ostendi dubia vestra (nam et ipse similes formavit difficultates circa logarithmos imaginarios) inde tantum oriri, quod conceptus quem habuistis de logarithmis quantitatum negativarum cum rei natura non satis bene congruebat, dixique si statuatur (& recte quidem)

$$lx = l - x,$$

1) Über den vorangehenden Inhalt des Briefes vgl. die Abhandlung von Euler, *De linea brevissima in superficie quacumque duo quolibet puncta jungente;* Comment. acad. sc. Petrop. 3, S. 110—120, sowie Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, S. 19—24.

intelligendum esse

$$l-(x)$$[1],

non vero

$$l(-x),$$

vos autem utrnmque confudisse, etiamsi magna sit inter ntrumque differentia, sic. e. gr.

$$l-(x)^{\frac{1}{2}}$$

est reale qnid, sed

$$l(-x^{\frac{1}{2}})$$

imaginarium. Hoc bene observato, cessant omnes vestrae difficultates & monstrosae inde deductae consequentiae. Quod attinet ad scrupulum quem porro moves desumtum ex area sectoris circularis per logarithmum expressa, ubi posito sinu $= y$ & cosinu $= x$ invenitur per methodnm meam quadratnram circuli ad logarithmum reducendi, area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}},$$

de eo pariter jam monui filium meum in casu quo

$$x=0,$$

hanc aream revera exhiberi tanquam $= 0$, quamvis deberet esse $=$ quadranti; hinc autem nihil alind concludi debere, quam quod expressio ista

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

augeri debeat quantitate constante nQ, seu multiplo quadrantis, quod vel ideo patet, quia sinus & cosinus inter se convertuntur, atqne non nno tantum modo sed infinitis modis fieri potest ut sit

$$x=0 \;\&\; y=1,$$

vel vice versa

$$x=1 \;\&\; y=0;$$

nam hoc fit assumto sectore $=$ vel $1Q$, vel $2Q$, vel $3Q$, etc. vel etiam quando vis $= 0Q$, adeoque nulla ratio est cur

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

---

1) Was Johann Bernoulli mit $l-(x)$ meint, hat er weder hier noch, so viel ich weiß, an irgend einer anderen Stelle auseinandergesetzt, aber aus dem folgenden Inhalt des Briefes geht hervor, daß er, vorausgesetzt daß seine Auseinandersetzungen überhaupt irgend einen Sinn haben, nnter $l-(x)$ den reellen Teil von log $(-x)$ verstehen mnß. Anch die Bemerkung von Johann Bernoulli: „hujusmodi expressiones imaginariae nsum potius habent, si in series expendantur, in quibus quippe termini imaginarij se destrunnt" deutet darauf hin, denn was nach der Entwickelung zurückbleibt, ist natürlich gerade der reelle Teil.

unum potius exprimat quam alterum; malo itaque dicere quod area sectoris statuenda sit generaliter

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} + nQ,$$

adeo ut quotiescunque pars prior in nihilum abit, id, quod deest, suppleri possit per nQ, hoc est, per multiplum, submultiplumve quadrantis, prout necessitas id exigit; semper enim invenies differentiando sectoris tui differentiale[1]) quod est

---

1) Die vorangehenden Bemerkungen von Johann Bernoulli scheinen nicht genau durchgedacht zu sein. Was er mit dem Passus „quia sinus et cosinus inter se convertuntur" meint, ist nicht klar, denn der Wert von $\log \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ wird natürlich nicht unverändert, wenn man x statt y und y statt x setzt, und für $x=0$, $y=1$, kann die Fläche des entsprechenden Sektors nicht $0Q$ oder $2Q$ sein. Ferner hat Bernoulli hier die bestimmte Integration (denn es handelt sich ja um eine solche) mit der unbestimmten verwechselt. Sein Ausdruck

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} + nQ$$

muß darum modifiziert werden, und zwar kann man den richtigen Ausdruck auf folgende Weise herleiten. Setzt man in dem Ausdrucke

$$\log \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

$x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$, so wird daraus

$$\log \frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{\cos\vartheta - i\sin\vartheta} = \log \frac{e^{i\vartheta}}{e^{-\vartheta i}} = \log e^{2\vartheta i} = (2\vartheta + 2k\pi)i;$$

der reelle Teil des Ausdruckes ist also $=0$, d. h.

$$l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} = 0.$$

Aber der vollständige Wert von

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

ist

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}}(2\vartheta + 2k\pi)i = \frac{a^2}{2}(\vartheta + k\pi)$$

und für $x=0$, $y=1$, wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so daß, wenn man mit Johann Bernoulli $Q = \frac{a^2\pi}{4}$ setzt, in diesem Falle

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} = \frac{a^2}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} + (2k+1)Q.$$

Der von Johann Bernoulli angegebene Ausdruck ist also richtig, wenn n eine ungerade ganze Zahl bedeutet.

$$\frac{aadx}{2\sqrt{aa-xx}},$$

sicuti decet. In casu semiquadrantis, ubi

$$x = y = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

habebis etiam partem priorem = 0, aut si mavis

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1},$$

quocirca adjiciendnm $\frac{1}{2}Q$ [1]); sed hujusmodi expressiones imaginariae usum potius habent, si in series expendantur in quibus quippe termini imaginarij se destruunt. De his satis.

Probum erit intelligere methodum, quam tibi inventam dicis ejusque communicationem promittis, reducendi hujusmodi aequationes differentio-differentiales

$$yyddy = xdx^2,$$

existente

$$ddx = 0,$$

ad differentiales primi gradus, interim non satis capio mentem tuam de duobus aliis generibus differentio-differentialium pluribus quam duobus terminis constantibus; imprimis non video quomodo quadret exemplum

$$ddx = x^n\, Ydx^{m-n}\, dy^{2-m} + x^p\, \mathfrak{Y} dx^{q-p}\, dy^{2-q} \text{ etc.}$$

ad eas, quas innuis, aequationes, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem dimensionum numerum obtinet; unius autem dimensionis tam x quam dx & ddx dicis te ponere, cum tamen in exemplo, quod proponis, neque x, neque dx, neque ddx unius sit dimensionis nec etiam eundem dimensionum numerum obtineat. Cave autem ne in his asystata vel incompatibilia comparare inter se suscipere velis, nam e. gr. comparare velle ddx cum Ydx vel cum Ydx^3 aeque absurdum est quam velle lineam invenire aequalem superficiei, sed ddx comparabile est cum Ydx^2. Ut verbo dicam comparabilia sunt tantum illa differentialia in quibus littera d ubique aequaliter reperitur, cujuscumque gradus sint differentialia, sic e. gr. ddx cum Ydx^2 vel Ydy^2 vel $Ydxdy$ vel $Y\frac{dy^3}{dx}$; et d^3x cum Ydx^3, vel Ydx^2dy, vel $Ydxddx$, vel $Y\frac{d^4x}{dy}$; atque ita in aliis. Hinc itaque primus terminus tui exempli generaliter loquendo est incomparabilis cum ddx, nam ut cum ddx subsistere possit

$$x^n\, Ydx^{m-n}dy^{2-m},$$

1) Aus der Anmerkung auf Seite 360 ist ersichtlich, daß man hier

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (2k + \tfrac{1}{2})\, Q$$

zu setzen hat.



oportet supponere

$$m - n + (2 - m) = 2,$$

sed cum sit $= 2 - n$, vides nullam posse fieri comparationem inter ddx & hunc terminum nisi in casu quo $n = 0$; idem etiam de altero termino dicendum, quare haec attentiori curae tuae commendo, ne possibilia velis facere quae sua natura sunt impossibilia.

Venio nunc ad litteras tuas novissimas. Solutio tua problematis de ducenda linea brevissima in superficie data videtur bona. Quod ad meam[1]) attinet, ea consistit in hac aequatione

$$\frac{Tddy}{Tdzdy - zds^2} = \frac{ddz}{ds^2 + dz^2},$$

ubi notandum per x, y, z me intelligere tres coordinatas, quae tibi sunt t, x, y: item T esse subtangentem curvae illius datae, quae fit in superficie data, quando secatur per planum subjecto plano perpendiculare & ipsis y parallelum; porro per ds (quod constans suppono) intelligo elementum curvae projectae seu

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Possum etiam naturam curvae quaesitae exprimere hac aequatione

$$\frac{\Theta ddx - Tddy}{\Theta dx - Tdy} = \frac{dzddz}{ds^2 + dz^2},$$

quae aliquando commodior est, ubi litterae x, y, z, T idem mihi significant quod ante, & praeterea Θ est subtangens alterius curvae datae quae fit secando superficiem per planum priori coordinatum, h. e. ipsis x parallelum. Es his aequationibus facile omnes casus particulares, quos solutos das, deducuntur. Non unum tantum solvendi fundamentum habeo; quantum conjicio, tuus solvendi modus nititur natura minimi, quo etiam agnatus[2]) meus feliciter usus est, & problema legitime solvit, sed hic solvendi modus non satis est generalis, ad alia quippe hujusmodi problemata sese non extendens, quale esset e. gr. hoc: Ducere in data superficie lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum osculans datam habeat inclinationem ad planum tangens superficiem datam in eodem puncto. Voco autem planum osculans, quod transit per tria curvae quaesitae puncta infinite sibi invicem propinqua. Patet hoc problema includere prius, nam si angulus inclinationis est rectus, erit quilibet arcus curvae quaesitae minimus inter duo puncta sua extrema. Poteris ergo etiam vadum tentare pro hoc problemate ita generaliter concepto, ego illud pariter reduxi ad aequationem

1) Vgl. den Aufsatz von Johann Bernoulli in seinen *Opera omnia* T. IV, S. 108–128.

2) Wahrscheinlich der Neffe von Johann Bernoulli, Nikolaus I Bernoulli, der damals Professor der Logik an der Universität in Basel war.

differentio-differentialem. Caeterum in applicatione quam facis aequationis tuae ad superficiem cylindricam, qui tamen casus est omnium facillimus, posset dubium moveri, utrum liceat in aequatione ad quam pervenis

$$\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

supponere

$$dxddx + dyddy = 0,$$

cum hoc nihil aliud sit quam communis divisor utriusque membri; ideoque mallem ego citra hanc suppositionem immediate integrare utrumque membrum per logarithmos, nempe sic: Assumto logarithmo constante numeri arbitrarii c habebo

$$lc + l(dx^2 + dy^2) = l(dt^2 + dx^2 + dy^2),$$

ideoque

$$cdx^2 + cdy^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2.$$

Hinc

$$\overline{c-1} \times \overline{dx^2 + dy^2} = dt^2,$$

vel

$$\frac{1}{\sqrt{c-1}}\, dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{c-1}}\, t = \int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

prorsus ut tu invenisti. Quod enim tibi est n, id hic est $\frac{1}{\sqrt{c-1}}$. Si superficies proposita sit conoidea, cujus sectiones transversae per planum primarium sint circuli, habeo praeter methodum generalem aliam particularem pro hoc casu, quae immediate deducit ad aequationem differentialem primi gradus, ubi indeterminatae non sunt permixtae, & quae suppeditat constructionem, quam olim frater meus dedit,[1]) nescio ex quo fundamento erutam, quod quia non exhibuit, incertum est an sit legitimum, nam observavi posse perveniri etiam ad eandem illam constructionem per viam aliquam quae est paralogistica. Interim quod attinet ad tuam pro hoc casu aequationem

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

non video, quomodo (positis $yy + xx = zz$ & $\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du$) inde sequatur

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}},$$

1) Siehe Jakob Bernoulli, *Solutio sex problematum fraternorum, in Ephem. Gall. 26. Aug. 1697 propositorum;* Acta Eruditorum 1697, S. 226—230: „Probl. I. In superficie dati conoidis vel sphaeroidis, ex. gr. parabolici, inter duo data puncta geometrice describere lineam omnium in illa superficie sic ductarum brevissimam."

multo minus, quomodo haec aliquid conferat ad constructionem curvae quaesitae, si quidem du est elementum ipsius curvae & dt, dz elementa diversarum indeterminatarum. Mea vero, quam habeo aequatio, in qua indeterminatae sunt separatae, expedit more solito constructionem per quadraturas, cujus ope in casu particularissimo globi statim videre est, lineam brevissimam in superficie sphaerica esse circulum maximum. Porro si in aequatione pro solidis rotundis (quorum scilicet axis est perpendicularis ad basin, nam si est obliquus, res est altioris indaginis, quam non facile ad differentias primas reduces), ponatur $a = 0$, ita ut sit

$$xdy - ydx = 0,$$

seu $y = nx$, haud dubie dat meras (ut dicis) etiam lineas brevissimas, sed omnes nonnisi unam eandemque efficiunt, nempe eam ex cujus revolutione generatur solidum rotundum. Eas vocat frater meus in suo schediasmate *meridianos;* circulos vero, quos singula puncta in revolutione describunt — *parallelos;* corpora *conica*, quae tu non satis apte *conoidica* vocas, sunt utique omnia illa quae generantur ex circumductu lineae rectae circa curvam aliquam datam in aliquo plano & perpetuo transeuntis per punctum (quod vertex conici corporis vocatur) extra planum existens.

Quae hic habes de ducenda linea brevissima in superficiebus horum corporum conicorum sunt intricata & obscura; putat agnatus meus, cui epistolam tuam legendam tradidi, in iis aliquem paralogismum latitare. Quidquid vero sit, problema pro hujusmodi superficiebus non minus quam pro simplicibus conis & cylindroidibus facillimam admittit solutionem, ita ut non egeat tam operoso quod suscipis molimine; possunt enim eae omnes superficies transmutari in planas, ut tu ipse nunc etiam probe animadvertisti, postquam idem ego jam diu insinuavi, vid. Act. Lips. a. 1698 p. 469,[1]) ac revera hic casus nihil aliud est quam corollarium unius ex solutionibus meis generalibus, nam plures habeo.

Quod superest vale & omnes amicos meos verbis saluta.

Dab. Bas. a. d. 18 Apr. 1729.

P. S. Tenta num possis problema de ducenda linea brevissima reducere ad aequationem differentialem primi gradus in superficie aliqua quae non sit vel cylindroidica vel conoidica sed alia aliqua.[2])

1) Es handelt sich hier um einige Zeilen im Aufsatze von Johann Bernoulli, *Annotata in solutiones fraternas problematum quorundam suorum, editas proximo Actorum Maio;* Acta Eruditorum 1698, S. 466—474.

2) Diesem Wunsche von Johann Bernoulli hat Euler am Ende seiner schon zitierten Abhandlung in dem Comment. acad. sc. Petrop. 3 („ad annum 1728") Genüge geleistet. Die Abhandlung war also im April 1729 noch nicht fertig (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, S. 23).

6.

Euler an Bernoulli 16. Mai 1729.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 18. April 1729. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Einige Zeilen veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 21, und in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 23—24.

Inhalt. Die Logarithmen negativer Größen. — Drei Arten von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die integriert werden können. — Die kürzeste Linie auf einer Oberfläche; noch einmal ausführliche Behandlung des Falles, wo die Oberfläche konisch ist.

Viro Celeberrimo Joh. Bernoulli S. P. D.
Leonh. Euler.

Acceptis heri Festo Ascensionis Christi Tuis literis statim ad eas respondendum duxi, etsi magis deceret paulisper differe responsionem, propter literarum tuarum res tam arduas talesque ut tempore opus sit non parvo, debito modo ad eas respondendum. Tamen, cum animus sit crastina die hinc proficisci, et mensem circiter rure degere cum Cl. Filio Tuo aliisque amicis, nimis longum mihi videbatur differendae responsionis tempus. Quamobrem hoc quidem tempore respondeo quae iri promtu sunt; quae majore industria opus habent temporisque plus requirunt, rure reversus perscribam.

Quod primo scribis de logarithmis imaginariis, id mihi nondum satis est perspicuum, praecipue discrimen, quod ponis inter $l-(x)$ et $l(-x)$ nondum percipere possum, neque quo calculo ductum ad unum potius horum logarithmorum, quam ad alterum pervenire oporteat. Praeterea expressio sectoris circularis $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ debita constante jam mihi videtur esse aucta, cum facto $x=0$ exhibeat sectorem evanescentem. Deinde si modo, nQ adjici deberet, id quod vero nondum perspicio, n mihi praeter multiplum quaternarii nihil aliud denotare posse videtur, cum demum post quatuor quadrantes percursos una revolutio absolvatur. Sin vero n, $\frac{1}{2}$ esse potest, poterit quoque $\frac{1}{4}$ et omnes numeros significare, unde superfluum est etiam $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ adhibere, ad sectorem exprimendum, cum solum nQ sufficiat ad sectorem quemvis repraesentandum[1]). Quicquid autem sit, res ita mihi se habere videtur, ut neque Tu ex tuo conceptu, neque nos nostro hac in re in paralogismum incursuri simus.

---

1) Vgl. über diese Bemerkungen von Euler die Anmerkungen S. 360 und 361. Merkwürdigerweise hat Johann Bernoulli in seiner Antwort die kritischen Bemerkungen von Euler gar nicht beantwortet.

Aequationum differentio-differentialium utique tria genera ad differentiales primi gradus reducere possum quorum primum comprehendit omnes aequationes duobus terminis constantes, cujusmodi est

$$y^m ddy = x^n dx^p dy^{2-p},$$

quae est homogenea[1]).

Alterum genus est aequationum, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem habet dimensionum numerum ut

$$ddx = Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m} - \mathfrak{Y}x^n dx^{1-n} dy^{1+n} \text{ etc.}$$

quae itidem est homogenea, et in singulis terminis x unius habet dimensionis[2]). Sic se habet aequatio in schediasmate meo praelecto coram conventu, et quoniam id non amplius in manibus erat, cum postremas mandarem literas, fieri potuit ut in perscriptione harum aequationum falsus sim.

Tertium genus complectitur aequationes simili modo homogeneas, quo Tu aequationes differentiales 1[mi] gradus tales vocare soles, ut[3])

$$ax^m y^n dx^p dy^q ddy + bx^r y^{m+n-r} dx^s dy^{p+q-s} ddy \text{ etc.}$$
$$= cx^t y^{m+n-1-t} dx^v dy^{p+q+2-v} \text{ etc.}$$

Has aequationes sic reduco, ut eas in alias transmutem, in quibus alterutra indeterminata finitae quantitatis nusquam reperitur, quae ergo facto $dy = pdx$, posito dx const., ad differentiales primi gradus reducuntur. Totum meum artificium unici casus reductione illustrasse sufficiat. Sit reducenda haec aequatio:

$$y^m ddy = x^n dx^p dy^{2-p},$$

ubi $ddx = 0$, pono

$$x = c^v \text{ et } y = c^{\frac{n+p}{m+p-1} v} t,$$

posito c numero cujus log. $= 1$, erit, posito brevitatis gr. $\frac{n+p}{m+p-1} = \alpha$,

$$dy = c^{\alpha v} dt + \alpha c^{\alpha v} t dv$$

et

$$dx = c^v dv$$

et

$$ddx = c^v ddv + c^v dv^2 = 0,$$

ergo

$$ddv = -dv^2,$$

1) Vgl. über diese Gleichung S. 128—130 der schon zitierten Abhandlung *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus*.

2) Vgl. über diese Gleichung S. 134—136 der soeben zitierten Abhandlung, wo Euler $m - h$ statt n eingeführt hat.

3) Nur einen sehr speziellen Fall dieser Gleichung hat Euler in seiner Abhandlung (S. 130—134) behandelt.

ergo

$$ddy = c^{\alpha v}(ddt + 2\alpha dtdv + (\alpha\alpha - \alpha)\, tdv^2).$$

Quibus valoribus substitutis habebitur

$$c^{\overline{m+1}.\alpha v}(t^m ddt + 2\alpha t^m dtdv + (\alpha\alpha - \alpha)\, t^{m+1} dv^2)$$
$$= c^{(n+p+2\alpha-p\alpha)v} dv^p (dt + \alpha tdv)^{2-p}.$$

Quia vero est

$$\alpha = \frac{n+p}{m+p-1},$$

erit

$$\overline{m+1}\,.\,\alpha = n + p + 2\alpha - p\alpha.$$

Unde diviso per $c^{\overline{m+1}.\alpha v}$ restabit haec aequatio

$$t^m ddt + 2\alpha t^m dtdv - (\alpha\alpha - \alpha)\, t^{m+1} dv^2 = dv^p (dt + \alpha tdv)^{2-p}.$$

Fiat porro $dv = zdt$, erit

$$ddv = zddt + dzdt = -dv^2 = -zzdt^2,$$

ergo

$$ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}.$$

Ex quo fit

$$-t^m z dt^2 - \frac{t^m dzdt}{z} + 2\alpha t^m zdt^2 + (\alpha\alpha - \alpha)\, t^{m+1} zzdt^2$$
$$= z^p dt^2 (1 + \alpha tz)^{2-p}$$

seu

$$z^{p+1}(1 + \alpha tz)^{2-p} dt = (\alpha\alpha - \alpha) t^{m+1} z^3 dt + (2\alpha - 1) t^m zzdt - t^m dz.$$

Quae aequatio, quia est differentialis primi gradus, si construi posset, etiam proposita

$$y^m ddy = x^n dx^p dy^{2-p}$$

construi posset. Hujus aequationis est casus specialis $yyddy = xdx^2$, quae reducta abit in hanc (ob $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$ et inde $\alpha = 1$)

$$z^3 dt = ttzz\,dt - tt\,dz.^{1)}$$

Ex hisce facile erit concludere, quomodo altera duo genera pertractem.

Aequatio Tua pro linea brevissima generalis egregie cum mea convenit, in eam enim transmutatur expressa litera T ex aequatione mea assumta

$$Pdx = Qdy + Rdt.$$

1) Hier hat Johann Bernoulli notiert: „Inventa relatione inter z et t, sumendum est $x = c^{\int z\,dt}$, et $y = c^{\int zdt}t$; caeterum ad hanc aequationem facilius pervenio methodo dudum mihi usitata ut in adjecta scheda apparet." Diese „scheda" ist nicht aufbewahrt, wahrscheinlich ist ihr Inhalt für den Aufsatz in dem 4. Bande (S. 79—80) der *Opera omnia* von Johann Bernoulli benutzt worden.

Aequationem meam quidem ex natura minimi deduxi, sed aliis quibusdam modis ad eandem perveni aequationem. Problema, quod hac occasione proponis, nunc cogitationes meas occupabit, et si quid invenero proxime recensebo.

Aequationem

$$\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

eodem, quo doces, modo, in dissertatione mea reduxi, sed cum viderem divisione per $dxddx + dyddy$ idem resultare, eam ob brevitatem adhibui. Ex aequatione

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

non eo hanc

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}}$$

derivo, quo faciliorem constructu eam arbitror, sed ea commodius ad casus speciales accommodatur. Modus autem ejus eruendae ex illa, factis

$$xx + yy = zz$$

et

$$\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du,$$

hic est. Ob

$$xx + yy = zz,$$

est

$$xdx + ydy = zdz$$

ergo

$$xxdx^2 + 2\,yxdxdy + yydy^2 = zzdz^2.$$

Altera aequatio dat

$$du^2 - dt^2 = dx^2 + dy^2,$$

unde

$$zzdu^2 - zzdt^2 = xxdx^2 + yydx^2 + xxdy^2 + yydy^2,$$

a qua si illa auferatur restabit

$$xxdy^2 - 2yxdydx + yydx^2 = zzdu^2 - zzdt^2 - zzdz^2$$
$$= (xdy - ydx)^2 = aadu^2,$$

ergo

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}}.$$

Caeterum methodus mihi quoque est lineae brevissimae in superficiebus conoideis per quadraturas construendae. Aequatio mea canonica pro superficiebus conoideis haec est

$$xx + yy = T,$$

ubi T denotat functionem quamcunque ipsius t. Posito ergo

$$xx + yy = zz,$$

erit

$$T = zz,$$

ergo t aequalis erit functioni cuidam ipsius z, quam pono $\int Zdz$.

Sit jam (Fig. 1) BMC planum ad axem solidi perpendiculare et A vertex, sit porro BMC projectio lineae brevissimae in qua sit $AP = x$, $PM = y$, erit $AM = z$. Sit elementum curvae hujus

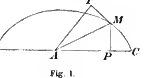


Fig. 1.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds = \sqrt{du^2 - dt^2},$$

unde

$$du = \sqrt{dt^2 + ds^2} = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}},$$

seu $\quad (zz - aa)\,ds^2 = aadt^2 + zzdz^2 = aaZZdz^2 + zzdz^2,$

ob $dt = Zdz$. Ergo

$$ds = dz\sqrt{\frac{aaZZ + zz}{zz - aa}}.$$

Demittatur ex A in tangentem MT perpendiculum $AT = p$, erit

$$ds = \frac{zdz}{\sqrt{zz - pp}} = \frac{dz\sqrt{aaZZ + zz}}{\sqrt{zz - aa}}.$$

Consequenter

$$aazzZZ - aappZZ = ppzz - aazz,$$

seu

$$p = az\sqrt{\frac{ZZ + 1}{aaZZ + zz}}.$$

Ex qua aequatione curva facile construitur.

Quod ad corpora conica attinet,[1]) aequationes pro iis, sumto initio abscissarum in vertice, tales esse debent, ut variabiles t, x, y in singulis terminis eundem dimensionum numerum constituant, uti $tt = xx + yy$. De hoc dubium non est, de novo rem scrutatus sum. Inde ergo eruitur t = functioni cuidam ex x et y compositae unius tantum dimensionis, erit igitur $t:x$ = functioni nullius dimensionis, ut $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$, ubi in numeratore tot sunt dimensiones, quot in denominatore. Haec functio dicatur F, eritque

$$t : x = F,$$

unde

$$\frac{xdt - tdx}{xx} = dF;$$

ponatur

$$dF = Mdx + Ndy,$$

1) Das Folgende stimmt wesentlich mit dem Ende des Briefes vom 18. Februar 1729 überein (siehe oben S. 357—358).

cum F ex x et y componatur. Ex eo vero quod F sit functio nullius dimensionis, fluit esse

$$Mx + Ny = 0,$$

ergo

$$M = -Ny : x;$$

erit autem

$$xdt - tdx = Mxxdx + Nxxdy = Nxxdy - Nxydx,$$

ergo

$$(Nxy - t)dx = Nxxdy - xdt,$$

seu

$$\left(xy - \frac{t}{N}\right)dx = xxdy - \frac{xdt}{N}.$$

Erat autem canonica aequatio

$$Pdx = Qdy + Rdt,$$

quae huc traducta dabit

$$P = xy - \frac{t}{N} \text{ et } Q = xx;$$

est vero

$$N = \frac{xdt - tdx}{xxdy - xydx}.$$

His valoribus in generali aequatione pro linea brevissima, quae est

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

substitutis, habetur[1])

$$\frac{ydtddy - tdyddy + xdtddx - tdxddx}{ydtdy - tdy^2 + xdtdx - tdx^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}.$$

Ponatur

$$tt + xx + yy = zz,$$

ut sit z distantia puncti cujusvis lineae brevissimae a vertice, et

$$\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = ds$$

elementum lineae brevissimae. His substitutis, dat:

$$ds = \frac{zdsddz + dz^2ds - zdzdds}{ds^2},$$

quae integrata dat

$$\frac{zdz}{ds} = s,$$

et porro

$$ss = zz + C = tt + xx + yy + C.$$

Quae aequatio cum ea, quam alia methodo faciliori investigavi, con-

1) An der entsprechenden Stelle in der gedruckten Abhandlung von Euler ist die Gleichung auf Grund eines Versehens unrichtig. Dort ist nämlich (S. 120) das linke Glied:

$$\frac{yxdtddx - tydxddx - txdyddy + xydtddy}{yxdtdx - tydx^2 + txdy^2 - xydtdy}.$$

gruit, neque usquam paralogismum deprehendere potui. Hic ergo hanc epistolam finio, alio tempore uberius hac de re scripturus.

Vale itaque, Vir Celeberrime, mihique favere perge atque Tibi persuade me Tui esse observantissimum.

Petropoli die 16. Maj.
A. 1729.

7.

Euler an Bernoulli 21. Oktober 1729.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. — Tautochrone und isochrone Kurven. — Reihe, deren allgemeines Glied $1 . 2 . 3 . \ldots n$ ist, und das Glied dieser Reihe, das $n = \frac{1}{2}$ entspricht.

Vir Excellentissime Celeberrime.

In ultimis Tuis, quas ad Clar. Filium dedisti, literis mentionem fecisti methodi meae innumerabiles aequationes differentiales secundi ordinis ad primum reducendi, quibus Te quoque, Vir Celeberrime, earumdem reducendarum modo potiri significasti. Hoc ni fallor, exemplum attulisti

$$a x^m d x^p = y^n d y^{p-2} d d y,$$

cui semper aequatio quaedam parabolica satisfacere Tibi observata sit. Hic quidem casus est particularis, nam aequatio differentio-differentialis, ut Tute innuis, multo latius patet. Exponam hic universalem ejus reductionem, ut cum Tuis conferre possis[1]). Pono

$$x = c^{(n+p-1)\int z d t} \text{ et } y = c^{(m+p)\int z d t} t,$$

ubi c denotat numerum cujus logarithmus hyperbolicus est 1. His factis substitutionibus, exponentialia per divisionem tolli poterunt, et si $d x$ ponitur constans, aequatio tantum differentialis emerget, haec

$$a(n+p-1)^p z^p t = t^n (1+(m+p)tz)^{p-2}\left[-\frac{dz}{z} + (2m-n+p+1) z d t + (m+p)(m-n+1) t z^2 d t\right].$$

Quae si construi poterit, etiam aequationis differentio-differentialis constructio in promptu erit. Simili modo reliquas, de quibus scripsi, aequationes reduco.

Habeo praeterea, Vir Celeb. quaedam, quae ad tautochronas spectant, Tibi explicare, quae haud displicitura spero. Incidi nuper in hanc ques-

1) Vgl. S. 128—130 der Eulerschen Abhaudlung *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes primi gradus.*

tionem, quomodo data curva, in qua fit descensus corporis in vacuo tantum, aliam inveniri oporteat ei jungendam, in qua ascensus fiat ut omnes oscillationes absolvantur eodem tempore. Ut data (Fig. 2) curva BA, requiritur altera AC eiusmodi, ut corpus super BAC oscillans integras oscillationes perficiat eodem tempore, utut eae sint inaequales. Hic statim perspicuum est, si altera fuerit semicyclois, et alteram talem fore. Problema hoc Clar. Filio Tuo communicavi simulque cum eo in illo operam collocavi. Solutionem vero et ipse et ego statim post adepti sumus, eamque coram societate proposuimus[1]). Mihi quoque haec meditanti ejus conditionis in mentem venit, ut inquirerem, quibus casibus hae duae curvae sint partes ejusdem curvae continuae. Non difficile quidem erat innumerabiles hujusmodi curvas invenire quae oscillationes reddant isochronas, sed algebraicas curvas eruere minus facile visum erat. Assecutus autem sum[2]) unicam algebraicam quae est quarti ordinis et dictis AP, x; PM, y, hac exprimitur aeqnatione

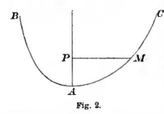


Fig. 2.

$$81\,y^4 \pm 54\,a y^3 - 216\,axyy - 256\,ax^3 + 9\,aayy - 72\,aaxy + 48\,a^2xx - 9\,a^3x = 0,$$

in qua $\frac{1}{2}a$ significat longitudinem penduli isochroni. Hujusmodi ergo curvae, quarum numerus est infinitus, aeque sunt tautochronae atque cyclois, cum oscillationes integrae omnes sint aequalis durationis. Sed hoc differt inter eas et cycloidem, quod in hac etiam dimidiae oscillationes a puncto infimo sumtae sint isochronae, quod ibi locum non habet. Ad usum vero pendulorum omnes debent esse aequaliter idoneae.

In hac questione tali usus sum methodo, quae omnes prorsus casus complectatur, quod non exigui hac in re momenti mihi esse videtur, cum inde simul demonstrationem sim assecutus, praeter cycloidem nullam aliam curvam hoc modo tautochronismum producere posse, id quod ante Cl. Filio Tuo non penitus certum visum est. Non alio autem usus sum principio nisi hoc ut tempus oscillationis debeat esse constans, sive ut in functionem

1) Vergl. die Abhandlungen von Euler: *De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo;* Comment. acad. sc. Petrop. 4, 1729 (gedruckt 1735), S. 49—66; *Quomodo, data quacumque curva, invenire oporteat aliam, quae cum data quodammodo juncta ad tautochronismum producendum sit idonea;* daselbst 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 143—159, und *Solutio singularis casus circa tautochronismum;* daselbst 6, 1732/1733 (gedruckt 1738), S. 28—36.

2) Vgl. S. 63 der soeben zitierten Abhandlung *De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo.*

tempus exprimentem, nulla quantitas quae ab arcu descripto pendet, ingrediatur. Ex quo deinde deduxi, quale debeat esse elementum temporis. Et sane haec methodus hoc utilitatis mihi praestitit, ut etiam tautochronam in medio secundum quadrata velocitatum resistente invenerim.[1])

Sit (Fig. 3) curva AMC talis, ut globus super ea descendens semper aequali tempore ad infimum punctum A perveniat. Hujus sequentem inveni aquationem:[2])

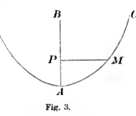


Fig. 3.

$$8m^2 asds + 3(m-n)nfxds = 8(m-n)mafdx,$$

in qua s denotat arcum quemvis AM, x respondentem abscissam AP, a diametrum globi oscillantis, f longitudinem penduli dimidias oscillationes aequali tempore absolventis, et m ad n rationem gravitatum specificarum globi et fluidi. Curva haec CMA ultra A continuatur in AD, quae hanc habet proprietatem, ut omnes ascensus super ea sint isochroni. Ex quo intelligitur omnes oscillationes super curva CAD esse isochronas, dum descensus super CA et ascensus super AD fiant. Hinc ejus quoque problematis, quod in vacuo proposui, solutionem sum nactus. Infinitos nimirum casus binarum curvarum jungendarum dare possum, super quibus oscillationes fiant isochronae. In aliis quidem medii resistentes hypothesibus methodo mea idem nondum assequi potui; cujus rei ratio est, quod ibi mobilis velocitas finite exprimi non possit, quemadmodum, si resistentia quadrato velocitatis proportionalis est, fieri potest.

Unicum adhuc, Vir Excellentissime, quod ad progressiones attinet nunciandum restat. Agitata est a Clar. GOLDBACHIO in literis ad Clar. Filium Tuum datis[3]) haec progressio

1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4. etc. seu 1, 2, 6, 24, 120 etc.,

cujus ut termini medii determinarentur, requirebat. Variis quidem modis et ipse et Filius Tuus iis proximos dederunt. Verum tautochronis

1) Siehe die Abhandlung von EULER, *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum;* Comment. acad. sc. Petrop. 4, 1729, S. 67—89.

2) Vgl. S. 77 der soeben zitierten Abhandlung *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum.*

3) Die Frage wurde zum ersten Mal gestellt in einem Briefe von CHR. GOLDBACH an DANIEL BERNOULLI vom 18. November 1728 (siehe FUSS, a. a. O. II, S. 273). Vgl. noch über diese Frage FUSS, a. a. O. II, S. 278, 283, 285, 325, 328.

quaerendis in modum lucidi eosdem accurate inveniendi.[1]) Terminum enim ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse demonstrare possum lateri quadrati circulo aequalis cujus diameter = 1. Hujus sesquialterum dat terminum ordine $1\frac{1}{2}$, unde reliqui exponentium $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ etc. invenientur.

Haec igitur sunt, Vir Celeberrime, quae hoc tempore judicio Tuo submittere volui, quae si placuerint accuratius sum expositurus.

Vale et favere perge, Vir Excellentissime Celeberrime,

Dabam Petropoli d. 21. Octobr.

A. C. 1729. Tibi Obstrictissimo Eulero.

Aufschrift:

A Monsieur
Monsieur Jean Bernoulli
Très Celebre Professeur des Mathematiques
à
Bâle.

8.

Bernoulli an Euler 17. Dezember 1729.

Antwort auf Eulers zwei Briefe vom 18. Mai und 21. Oktober 1729. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 10—15.

Inhalt. Integration zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Bemerkung über eine dritte von Euler erwähnte Gleichung zweiter Ordnung. — Tautochrone und isochrone Kurven. — Über die Reihe, deren allgemeines Glied $1.2.3....n$ ist.

Viro Cel. Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Egregia sunt quae habuisti in binis litteris ad me postremo datis; cum autem novissimas ante paucos demum dies acceperim, brevis ero in mea responsione, atque communicabo vicissim quae ea occasione inveni, etsi breve admodum meditandi spatium concessum fuerit. Quod attinet ad reductionem hujus aequationis differentio-differentialis[2])

$$y^m ddy = q x^n dx^p dy^{2-p},$$

eam tum temporis cum acciperem anteriores tuas litteras, ita obtinui: Posui statim $y = tx^a$, ut et valores ex hac suppositione prodeuntes ipsarum dy et ddy (supposito $ddx = 0$) substitui in aequatione proposita. In aequatione transmutata posui porro $dx = xzdt$, ita ut inde emergat

1) Vgl. die Abhandlung von Euler, *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt;* Comment. acad. sc. Petrop. 5. 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 36—57.

2) Vgl. den Aufsatz von Johann Bernoulli „Reductio aequationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ ad aequationem differentialem primi gradus, ubi supponitur $ddx = 0$" in seinen *Opera omnia* T. IV, S. 79—80.

aequatio continens nullum dx, sed quae constet tribus indeterminatis x, t & z, quare ut eliminetur x, ponendae sunt (te quoque ita observante) exponentes ejus dimensionum ubique aequales, & hoc modo invenitur conditio ipsius a, uempe

$$a = \frac{n+p}{m+p-1};$$

sequestratis itaque x ex singulis terminis, superest aequatio duabus tantum indeterminatis t et z constans, quae erit tantum primi gradus. Curva ergo ei conveniens, si qua arte construi potest, dabit coordinatas z et t, ex quibus habentur valores ipsarum x et y, nimirum

$$x = c^{\int z dt}, \text{ et } y = tc^{\frac{n+p}{m+p-1}\int z dt},$$

ubi etiam c est numerus cujus logarithmus $= 1$. Fortassis non absimili modo invenisti tuum x et y, quando sumere jubes

$$x = c^{(n+p-1)\int z dt}, \text{ et } y = c^{(m+p)\int z dt}\, t.$$

Vides tunc rem peractam per substitutiones mihi primo dudum usitatas. In casibus quibusdam particularibus possunt separari z et t, sed non sine aliqua dexteritate. Sic pro hoc exemplo, quod satis memorabile est[1])

$$xxddy = qydx^2,$$

invenio aequationem finitam hanc

$$y = bx^{(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}})} + cx^{(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}})},$$

ubi b et c sunt coefficientes arbitrarii, quae omnino fit algebraica, si $\sqrt{q + \frac{1}{4}}$ est rationale. Caeterum aequatio parabolica quae semper satisfacit, haec est

$$(n - m + 1)\, y^{m+p-1} = (q(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p)\, x^{n+p}.$$

Licet autem illa non omnes possibiles curvas complectatur, ideo tamen nou est contemnenda, quia saltem solvit aequationem propositam et quidem semper per aequationem finitam[2]), etiam iis in casibus ubi in formula

1) Mit dieser Gleichung hatte sich Johann Bernoulli schon 1716 heschäftigt, wie aus seinem Briefe an Leibniz vom 20. Mai 1716 hervorgeht; eine weit allgemeinere Gleichung derselben Art hatte er nach eigener Angabe schon vor 1700 integriert (vgl. Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—60). Es ist aber zu bemerken, daß für die im Texte angegebene Gleichung

$$n = -2,\; p = 2,\; m = -1,$$

so daß

$$\frac{n+p}{m+p-1} = \frac{0}{0};$$

die von Johann Bernoulli angegebene Methode ist also in diesem Falle nicht anwendbar. Vgl. hierüher Johann Bernoulli, *Opera omnia* T. IV, S. 81—83.

2) Auch hier ist zu bemerken, daß die fragliche Gleichung für den von Johann Bernoulli behandelten Spezialfall die Form $0 = 0$ annimmt.

generali indeterminatae t et z videntur inseparabiles, adeo ut pro constructione parum utilitatis allatum sit, rem rednxisse ad differentias primas.

Non satis intelligo in penultimis tuis literis, quam requirant conditionem duo altera genera aequationum, in quorum prioris generis aequationibus vis ut alterutra indeterminata in singulis terminis eundem habeat dimensionum numerum, cujus exemplum quod affers, hoc est

$$ddx = Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m} + \mathfrak{Y} x^n dx^{1-n} dy^{1+n} \,\&c,$$

quam dicis *itidem esse homogeneam & in singulis terminis x unam habere dimensionem*, cum tamen utrobiqne x nec unam nec eandem habeat dimensionem; tertii generis exemplnm, qnod mentem tuam illustrare deberet, simili laborat obscuritate, praeterquam quod exponentes differentialium ita se habeant & reddant qnantitates heterogeneas & ideo incomparabiles; oportet itaque ut te explices clarius, si ea de re judicare debeam.

Speculationes tuae de tautochronis mirifice quidem placent, sed illud qnod proponis inveniendum, *data scilicet qualicumque curva, invenire aliam ei jungendam, per quam utramque oscillationes integrae sint isochronae in vacuo,* non admodum difficile est, nam statim ac legi e vestigio solvi adeoque non mirum est, si idem & Tu & filins meus solvistis. Tota res hnc redit ut (Fig. 4) ad axem AG verticalem curvae datae ABH constituatur arcus cycloidalis AEF, verticem habens in A, et postmodum qnaeritur alia curva ACL, ejus naturae, nt ducta quavis horizontali EC, secante curvas & axem in punctis E, B, C & P, arcns compositus BAC sit semper aequalis arcui cycloidico EA, ab eadem horizontali EC resecto vel sit ejusdem multiplex qualiscumque. Ducta enim proxima parallela ec, erit $Bb + Cc = Ee$ vel $n \times Ee$; concipiuntur jam duo mobilia cadere ex eodem horizonte FL, unnm incipiens ab F, alterum ab H, habebunt illa in punctis E, B & C velocitatem aequalem, quae est $\sqrt{GP}$; erit igitur

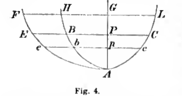


Fig. 4.

$$\frac{Bb + Cc}{\sqrt{GP}} = \frac{Ee}{\sqrt{GP}}, \text{ vel} = \frac{n \times Ee}{\sqrt{GP}},$$

unde tempuscula duo per Bb & per Cc simul sumta sunt $=$ tempuscula per Ee vel hujus multiplo, ideoque tempns per arcum compositum BAC $=$ tempori per arcum cycloid. EA vel $=$ hnjns temporis multiplo; quandoquidem igitur tempora per singulos arcus cycloidales EA sunt aequalia, erunt etiam tempora per singulos arcus combinatos BAC aequalia h. e. oscillationes integrae (descensu et ascensu simul peragendo) sunt iso-

chronae etiamsi tempus per descensum sit inaequale tempori per ascensum. Quod nunc attinet ad modum id praestandi, ut duo arcus BA & AC faciant arcus unius ejusdemque curvae continuae BAC, & ut quaeratur talis BAC quae sit algebraica, de quo ita loqueris, quasi Tu solus id praestiteris, ita ut nesciam annon in solutione harum duarum posteriorum conditionum habueris etiam socium filium meum aeque ac in priori, cujus solutionem ipsi non minus quam Tibi adscribis. Etenim hisce quoque conditionibus satisfacere haud adeo difficile deprehendes, ubi ante omnia hoc dico, in inquisitione hujus non opus esse ea quam innuis cautela, *ut nimirum in functionem tempus exprimentem nulla quantitas, quae ab arcu descripto pendet, ingrediatur.* Quin imo ego contrarium facio, dum curvam BAC determinaturus, assumo pro longitudine arcus AB vel AC, aliquam functionem convenientem solius arcus cycloidalis AE, quae functio id praestet, ut arcus illi duo AB et AC inde mutuo continuentur ex suppositione arcus AE negative sumti; sic post superiorem meam solutionem tempus non amplius in considerationem venit; ecce ergo meam methodum. Sit arcus cycloidis $AE = s$, fiatque ad lubitum aliqua ejus functio $= S$, quae componatur ex meris potentiis ipsius s dimensionum parium. Quo facto ponatur arcus $AC = s + S$, erit utique idem ille continuatus in partem oppositam seu negative sumtus $AB = -s + S$, adeoquo arcus ipse absolute seu affirmative sumtus $AB = s - S$. Hinc $AC + AB$ seu curva tota continua $CAB = 2s = 2AE$. Ergo curva CAB vel BAC erit isochrona. Q. E. I.

Restat ut modum ostendam naturam curvae exprimendi per aequationem inter coordinatas AP & PC, seu inter x et y ex assumta functione S, quod non est arduum. Differentietur S, voceturque $dS = Tds$; sit diameter circuli generatoris cycloidis $AEF = \frac{1}{4}a$, erit arcus AE seu $s = 2\sqrt{\frac{1}{4}.ax} = \sqrt{ax}$, unde $ds = \frac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}}$ & dS seu $Tds = \frac{1}{2}Tdx\sqrt{\frac{a}{x}}$, adeoque

$$Cc = ds + dS = \frac{1+T}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}},$$

a cujus quadrato

$$\frac{1+2T+TT}{4x}adx^2$$

auferatur quadratum Pp seu dx^2, erit radix quadrata reliqui

$$dx\sqrt{\frac{a+2aT+aTT-4x}{4x}} = dy,$$

id quod dat aequationem pro natura curvae AB, quae ut algebraica fiat, id quidem dependet ab electione quantitatis liberae S; sumamus ergo $S = ss:a$ utpote simplicissimam inter functiones ipsius s praescriptam con-

ditionem habentes; eritque $dS = Tds = 2sds : a = dx$, et $T = 2s : a = 2\sqrt{\frac{x}{a}}$; quibus substitutis in aequatione generali

$$dx\sqrt{\frac{a + 2aT + aTT - 4x}{4x}} = dy,$$

abit illa in hanc

$$dx\sqrt{\frac{a + 4\sqrt{ax}}{4x}} = dy,$$

quae ut commode integrari possit, scribatur tantisper (quod quidem jam supra fieri potuisset) $\frac{ss}{a}$ pro x, $\frac{2sds}{a}$ pro dx, et s pro $\sqrt{ax}$, & tunc habebitur

$$ds\sqrt{\frac{a + 4s}{a}} = dy,$$

cujus integrale

$$\tfrac{1}{6}.\overline{a + 4s}.\sqrt{\frac{a + 4s}{a}} = y + \tfrac{1}{6}a,$$

seu

$$(a + 4s)^{\frac{3}{2}} = (6y + a) \times \sqrt{a};$$

resubstituto pro $4s$ ejus valore $4\sqrt{ax}$ prodibit aequatio algebraica inter coordinatas x & y, quae haec est

$$(a + 4\sqrt{ax})^{\frac{3}{2}} = (6y + a) \times a\sqrt{a}.$$

Haec autem sublata asymmetria producit accurate tuam aequationem

$$81y^4 + 54ay^3 - 216axyy - \&c = 0.$$

Coroll. Hinc patet quia diameter circuli generatoris cycloidis $= \frac{1}{4}a$, fore pendulum simplex longitudini $\frac{1}{2}a$ isochronum cum oscillatione integra per curvam BAC vel CAB. Quod ad tautochronas in medio secundum quadrata velocitatum resistente spectat, non vacavit per paucos hos dies de solutione hujus casus cogitare, verum ubi per otium licuerit, tentabo, neque de successu despero.[1]) Interim quando de tua inventa curva dicis, quod descensus per CA sibi invicem sint isochroni, pariterque etiam isochroni sint ascensus per AD, non addis, an etiam isochroni fiant regressus, h. e. descensus per DA & ascensus per AC, hoc enim omnino necessarium esset ad reciprocationem oscillationum.

Non habeo multum quod addam de progressione

1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, &c.,

de qua dicis te habere modum accurate determinandi terminos medios, sed definiendum fuisset, quid per terminos medios intelligendum sit; idea

1) Vgl. die Abhandlung von Johann Bernoulli, *Méthode pour trouver les tautochrones dans les milieux résistans comme le quarré des vitesses* (Mém. Paris 1730. S. 78—101 = *Opera omnia* III, S. 173—197).

enim hujus rei nimis est vaga. Wallisius in sua *Arithmetica infinitorum* adhibet suas interpolationes pro simili negatio & ni fallor eandem hanc rem jam pertractavit.

Vale. Dabam Basil. a. d. XVII. Xbr. 1729.

9.

Euler an Bernoulli 11. Juli 1730.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 17. Dezember 1729. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Einige Zeilen veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 22—23.

Inhalt. Johann Bernoullis französische Preisschrift. — Drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Tautochrone und isochrone Kurven. — Lösung zweier von Johann Bernoulli gestellter Probleme, von denen das erste eine Verallgemeinerung der Aufgabe von der kürzesten Linie auf einer Oberfläche enthält, das andere sich auf die Bewegung eines Körpers bezieht, der sich auf einer in einer beweglichen Vertikalebene liegenden Kurve bewegt. — Eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Vir Excellentissime Celeberrime.[1])

Iam pridem officium meum fuisset ad postremas literas Tuas respondere, idque maxime eo tempore, quod ad nos fama pervenit de praemio Parisino [2]) Tibi adjudicato. Sed variae occupationes me impediverunt, quominus ea, quae scribere statueram, perficere potuerim. Solam vero gratulationem mittere non volebam. Praecipuam enim causam hujusmodi gratulationum praestantiam ingenii esse existimo, ex qua orta est ea disquisitio, quae optima est pronunciata. Neque vero haec laus in Te, Vir Celeberrime, competit; sed in eos praesertim, qui ex ea famam de se divulgari quaerunt. Quicquid autem est, quo Te hoc judicio auctum esse sentis, de eo ex animo gratulor, atque ut idem Tibi adhuc saepenumero usu veniat, vehementer exopto.

Aequationem $xxddy = qydx^2$ sine methodo mea, qua hujusmodi aequationes omnes, si fieri potest, vel reduco vel integro, sequenti modo, nulla adhibita substitutione, statim integravi. Addo utrinque terminum $\alpha xdxdy$ et multiplico der x^n. Hoc facto quaero, qui numeri α et n esse debeant [3]) aequationis

1) Am oberen Rande der ersten Seite des Briefes finden sich die folgenden Worte von Euler: „Vorigen Posttag hat Herr Prof. Bernoulli von hier auch geschrieben, welche er mich gebetten zu berichten".

2) Im Jahre 1730 hatte Johann Bernoulli für die von der Pariser Akademie der Wissenschaften gestellte Frage über die Ursachen der elliptischen Gestalt der Bahnen der Planeten und der Veränderung der Aphelien den Preis bekommen. Die Abhandlung ist unter dem Titel: *Nouvelles pensées sur le système de M. Descartes et la manière d'en déduire les orbites et les aphélies des planètes* gedruckt.

3) Hier spielt also x^n die Rolle eines integrierenden Faktors. Vor 1730 hatte sich Johann Bernoulli zweimal eines solchen bedient (vgl. Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* 3^2, S. 227 und Eneström, Biblioth. Mathem. 1898, S. 58), aber davon hatte Euler wahrscheinlich keine Kenntnis.

$$\alpha x^{n+1} dx dy + x^{n+2} ddy = q x^n y dx^2 + \alpha x^{n+1} dx dy,$$

ut utrumqne membrum integrari possit. Inveni autem

$$\alpha = \tfrac{1}{2} + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}} \text{ et } n = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}},$$

et integratione facta prodit haec aequatio

$$(\tfrac{1}{2} + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}})\, x^{-\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}} y dx = b dx + x^{\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}} dy;$$

haec divisa per

$$x^{-\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}}$$

dat

$$(\tfrac{1}{2} + \sqrt{q + \tfrac{1}{4}})\, y dx - x dy = b x^{\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}} dx.$$

Multiplicetur per

$$x^{-\frac{3}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}},$$

integrari poterit aequatio atque resultabit

$$c - x^{-\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}}\, y = -b x^{-2\sqrt{q + \frac{1}{4}}}$$

(posni tantum b pro $\frac{b}{2\sqrt{q + \frac{1}{4}}}$), porroque haec

$$y = b x^{\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}} + c x^{\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}}.$$

Quando dico in aequatione

$$ddx = Y x^m dx^{1-m} dy^{1+m} + \mathfrak{Y} x^n dx^{1-n} dy^{1+n} + \text{etc.}$$

indeterminatam x unicam dimensionem habere in singulis terminis, non tantum x sed etiam dx et ddx unam dimensionem ipsius x efficere intelligi volo. Sic in termino $Y x^m dx^{1-m} dy^{1+m}$ numerus dimensionum ipsius x non est m sed $m + 1 - m$ seu 1 ut in primo termino ddx.

Nescio quomodo factum est, ut aequatio tertii generis, qnam perscripseram, sit absurda, puto me ita scripsisse

$$a x^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + b x^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} + \text{etc.} = ddy,$$

in qua nullam heterogeneitatem deprehendere possum. Atque in ea x, y, dx, dy, ddy in singulis terminis eundem dimensionum numerum tenent nempe 1.

Quae de pluribus tautochronis novis in vacuo scripsi, utique facilia sunt, et propterea non tam methodum, quam rem ipsam aestimandam esse puto. Non dubito, quin Filius Tuus Clar. problematis casum, quo utraque curva est una continua, solverit statim, si de eo cogitasset; sed quia hujus casus

ei in mentem non venit, factum est, ut de his novis tautochronis tanquam ad me solum pertinentibus loquutus sim. Casus vero hujus, quo utraque curva debet esse continua, solutio Tua, Vir Celeberrime, prorsus cum ea, qua usus sum, congruit. Quod ad tautochronam in medio secundum quadrata celeritatum resistente attinet, quam in postremis literis Tecum communicavi, ea tantum oscillationes versus eandem plagam euntes reddit isochronas, revertentes vero tales non sunt. Propterea igitur ad usum pendulorum more consueto accommodata non est idonea. Nihilo tamen minus augmentum quoddam ea re Analysi accesisse arbitror, propter peculiarem atque latissime patentem methodum, qua in ea invenienda sum usus. Si vero utilitas in praxi desideratur, eadem methodo curvam determinavi, in qua pendulum oscillans binas oscillationes ex itu penduli et reditu constantes semper absolvit aequalibus temporibus, quamvis neque soli itus neque reditus sint isochroni.

In ultimis ad Cl. Filium datis literis me admonere jussisti de problemate mihi in prioribus literis proposito, ut ejus solutionem, si quam invenire possum scriberem. Is vero simul mihi aliud elegans problema te auctore proposuit de definiendo motu corporis super plano inclinato mobili. Utriusque problematis solutionem hic appono.

Problema primum, cujus solutionem jam diu investigare debuissem, est hoc: In superficie cujuscunque solidi lineam ducere hujus naturae, ut planum, in quo sita sunt duo elementa contigua, cum plano tangente superficiem in eo loco angulum datum efficiat.[1]) Solutio mea haec est. Sit (Fig. 5) curva quaesita BM. Assumto plano quocunque APQ pro lubitu, in eoque recta AP tanquam axe, demittatur ex puncto quocunque curvae quaesitae M in planum APQ normalis MQ, et ex Q ad AP etiam normalis QP. Dicantur AP, x, PQ, y et QM, z. Exposita sit natura superficiei datae, in qua est curva BM, aequatione inter tres indeterminatas x, y, z, quae sit haec

$$Pdx = Qdy + Rdz.$$

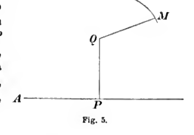


Fig. 5.

1) Vgl. über dies Problem JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia* T. IV, S. 113—114. BERNOULLI gibt als Gleichung der gesuchten Kurve

$$(Tdx^2ddz - zds^2ddy + Tdydzddy)\sqrt{ds^2 + dz^2}$$
$$= nzds^2dxddz - nTdydxdzddz + nTdxddy(ds^2 + dz^2),$$
$$\text{wo } ds^2 = dx^2 + dy^2,\ T = -\frac{zR}{Q},\ n = \frac{1}{q}$$

und ds als konstant angenommen wird.

His positis inveni anguli plani curvae cum plano tangente in M cotangentem esse

$$= \frac{Pdyddz - Pdzddy + Qdxddz - Rdxddy}{(Qddy + Rddz)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

posito sinu toto = 1. Si ergo requiratur, nt haec cotangens sit q, erit,

$$Pdyddz - Pdzddy + Qdxddz - Rdxddy$$
$$= (Qddy + Rddz)\, q \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

ex qua aequatione cum locali snperficiei

$$Pdx = Qdy + Rdz$$

conjuncta determinabitur curva quaesita. Si requiratur, ut dictus angulus ubique sit rectus, erit $q = 0$ habebiturqne aequatio

$$P(dyddz - dzddy) = Rdxddy - Qdxddz,$$

quae est ea ipsa, quam pridem pro linea brevissima inveni.

Alterum problema generalins quam mibi erat propositum solvi hoc sensu. Super plano horizontali (Fig. 6) BC sit perfecte mobilis curva $AMCB$. Super ejus parte convexa AMC descendat pondus qnod ad pondus figurae $AMCB$ rationem habeat ut C ad Δ. His positis requiritur motus utriusqne et ponderis descendentis et figurae horizontaliter progredientis.[1]) Inveni antem corpus revera propter figuram cadentem moveri in cnrva AND cujus applicata PN ad respondentem PM habet rationem constantem; est nimirum $PN : MN = \Delta : C$. Tangentes ergo ex M et N dnctae concurrent in T puncto axis AB prodncti. Est autem celeritas corporis A in N ad celeritatem figurae ABC ut NT ad MN. Sumta vero PO media proportionali inter PN et PM ductaqne TO, erit celeritas corporis in N ad celeritatem, quam haberet, si ex altitudine AP libere cecidisset, ut NT ad OT.

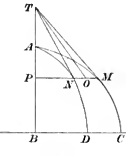


Fig. 6.

1) Das von Johann Bernoulli gestellte Problem war: Sit ACK triangulum materiale, rectangulum in K, qnod super plano horizontali DH sine omni frictione moveri possit. Sit etiam corpus grave m, quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, pariter sine frictione; quo fiet nt, descendente corpore m, triangulum jugiter ab eo pressum retrocedere cogatur. Quaeritur tunc corporis, tum

Solutionem quidem hanc non ex principiis mechanicis et effectu sollicitationum gravitatis deduxi. Principia, quibus usus sum, sunt haec duo. I. Vim vivam, quae adest, si corpus est in N tam in corpore quam in figura, aequivalere vi vivae, quam solum corpus haberet, si ex altitudine AP libere cecidisset. II. Hanc vim vivam ita distribui inter corpus et figuram ABC, ut corpus minimo tempore ad lineam horizontalem BC perveniat, vel ut corpus celerrime descendat. Hac vero solutione non contentus, quaero genuinam, eamque mox invenire spero.

Incidi nuper in hanc aequationem

$$ccdz - zzdz - xzdx = cdx\sqrt{xx + zz - cc},$$

quae est ad curvam quandam tautochronam. Eam construere possum, sed tamen nullo modo adhuc indeterminatas a se invicem separare potui. Ejusmodi praeterea innumerabiles dare possum, quarum omnium constructiones habeo, neque tamen vix eas separare spero.

Vale et favere perge

Vir Excellentissime Celeberrime

Petropoli d. 11. Julii 1730.

Tuo obstrictissimo

L. Eulero.

10.

Euler an Bernoulli 25. Mai 1731.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Vorläufiger Bericht über eine mathematische Theorie der Musik

Hochedelgebohrner Hochzuehrender Herr.

Dass ich so lange Zeit an Ew. Excellenz zu schreiben aufgeschoben und dabey derselben meines schuldigen Respects zu versicheren, ist die Ursach, weilen ich seit der Zeit nichts gearbeitet habe, welches derselben zu überschreiben würdig geschätzet hätte. Ich habe fast diese ganze Zeit angewendet zu Verfertigung eines Systematis Musici womit ich jetzund fast zu Ende gekommen.[1]) Was ich darinn vermeine gethan zu haben,

trianguli velocitas, tum etiam via AP, quam corpus ex motu composito describit, atque utriusque lex accelerationis. Vgl. über dies Problem die Abhandlungen von Johann Bernoulli in den Comment. acad. sc. Petrop. 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 11—25, und in seinen *Opera omnia* T. IV, S. 341—347.

1) Diese Arbeit erschien in St. Petersburg 1739 unter dem Titel: *Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide exposita.* Wie Poggendorff (*Biographisch-literarisches Handwörterbuch* I, Sp. 689) für diese Arbeit drei Druckjahre (1729, 1734, 1739) hat angeben können, verstehe ich nicht. Jedenfalls geht aus Eulers Brief hervor, daß sie im Mai 1731 noch nicht fertig war.

nehme ich hiemit die Freyheit Ew. Excellenz zu überschreiben, weilen ich vermuthe, dass dieselbe darauf curios seyn möchte, indeme ich neulich von dero Herrn Sohn vernommen, dass dieselbe von dem Herrn Hermann etwas davon gehöret. Mein Endzweck in diesem Werke war dieser, dass ich suchte die Musik als einen Theil der Mathematik auszuführen, und alles was eine Zusammenfügung und Vermischnng der Thöne kann angenehm machen, aus richtigen Gründen ordentlich herzuleiten. Zu dieser ganzen Abhandlung habe ich einen metaphysischen Grundsatz nöthig gehabt, worinnen die Ursach enthalten, warum einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne und worinn der Grund zu setzen sey, dass uns eine Sach angenehm, eine andre aber unangenehm vorkomme. Mit den Thönen habe ich dargethan, dass es diese Bewandtniss habe, dass uns viel zusammengefügte Thöne gefallen, wenn wir die Verhältniss der Höhe und Tiefe derselben, nehmlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten gehen, einsehen. Und aus diesem habe ich die Reglen gezogen, wie die Thöne würden zusammen gefügt werden, dass sich derer ein verständiges Ohr belustigen könne. Es ist aber noch ein anderer Grund weswegen wir an einer Music eine Lust empfinden, welcher in der Daurung der Thöne bestehet, und kann uns deswegen auch eine Music bloss darum gefallen, weilen wir die Verhältniss der Daur der Thöne begreiffen. Nach dem ersten principio ist also die verschiedene Höhe und Tiefe der Thöne das was uns belustiget, nach dem andren aber die verschiedene Daur derselben. Bey einer vollkommenen Musick muss beydes beysammen seyn und uns gefallen, so wohl ratione acuminis et gravitatis als ratione durationis sonorum. Eine Music, die uns nur nach dem ersten gefällt, ist der Choral, worinnen es nur auf die Zusammenstimmung der Stimmen ankommt und auf die Daur nicht gesehen wird. Ein Exempel aber einer Music, welche nur nach dem andren Grundsatz ein Gefallen erwecken kann, ist das Trommelspiel, worinnen nur auf die Daur und nicht auf die Höhe der Thöne gesehen wird. Ich habe erstlich die Music nach dem ersten Principio allein abgehandlet, hernach nach dem andren und endlich werde ich noch beyde zusammen nehmen. Im ersten Theil, welcher ohne Zweifel der fürnehmste ist, sind folgende Stück abzuhandeln vorgekommen. Für das erste von den Accorten, worinnen ich gewiesen, wie 2 oder mehr Thöne müssen beschaffen seyn, dass sie, wenn sie zusammen klingen, eine angenehme Harmonie erwecken. Zum zweiten habe ich untersuchet wie 2 Accorte beschaffen seyn müssen, dass sie nacheinander geschlagen annehmlich klingen. Zum dritten habe ich eine ganze Suite von Accorten betrachtet, und was zur Annehmlichkeit derselben erfordert wird gewiesen. Die Schrambe, in welchen sich eine solche Suite befindet, machet die Modos aus, von welchen ich darauf gehandlet, und habe dahey auch gewiesen,

was für Thöne man für einen jeden modum nötbig habe auf den Instrumenten, wobey ich das genus chromaticum mit 12 Thönen in einer Octav sehr schön heraus gebracht. Zu den folgenden Betrachtungen habe ich alles nach dem Systemate chromatico tractirt. Hernach habe ich was vorhergegangen specialer ausgeführet, und auf die Praxin mehr appliciert. Und da ich darinn eine perfectam enumerationem modorum gemacht, so kann man daraus sehen, wie viel weiter man annoch in der Music kommen könne, und dass von so vielen Modis jetzund nur 2 im Schwange sind. Dieses verstehet sich von der Musick, welche sich auf das Genus chromaticum gründet, denn wenn man über die 12 Thöne, so sich in eine Octav befinden, mehr oder an deren Statt andre gebrauchen wollte, so würde man unendlich viel verschiedene Arten Music haben können. Alles dieses habe ich aber aus dem ersten Principio allso heraus gebracht. Es seyen viel verschiedene Thöne, davon die zu gleicher Zeit absolvierte numeri pulsuum seyen wie diese ganze Zahlen a, b, c, d, etc. durch welche auch die Thöne selbsten exprimiret zu werden pflegen. Dieser Zahlen minimus communis dividuus sey A. Diese Zahl nenne ich den Exponentem derselben Thönen, weilen daraus die Anmuth erkennet wird, welche verursachet wird, wenn dieselben Thöne entweder zugleich oder nach einander klingen. Ich habe darauf gradus suavitatis festgesetzt, davon der erste die perfecteste Zusammenstimmung, nehmlich wenn alle Thöne einander gleich sind, begreifft. Die folgenden begreiffen die weniger vollkommenen nach ihrer Ordnung unter sich. Aus dem Exponente nun wird auf folgende Weise der Gradus suavitatis erkannt; ich solvire denselben in seine factores simplicissimos. Diese addire ich in eine Summ und subtrahire davon $n-1$ (n bedeutet den numerum factorum), die Zahl alsdann, die heraus kommt, gibt den gradum. Zum exempel die Thöne seyen 1, 2, 3, 4, 6, so wird derselben exponens seyn 12. Dieses factores simplicissimi sind folgende 3: 2. 2. 3. Deren Summ weniger 2 ist 5, woraus erhellet, dass die harmonie dieser Thöne im 5:ten grad angenehm sey.

Auf diese Weise kann man den Exponentem eines ganzen Musicalischen Stücks finden, wenn man alle Thöne durch ganze Zahlen exprimirt und davon das minimum commune dividuum nimmt. Dieser exponens aber ist nicht anderes als der modus musicus desselben Stücks; zu einem Stück, da alle Thöne auf dem Clavier vorkommen, ist der Exponens 2^n. 3^3. 5^2, wo n von der Anzahl der Octaven dependirt. Nach diesem müssen in eine Octav folgende 12 Thöne seyn

480, 512, 540, 576, 600, 620, 675, 720, 768, 800, 864, 900,

der 13te ist eine Octav höher als der Erste nehmlich 960.

Dieses ist was ich aus meiner Musica Theoretica Ew. Excellenz habe

überschreiben wollen. Ich verbleibe also nebst Vermeldung meines schuldigen Respects an dieselbe und dero sämtliche Familie

Hochwohlgebohrner Hochzuehrender Herr
Petersburg, d. 25ten Maj. 1731.
dero gehorsamster und verbundenster Diener
Leonhard Euler.[1])

11.

Bernoulli an Euler 11. August 1731.

Antwort auf Eulers Brief vom 25. Mai 1731. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht zuerst im Journal für Mathematik 23, 1842, S. 199—200 und dann abgedruckt von Fuss, a. a. O. S. 8—11.

Inhalt. Über die von Euler angekündigte mathematische Theorie der Musik. Kritische Bemerkungen zu den Auseinandersetzungen in Eulers vorangehendem Brief.

Clarissime et Doctissime Domine Professor,
Amice Carissime.

Dessen letzteres vom 25. Mai ist mir von Seinem Herrn Vatter zurecht überlieffert worden; Er hat nicht nöthig sich wegen Saumseligkeit im Schreiben zu excusiren, da ich selbsten eine Antwort schuldig wäre: hoffe aber Er werde mir zu gut halten, was ich diesorts an meiner Pflicht etwas lasse abgehen, in Betrachtung meiner vielfältigen Occupationen, sonderlich bei dem mir neulich aufgetragenen, oder vielmehr aufgedrungenen Decanat, welches mir in meinem angehenden hohen Alter sehr beschwerlich ist.

Es ist mir sehr lieb gewesen zu vernehmen, dass der Herr Prof. an Verfertigung eines Systematis Musici (welches fast zu Ende soll gekommen seyn) arbeitet; ich zweifle nicht, es werde ein schönes Werk zu Tage

1) Am Anfange der vierten Seite des Briefes finden sich folgende von Daniel Bernoulli geschriebene Zeilen: „Da mir der Hr. Prof. Euler gesagt, dass er diesen Brief an den Vatter ablassen wolle, so habe diese paar Zeilen binzusetzen wollen, umb Ihnen und der Mutter meines Respects zu versichern und meine Geschwistern nebst allen guten Freunden zu grüssen, auch anbey meine Gott lob gute Gesundheit zu berichten. Sonsten berufe mich auf mein letzteres vom 1. Juni oder 8. (das ich mich nicht recht erinnere). Wenige Tage darauf habe ich von dem Johannes einen Brief empfangen, dero ich beantworten werde, wenn ich seine Antwort auf mein erstgedachtes Schreiben werde empfangen haben. Wir haben alhie vernommen, dass die Müller banquerotiret haben, ich fürchte der Vatter werde auch interessiret seyn und bedaure den guten H. Hermann als welcher vor 800 Rtl. sp. interessiret seyn solle. Sonsten recommendire noch einmahl mein voriges beachten wegen des Johannes Herkunft und verbleibe mit gebührenden Grüssen

M. M. T. C. E. T. H. B. V. T. H. E. T. O. F.

D. Bernoulli."

kommen, so des Auctors fürtreffliches ingenium sattsam zeigen wird. Ich kann mir leicht einbilden, dass dergleichen opus kaum wird gefunden werden, darin alles auss mathematischen Gründen hergeholet ist, da wenig Scriptores Musici oder wohl gar keine zu finden sind, welche mit so grosser und ausshündiger mathematischer Wissenschaft begabet sind, wie der Hr. Professor ist, desswegen mich sehr verlanget Sein Werk selbsten dermahleneins zu sehen. Ich könnte zwar nicht leicht errathen, worin derjenige Grundsatz bestehe, so metaphysisch seyn solle, wie Er sagt, dadurch die Ursach könnte gegeben werden, warum Einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne, und dass uns eine Sach angenehm, eine andere aber unangenehm vorkomme: Man hat zwar eine General-idée von der Harmonie, dass sie lieblich ist, wenn sie wohl eingerichtet und die Consonanzen wohl menagirt seind, denn, wie bekandt, so haben auch die Dissonanzen in der Music ihren Gebrauch, damit die Lieblichkeit der gleich darauf folgenden Consonanzen desto besser herauskomme, nach dem gemeinen Sprichwort: opposita juxta se posita magis elucescunt; also verhält sich es auch mit dem Schatten in der Malereykunst, welcher das Licht releviren muss. Es kommt, glaube ich, in musica practica meistens auf die Art und Modification an, daran man gewöhnet ist, und diese Art dependiret viel von dem Naturel und Temperament der Leute, deren einige dieses, andere ein anderes für süss und angenehm halten; also ist die Italienische Music-Art discrepant von der Französischen, und diese von der Englischen. Mit einem Wort, de gustibus non est disputandum. Wenn hiemit die Lieblichkeit eines Musicstückes in der Natur selbsten soll gegründet seyn, so muss man wohl definiren, was man durch Lieblichkeit verstehe und nicht sagen: dies oder jenes ist lieblich, weil es mir gefällt, denn eben dieses könnte einem anderen mißfallen, zum Exempel dem Midae hat des Pans Schnader-Music besser gefallen, als des Appollinis Harfenklang. Der Hr. Professor sagt, man könne urtheilen von dem Wohlgefallen oder Missfallen der viel zusammengefügten Töne, wenn man die Verhältniss der Höhe und Tiefe derselben, nämlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten geben, einsiehet; daraus habe Er die Regel gezogen, wie die Töne müssen zusammengefügt werden, dass sie ein verständiges Ohr belustigen können. Dieses lasse ich gelten für einen Meister, der mehr auf die Accuratesse eines Musicstückes Achtung gibt, als auf den Effect, den es auf die Zuhörer thut; ein Solcher wird sich ohne Zweifel daran ergötzen und belustigen, wenn er es nur auf dem Papier geschrieben siehet und examiniret, und befindet dass es nach den Grundregeln wohl componirt ist; aber da ein Musicstück meistens gespielet wird vor unverständigen Ohren, welche die rationem intervallorum pulsuum der Saiten nicht einsehen, viel weniger zählen können, so wird, glaube ich, dergleichen

Ohren das Musicstück entweder gefallen oder missfallen, je nachdem sie an diese oder jene Gattung der Music gewöhnt sind. Im übrigen gefällt mir sein dessein ganz wohl, weilen aufs wenigste die Theoria musices dadurch perfectionniret und gewiesen wird, dass ein Mathematicus schier alle Wissenschaften auszuführen im Stande ist, dahingegen andere Meister, die nur Practici seind von ihrer eignen Kunst nicht anderst schreiben als wie ein Blinder von der Farb.

Wenn dieser Tractatus Musices zu End seyn wird, wird der Hr. Professor seine vorhabende Mechanicam[1]) (von deren mir ist geschrieben worden) ohne Zweifel mit Ernst für die Hand nehmen, von denen ich mir etwas Sonderbares promittiere, dazu ich denn beharrliche Gesundheit von Herzen anwünsche. Verbleibe indessen unter Empfehlung Göttl. Protection des hochgeehrten Hrn. Professors

bereitwilligster

J. Bernoulli Dr.

Basel, d. 11. August 1731.

1) Diese Arbeit erschien schon vor der *Theoria musicae* unter dem Titel: *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (St. Petersburg 1736).

Zur Frage der Begründung einer mathematischen Zentralbibliothek.

Von Felix Müller in Friedenau-Berlin.

Wie die Leser dieser Zeitschrift erfahren haben, wurde auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Karlsbad im September 1902 von Herrn Felix Klein der Gedanke angeregt, eine mathematische Zentralbibliothek zu begründen, um die Mitglieder bei ihren wissenschaftlichen Arbeiten zu unterstützen. Um die Verwirklichung dieses Planes zu erörtern, wurde eine Kommission gewählt, welche in Kassel womöglich praktisch durchführbare Vorschläge unterbreiten sollte. Durch den Aufsatz des Herrn Eneström: *Über die Aufgaben einer mathematischen Zentralbibliothek*, Bibl. math. 4_3, 1903, 82—85, wurde ich zur Aufstellung einiger Vorschläge veranlaßt, welche den Mitgliedern auf der Versammlung in Kassel überreicht wurden. Am letzten Versammlungstage gestattete leider die Kürze der Zeit, die für die Beratung des Planes einer Zentralbibliothek erübrigte, weder ein Verlesen der einzelnen Vorschläge, noch eine Diskussion derselben. Der Plan zur Begründung einer Zentralbibliothek wurde so lange vertagt, bis hinreichende Geldmittel vorhanden wären, doch wurde eine bibliographische Kommission eingesetzt, welche Berichte über die Benutzbarkeit der mathematischen Bibliotheken und über ihre Bestände an seltenen Einzelwerken und Zeitschriften sammeln und veröffentlichen soll.

Da indessen mehrere Mitglieder den Wunsch geäußert hatten, daß der Plan der Begründung einer mathematischen Zentralbibliothek nicht gänzlich fallen gelassen werde, so sollen folgende Vorschläge zur Realisierung dieses Planes mitgeteilt werden, um womöglich zu neuen Vorschlägen anzuregen.

1. An alle Mathematiker, besonders an die Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, sowie an alle Verleger mathematischer Werke wird ein Aufruf erlassen mit der Bitte, durch Geschenke von Büchern oder Zusendungen von Geld die Begründung der mathematischen Zentralbibliothek zu unterstützen.

2. Um die Vermehrung der Bibliothek durch Neuanschaffungen dem Bedürfnis entsprechend zu gestalten, werden Bibliothekskataloge von selteneren oder schwer zugänglichen mathematischen Einzelwerken und Zeitschriften mathematischen Inhaltes mit Angabe der Bibliotheken, in denen sich dieselben befinden, hergestellt.

3. Um einen fortlaufenden Bericht über den Fortgang des Unternehmens den Mitgliedern zugänglich zu machen und ihnen den Nutzen der zugleich mit einer mathematischen Zentralbibliothek zu errichtenden Zentralstelle für mathematische Bibliographie wiederholt vor Augen zu führen wird ein *Korrespondenzblatt zur Verbreitung mathematisch-bibliographischer Kenntnisse* herausgegeben.

4. Es wird eine ständige Bibliotheks-Kommission ernannt, welche die Einrichtung und Erhaltung der Zentralbibliothek zu überwachen hat und die mit einer solchen Zentralbibliothek zweckmäßig zu verbindenden Aufgaben, wie die Auskunft über mathematische Literatur, die Erstattung eines fortlaufenden Berichtes über den Stand des Unternehmens, die Redaktion des Korrespondenzblattes, später die Herausgabe einer mathematischen Bibliographie, die Veröffentlichung eines mathematischen Gesamtkataloges mit Hinzufügung der Bibliotheken, die Herstellung eines Wörterbuches der mathematischen Literatur und ähnliche Untersuchungen im Auge zu behalten und nach Möglichkeit durchzuführen hat.

Die verschiedenen Gegenstände, welche in dem *Korrespondenzblatte* zur Verbreitung mathematisch-bibliographischer Kenntnisse zu besprechen wären, dürften etwa folgende sein:

1. *Die mathematische Zentralbibliothek.* Berichte über den Plan und die Realisierung desselben, über den Zuwachs durch Geschenke, über Neuanschaffungen, über Verwendung der etwa eingegangenen Gelder. Grundsätze und sonstige Mitteilung über die Benutzung der Bibliothek u. ä.

2. *Öffentliche Bibliotheken.* Belehrungen über Benutzung der Bibliotheken des In- und Auslandes. Resultate der an die Vorstände ergangenen Aufforderungen. Bibliotheksverzeichnisse seltener Schriften. Materialien zu einem mathematischen Gesamtkatalog.

3. *Literarische Desiderata.* Verzeichnisse derjenigen Schriften, deren Beschaffung unmöglich oder sehr schwierig war, nach Mitteilungen der Leser des Blattes. Diese Verzeichnisse sind als Material für das Schreiben an die Bibliotheks-Vorstände zu verwerten. Dadurch würden zugleich die Vorstände auf bedauerliche Lücken in ihren Bibliotheken aufmerksam gemacht werden. Wünsche zur Anschaffung für die Zentralbibliothek u. ä.

4. *Bibliographisches.* Mitteilung von älteren und neueren Schriften, in denen wichtige bibliographische Aufsätze oder Notizen über mathematische Gegenstände enthalten sind. Fortlaufende Berichte über den

mathematischen Inhalt älterer Zeitschriften, Berichte über die im Erscheinen begriffenen großen Bibliographien, Übersicht über neu erschienene Schriften. Materialien zu einer systematisch geordneten mathematischen Jahresbibliographie.

5. *Fragen und Auskünfte.* Anfragen (mit Angabe des Namens oder pseudonym) über mathematische Literatur, wie solche zum Teil schon im Intermédiaire des mathématiciens sich finden. Antworten auf eingegangene Fragen, seitens der Leser des Blattes.

6. *Literaturangaben.* Ergänzungen und Verbesserungen unvollständiger oder fehlerhafter Zitate in Repertorien, Encyklopädien und anderen mathemathischen Schriften.

7. *Wörterbuch der mathematischen Literatur.* Sammlung von Materialien zu einem lexikographischen Verzeichnis mathematischer Termini technici mit Angabe der einschlägigen Literatur.

8. *Vorlesungen.* Mitteilungen über Berücksichtigung der mathematischen Literatur in Vorlesungen.

9. *Anzeigen.* Verkäufe von Bibliotheken, Buchhändleranzeigen, Antiquariatskataloge etc. etc.

Vielleicht wäre es möglich, *wöchentlich eine* Nummer des *Korrespondenzblattes* erscheinen zu lassen, damit Auskünfte auf literarische Fragen möglichst schnell gegeben werden können. Der jährliche Abonnementspreis dürfte Mk. 6.—. nicht übersteigen. Durch *Austausch* des Jahresberichtes und des Korrespondenzblattes mit anderen mathematischen Journalen ließe sich die Zentralbibliothek vermehren. Die der Redaktion eingesandten Werke würden ebenfalls der Zentralbibliothek zu gute kommen.

Über Ausstellungen mathematischer Literatur.

Von G. Eneström in Stockholm.

Betrachtet man als Zweck einer Ausstellung, die Übersicht über das, was bisher auf einem gewissen Gebiete geleistet worden ist, zu erleichtern und dadurch Anregungen zu Verbesserungen oder zu neuen Arbeiten auf diesem Gebiete zu geben, so hat man in betreff der reinen Mathematik eigentlich nur wenig Gegenstände, die ausgestellt werden können. Für die Geometrie kommen in Betracht Modelle von Flächen und Kurven, sowie Instrumente zur Herstellung oder Berechnung räumlicher Gebilde, und auch für die Analysis haben solche Modelle und Instrumente eine Bedeutung, sofern dadurch Funktionen veranschaulicht werden können. Hierher gehören ferner zahlentheoretische Diagramme, und auch Rechenmaschinen oder Maschinen, die gewisse andere analytische Operationen ausführen, können ja als der reinen Mathematik angehörig betrachtet werden. Aber einen Einblick in das, was bisher auf dem Gebiete der Mathematik überhaupt geleistet worden ist, wird man natürlich nicht durch eine Ausstellung solcher Gegenstände bekommen.

Fordert man dagegen von einer Ausstellung nur, daß sie an einer und derselben Stelle eine ziemlich große Anzahl von solchen Sachen, aus denen der Fachmann Belehrungen erhalten kann, zusammenführen soll, so gibt es für die Mathematik auch eine andere Art von Gegenständen, die ausgestellt werden können, nämlich mathematische Schriften. Freilich finden sich in den großen Bibliotheken nicht unbedeutende Sammlungen solcher Schriften, und wer Auskunft über die mathematische Literatur wünscht, hat jetzt zur Verfügung wertvolle literarische Hilfsmittel, aber die Bücherbestände der großen Bibliotheken sind nur ausnahmsweise dem Fachmanne zugänglich, und die literarischen Hilfsmittel können nicht immer den Nutzen gewähren, den man hat, wenn man die Schriften selbst gesammelt vor sich findet. Um dies zu ermöglichen, gibt es vielleicht augenblicklich, so lange wir keine mathematische Zentralbibliothek besitzen, keinen besseren Ausweg als von Zeit zu Zeit Ausstellungen mathematischer Literatur anzuordnen.

Ohne Zweifel kann es von Interesse sein, auch die ältere mathematische Literatur auszustellen, aber sofern es sich nicht um eine Spezialausstellung handelt, ist es wohl im allgemeinen angebracht, sich auf die neuesten Schriften zn beschränken. Am einfachsten wäre es, zuerst ein Rundschreiben an Verleger und Verfasser ausgehen zu lassen, worin diese ersucht werden, ihre mathematischen Pnblikationen einzusenden, und dann zu versnchen, die so erhaltene Sammlung auf andere Weise zu ergänzen, so daß sie wenigstens alle wichtigeren Erscheinungen der letzten Zeit umfaßt. Gelingt ein solches Verfahren, so kann man die Schriften auf verschiedene Weise ordnen, je nach dem Zweck, den man in erster Linie verfolgen will. Will man die Entwickelnng der literarischen Wirksamkeit auf dem mathematischen Gebiete hervorheben, empfiehlt es sich selbstverständlich die Schriften chronologisch zu ordnen, sonst dürfte unter allen Umständen eine eigentlich systematische Anordnung vorzuziehen sein. Zuerst werden dann Zeitschriften und allgemeine Arbeiten gestellt, und darauf die übrigen Schriften nach den behandelten Gegenständen geordnet; hierbei ist es wünschenswert, nicht nur die besonders erschienenen Arbeiten sondern auch Separatabzüge aus Gesellschafts- und Zeitschriften zu sammeln. Auf diese Weise bekäme man eine Übersicht über die neueste literarische Wirksamkeit auf den verschiedenen Gebieten der Mathematik, und die Sammlung würde auch zu einem näheren Studium der einschlägigen Literatur einladen.

Erweist es sich dagegen unmöglich, auch nur annäherungsweise die wichtigeren mathematischen Schriften der letzten Jahre zu bekommen, so sollte man wenigstens auf einem besonderen Gebiete Vollständigkeit erstreben, denn anch eine Spezialausstellung kann gewiß von großem Interesse sein. Die Grenzen einer solchen Ausstellung können natürlich auf verschiedene Weise gezogen werden; sie können zeitlich sein, so daß man sich z. B. auf die Schriften des letzten Jahres beschränkt. Sonst liegt es auch nahe, die Literatur eines gewissen Zweiges der Mathematik z. B. der Fnnktionentheorie, auszustellen; hat man irgend einen Grnnd die Grenzen noch enger zn ziehen, kann man die Ausstellung nur die Schriften von oder über einen bestimmten Mathematiker, z. B. Euler, oder über eine besondere Frage, z. B. die Grundlagen der Geometrie, umfassen lassen.

Es kann anch Spezialausstellungen geben, die mehr pädagogische oder praktische Zwecke verfolgen. In den verschiedenen Ländern werden bei dem Universitätsunterricht eine Menge von Lehrbüchern oder Vorlesungsheften benutzt, von denen die meisten dem großen Publiknm fast unbekannt, und schwer zu bekommen sind; an einer Stelle die wichtigsten dieser Lehrbücher nnd Vorlesungshefte zu sammeln, würde für die Universitätslehrer der Mathematik und auch für andere Mathematiker sehr belehrend

sein können.[1]) Einen unleugbaren Nutzen, wenn auch etwas anderer Art als der bisher in Betracht gezogenen, würde es auch mit sich bringen, wenn die größeren Verleger auf dem Gebiete der Mathematik besondere Ausstellungen ihrer Verlagsartikel anordnen wollten, worin sie die Zweige der Mathematik hervorheben, mit welchen sie sich vorzugsweise beschäftigen, denn daraus könnten junge Mathematiker, die ausführlichere Arbeiten in Angriff genommen haben, ersehen, wohin sie sich wenden sollen, um ihre Schriften veröffentlicht zu bekommen. Kurz, die Zahl der verschiedenen Ausstellungen mathematischer Literatur, die dem Fachmanne wertvolle Belehrungen geben würden, ist so groß, daß man sehr wohl eine ganze Reihe solcher Ausstellungen anordnen könnte, die verschiedene Zwecke verfolgen.

Sind also Ausstellungen mathematischer Literatur im allgemeinen nützlich, so müssen sie ganz besonders zu empfehlen sein, wenn sie mit größeren Mathematiker-Versammlungen in Verbindung gesetzt werden, und es ist darum sehr erfreulich, daß der Ausschuß für die Vorbereitung des dritten internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904 beschlossen hat, mit dem Kongresse eine Literaturausstellung zu verbinden.

Wenn ich sage, daß die Ausstellungen in diesem Falle besonders zu empfehlen sind, so denke ich nicht in erster Linie daran, daß die Besucher viel zahlreicher als sonst werden müssen, obgleich dieser Umstand gewiß nicht ohne Belang ist. Ungleich größeres Gewicht lege ich darauf, daß die bei einem Kongresse gehaltenen Vorträge in vielen Fällen die Fachgenossen zu unmittelbarem Studium der einschlägigen Literatur anregen müssen, und daß ein solches Studium, wenn es schon während des Kongresses möglich wird, zu wertvollen Bemerkungen seitens der Zuhörer Anlaß geben könnte, wodurch das wissenschaftliche Resultat der Verhandlungen wesentlich erhöht würde. Aber die Literaturausstellung kann auch direkt für gewisse Vorträge verwertet werden, z. B. wenn es sich um Berichte über den gegenwärtigen Stand bestimmter Theorien handelt.

Indessen wird die Literaturausstellung meiner Ansicht nach ihre größte Bedeutung bei dem geselligen Verkehr der Kongreßmitglieder bekommen. Wo eine Anzahl Personen, die sich mit denselben Gegenständen beschäftigen, versammelt sind, werden natürlich gesprächsweise viele Fragen berührt werden, zu deren Erledigung es nicht selten nötig ist, die betreffende Literatur zur Verfügung zu haben, und wenn dies durch eine Literaturausstellung ermöglicht wird, so können solche private Colloquia einen weitaus größeren Wert haben, als manche offiziell angekündigten Vor-

[1]) Den Gedanken einer solchen Spezialausstellung entnehme ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn A. Krazer.

träge. Besonders willkommen wird die Ausstellung für diejenigen werden, die sich mit historischen und literarischen Forschungen beschäftigen, und ich denke mir, daß im Ausstellungslokal zu bestimmten Zeiten Zusammenkünfte angeordnet werden, wo keine Vorträge gehalten werden, sondern die Gleichgesinnten sich in kleine Gruppen vereinigen, um Fragen mehr literarischer Art zu diskutieren. Gewiß könnte auf diese Weise manche Frage sogleich erledigt werden, die unter anderen Umständen umfassende Nachforschungen erfordern würde.

Bisher habe ich von der Weise gesprochen, worauf Literaturausstellungen zweckmäßig angeordnet werden können, und von dem Nutzen, den sie gewähren, aber es gibt auch eine andere Sache, die in Betracht gezogen werden muß, nämlich die Schwierigkeiten bei dieser Anordnung und die große Mühe, die damit verbunden ist. Es wäre darum unangezeigt zu verlangen, daß die jetzt in Aussicht genommene Literaturausstellung alles bringen wird, das man *a priori* geneigt ist von einer solchen zu erwarten, aber schon der Umstand, daß eine mathematische Literaturausstellung zustande kommen wird, ist sehr erfreulich; später, nachdem man Erfahrung auf diesem Gebiete erworben hat, können ja ziemlich leicht Erweiterungen oder Verbesserungen angebracht werden.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.“

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1 : 197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238.

---

1 : 272. Die von John Dee angefertigte lateinische Übersetzung der Schrift des Muhammed Bagdadinus wurde zum erstenmal von F. Commandino herausgegeben unter dem Titel: *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino ascriptus* (Pisauri 1570). Fast gleichzeitig erschien eine italienische Übersetzung von F. Viani de' Malatesti da Montefiore (*Libro del modo di dividere la superficie attribuito a Machometo Bagdadino*, Pesaro 1570). — Zu den in Anm. 2 genannten Schriften über die verlorene Aufgabensammlung *περὶ διαιρέσεων βιβλίον* können noch folgende hinzugefügt werden: Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* (Leipzig 1883), S. 12—16; Favaro, *Preliminari ad una restituzione del libro di Euclide sulla divisione delle figure piane*, Atti dell' Istituto Veneto $\mathbf{1}_6$, 1883, S. 393—397; Favaro, *Notizie storico-critiche sulla divisione delle aree*, Memorie dell' Istituto Veneto **22**, 1883, S. 129—154. Die letzte Schrift habe ich vergebens in den Fortschritten der Mathematik gesucht, und sie scheint auch Herrn Loria (*Le scienze esatte nell' antica Grecia* II; Memorie dell' accademia di scienze di Modena $\mathbf{11}_2$, 1895, S. 221) unbekannt gewesen zu sein.

G. Eneström.

---

1 : 283, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 434—435. Nach dem Erscheinen der 2. Auflage des 1. Bandes der *Vorlesungen* hat P. Tannery in den *Diophanti opera omnia* Vol. II (1895), S. 37—42 einen Brief von Michael Psellos veröffentlicht, wo gesagt wird,

daß Anatolios eine arithmetische Schrift über die ägyptischen Rechenmethoden abfaßte und dieselbe dem Diofantos widmete. Nach Tannery (a. a. O. S. IX) hat Psellos diese Notiz wahrscheinlich dem Kommentar der Hypatia entnommen. Ist Psellos hier als zuverlässig anzusehen, so folgt daraus, daß Diofantos in der 2. Hälfte des 3. Jahrhunderts n. Chr. gelehrt hat, denn Anatolios war um 280 Bischof von Laodikeia; Hultsch (Art. *Diophantos* in Pauly-Wissowa, *Realencyklopädie* B. 5, Sp. 1052) setzt darum Diofantos' Blüte um 250 n. Chr. an. G. Eneström.

1:436, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324.

---

1 : 466. Hier wäre es angebracht einige Worte über den griechisch-jüdischen Mathematiker Domninos aus der syrischen Stadt Larisa einzufügen. Domninos, ein Zeitgenosse von Proklos, hat eine kurze Übersicht über die Elemente der Zahlentheorie verfaßt, die von J. F. Boissonade im 4. Bande (S. 413—429) der *Anecdota graeca* herausgegeben wurde, und über deren Inhalt P. Tannery (*Domninos de Larissa;* Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884, S. 288—298) und F. Hultsch (Art. *Domninos* in Pauly-Wissowa, *Realencyklopädie*) berichtet haben. Hultsch bemerkt, daß die Schrift von Domninos für die Geschichte der Arithmetik beachtenswert ist, weil sein Verfasser außer Eukleides, Nikomachos und, wie es scheint, Theon von Smyrna noch eine jetzt verloren gegangene Quelle benutzt hat, die auch dem Jamblichos vorgelegen hat.
G. Eneström.

1:467, 469, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1:694,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **1:704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853, 854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206 — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

2:7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2:34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2:37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:41, 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2:70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2:97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:98,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2:100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325.

---

2 : 104—105. Die zwei Bemerkungen: „Am Schlusse des IV. Buches [seiner Euklidausgabe] lehrt Campanus die Dreiteilung des Winkels," und

„Merkwürdigerweise fehlt die Winkeldreiteilung in den Handschriften der Euklidausgabe des Campanus“ müssen den Leser veranlassen zu fragen: Woher weiß man denn, daß Campanus sich mit der Dreiteilung des Winkels beschäftigt hat?, und über diese Frage findet man in den *Vorlesungen* keinen Aufschluß. In der Tat sind sowohl der soeben zitierte Ausdruck „Campanus lehrt“ als der S. 103 vorkommende Ausdruck „Stellen in der Euklidausgabe des Campanus“ ein wenig irreleitend; bekanntlich hat Curtze etwa 20 Handschriften dieser Euklidausgabe untersucht, ohne darin etwas über die Winkeldreiteilung zu finden (vergl. Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 262; Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **12**, 1902, S. 259), und soweit jetzt bekannt ist, kommt der Anhang über die Dreiteilung des Winkels zuerst in der bei Ratdolt gedruckten Ausgabe vom Jahre 1482 vor. Auf diesen Umstand deutet die zweite Bemerkung des Herrn Cantor hin (die in der 2. Auflage der *Vorlesungen* hinzugefügt ist), aber dann wäre eigentlich auch eine neue Redaktion der ersten Bemerkung erforderlich gewesen. G. Eneström.

---

2 : 105, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2 : 111**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 122**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 126, 127**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 157, 158**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 163, 166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 210**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 229, 242, 243**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 282, 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 328**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 353**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 381**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386, 395, 401, 405, 425**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 430**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481, 482**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900. S. 510. — **2 : 555, 565, 567, 568**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 592**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2 : 611**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 614, 620**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 638**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 655**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 665**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 674**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 693**, siehe

BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2:749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2:772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2:783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2:784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2:812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2:820, 825, 840, 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2:876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2:901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:12, 17,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:24, 25,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209.

3:25. Da PHILIPP RONAYNE hier als „sonst ganz unbekannt" bezeichnet wird, so sei bemerkt, daß dieser Mathematiker im Jahre 1717 in London ein ziemlich verbreitetes *Treatise of algebra* veröffentlichte, dessen zweite vermehrte Auflage daselbst 1727 in zwei Bänden erschien. G. ENESTRÖM.

3:26, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3:112,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210. — **3:116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513.

3:123. In Zeile 8—13 muß es statt des Textes heißen: „die in dieser Entwicklung auftretenden Koeffizienten von x^n, x^{n-1}, ... heißen Cascaden". Dann wäre nur Zeile 23 noch zu lesen: „die Wurzeln irgend einer *gleich Null* gesetzten Cascade . . ." Zur näheren Erläuterung mag noch folgendes bemerkt werden. Ist $f(v) = 0$ die gegebene Gleichung, so setzt ROLLE $v = x + z$ und bildet also $f(z + x)$

$$= f(z) + x\frac{f'(z)}{1!} + x^2\frac{f''(z)}{2!} + x^3\frac{f'''(z)}{3!} + \ldots + x^{n-1}\frac{\overset{(n-1)}{f}(z)}{(n-1)!} + x^n\frac{\overset{(n)}{f}(z)}{n!}.$$

Nach seiner Bezeichnung ist dann $\frac{\overset{(n-1)}{f}(z)}{(n-1)!}$ die erste, $\frac{\overset{(n-2)}{f}(z)}{(n-2)!}$ die zweite Cascade usw. Somit dient ihm die obige Substitution nur zur *Bildung* der Cascaden oder Abgeleiteten, wie wir sagen. Benutzt werden dieselben dann, um Grenzen, zwischen denen die reellen Wurzeln der Gleichung liegen, abzuleiten. Dazu bedient er sich des Theorems: „Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln a und b von $f'(z) = 0$ kann nur eine einzige Wurzel von $f(z) = 0$ liegen". Dieses Theorem allein gehört ROLLE an, nicht aber das gewöhnlich (so bei SERRET, *Handbuch der höheren Algebra,* deutsch von WERTHEIM I, 1868, 216 und bei NETTO, *Vorlesungen über Algebra* I, 1896, 208) als solches bezeichnete allgemeinere Theorem: „Zwischen zwei aufeinanderfolgenden reellen Wurzeln a und b von $f(z) = 0$ liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$, also stets mindestens eine". ROLLES Satz ist eine Folgerung von diesem. A. v. BRAUNMÜHL.

---

3 : 124, siehe BM 3_3, 1902, S. 407—408.

3 : 124. Anmerk. 1 muß es heißen pag. 151 statt 152.

3 : 126, siehe BM 4_3, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe BM 4_3, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM 3_3, 1902, S. 326.

3 : 167. Z. 29 soll nicht 1725 sondern 1722 stehen. Offenbar bezieht sich die Angabe auf die zweite Auflage des *Commercium epistolicum*, wo dem Auszuge aus dem Tangentenbrief von 1672 hinzugefügt wurde: „Missum fuit apographum hujus epistolae ad Tschirnhausium mense maio 1675" (siehe die Ausgabe von J. B. Biot und F. Lefort, Paris 1856, S. 84). Nun gibt es bekanntlich Exemplare dieser zweiten Auflage, die auf dem Titelblatte das Druckjahr 1725 tragen, aber die Auflage selbst erschien, wie Herr Cantor ganz richtig S. 326 des 3. Teiles seiner *Vorlesungen* angibt, schon 1722, und übrigens hat F. Lefort (a. a. O. S. IX) konstatiert, daß die Exemplare mit dem Druckjahre 1725 sich von den übrigen nur in betreff des Titelblattes unterscheiden. G. Eneström.

3 : 172—173. In der ersten Auflage des 3. Bandes seiner *Vorlesungen* hatte Cantor (S. 166) nach Weissenborn (*Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange*, Halle 1856, S. 39—41) angegeben, daß Newton in der *Methodus fluxionum* sich mit partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, und beanstandete die Newtonsche Behandlung dieser Gleichungen. Hiergegen machte Zeuthen in seiner Abhandlung *Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton* (Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 263) darauf aufmerksam, daß die angeblichen partiellen Differentialgleichungen in Wirklichkeit totale Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen waren, und daß Newtons Behandlung derselben durchaus einwandfrei war; mit Bezugnahme auf diese Bemerkung, die übrigens gar nicht neu war (vgl. z. B. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 2e éd. t. 2, S. 691), gab Cantor im Vorwort (S. VII) zur ersten Auflage des 3. Bandes der *Vorlesungen* zu, daß Newtons Gleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen als totale und nicht als partielle Differentialgleichungen betrachtet werden müssen. Besonders auffällig ist es darum, daß die betreffenden Gleichungen auch in der zweiten Auflage als partielle Differentialgleichungen bezeichnet werden. Worauf dies beruht, weiß ich nicht, aber jedenfalls scheint mir Zeuthens Bemerkung richtig zu sein. Natürlich sagt Newton nicht selbst, daß die Gleichungen totale Differentialgleichungen sind, aber ebenso wenig dürfte bei ihm irgend ein Ausdruck vorkommen, der darauf hindeutet, daß es sich um partielle Differentialgleichungen handelt, und unter solchen Umständen muß wohl die Tatsache, daß die Newtonsche Behandlung gerade für totale aber nicht für partielle Differentialgleichungen paßt, entscheidend sein. Es wäre ja in der Tat merkwürdig, wenn man ganz unnötigerweise von der Voraussetzung ausgehen sollte, daß Newton unrichtig verfahren ist. — In betreff der Bemerkung S. 173, daß das Newtonsche Verfahren „geeignet ist zur Integration zu führen, aber damit noch keineswegs Berechtigung gewinnt", dürfte es genügen, auf die zitierte Stelle in Zeuthens Abhandlung zu verweisen. G. Eneström.

3 : 174, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225**, 228, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 246**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 447**, 455, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 154—155.

---

3 : 473. Die Zeile 16 erwähnte Differentialgleichung $z^2 d^2 x = 2 x dz^2$ ist ein spezieller Fall der Seite 892 Zeile 19 erwähnten, von Johann Bernoulli bereits vor 1700 integrierten Gleichung. A. v. Braunmühl.

---

3 : 477, 479, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 521**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 441.

---

3 : 535. Daß Simpsons Unabhängigkeit in betreff der Anwendung von Hilfswinkeln nicht gegen jeden Zweifel gesichert ist, hat Herr Cantor selbst in seiner Besprechung vom 2. Teile der Braunmühlschen *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* im Archiv der Mathematik $\mathbf{6}_3$, 1903, S. 328—330 anerkannt. In der Tat hat Braunmühl (a. a. O., S. 44) nachgewiesen, daß Thomas Streete schon 1661 in seiner *Astronomia carolina* Hilfswinkel benutzt hat, um logarithmische Rechnungen zu erleichtern. Nach Cajori (Bulletin of the american mathematical society $\mathbf{10}_2$, 1903, S. 155—157) wird dieser Astronom Thomas Streete gewöhnlich mit dem Richter Thomas Street (1626—1696) verwechselt (so auch von Braunmühl a. a. O.). Cajori gibt an, daß Thomas Streete am 5. März 1621 in Castle Lyons (Irland) geboren war und am 17. August 1689 in Chanon-row bei Westminster starb.

G. Eneström.

---

3 : 565, 571, 578, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 614**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 652**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 660**, 667, 689, 695, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 441—442. — **3 : 750**, 758, 760, 766, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774**, 798, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848**, 881, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 447.

---

3 : 890. Im letzten Absatz dürfte die Bemerkung, daß Euler der erste war, der die Zurückführung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf solche erster Ordnung sich als eigentliche Aufgabe stellte, etwas abgeändert werden, da, wie S. 892 angegeben wurde, bereits Johann Bernoulli vor 1700 dieses Verfahren eingeschlagen hatte. A. v. Braunmühl.

---

3 : 892, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathfrak{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

113. Über einen Brief von Gerbert an Adelbold. Am 10. Mai 1896 schrieb mir Max Curtze: „Es ist mir geglückt, die Antwort Gerberts „auf den Brief Adelbolds von Utrecht *de crassitudine spaerae* in zwei Ab„schriften, davon eine aus der ersten Hälfte des XI. Jahrhunderts, aufzufinden. „Es ist wunderbar, daß alle, welche die Briefe Gerberts gesammelt haben, „an diesen beiden Exemplaren haben achtlos vorüber gehen können, da sie doch „in den betreffenden Bibliothekskatalogen deutlich und klar als solche be„zeichnet sind".

So viel ich weiß, hat Curtze diesen Fund in keinem seiner zahlreichen Artikel erwähnt, und auch in Bubnovs Ausgabe von Gerberts mathematischen Schriften habe ich vergebens Auskunft über den betreffenden Brief an Adelbold gesucht. Es ist wohl also anzunehmen, daß Curtze von den angedeuteten Bibliothekskatalogen irre geleitet worden ist, bald aber das Versehen entdeckt hat. Kann diese Annahme auf irgend eine Weise definitiv bestätigt werden?

G. Eneström.

---

114. Über die Geschichte des Begriffes „zweite Krümmung" und des Termes „Torsion". Daß bei Raumkurven neben den schon bei ebenen Kurven auftretenden Begriff der Krümmung ein weiterer, analoger Begriff tritt, hat wohl zuerst Monge in seinem *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes à double courbure* (verfaßt 1771, gedruckt im 10. Bande, 1785, des Mém. div. sav.) erkannt, ohne daß er allerdings diese Erkenntnis ausdrücklich formuliert und für den neuen Begriff einen besonderen Namen eingeführt hätte; der bei Pitot (1724) und Clairaut (1731) auftretende Terminus „Kurve doppelter Krümmung" hat mit der sogenannten zweiten Krümmung nichts zu tun (vgl. Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* 3^2, 428, 755). Erwähnung verdient dagegen vielleicht, daß Tinseau in seiner Abhandlung *Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure* (Mém. div. sav. 9, 1780) bei Kurven doppelter Krümmung Punkte linearer und Punkte planarer Inflexion unterscheidet, aber eine besondere Bezeichnung für die zweite Krümmung habe ich zuerst bei Lancret (*Mémoire sur les courbes à double courbure* [1802]; Mém. div. sav. 1_2, 1805) gefunden, der von erster und zweiter *Flexion* spricht, und für diese Unterscheidung sich auf mündliche Mitteilungen von Fourier beruft (vgl. auch Dupin, *Développements de géométrie,* Paris 1813, S. 334).

Es wäre von Interesse, vollständige Auskunft über die Entstehung des Begriffes „zweite Krümmung" zu haben, sowie festzustellen, wann und wo der jetzt gebräuchliche Name „Torsion" zuerst aufgetreten ist. Weder in den Lehrbüchern noch in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* habe ich darüber eine Angabe gefunden.[1])

Kiel. P. Stäckel.

---

1) Auch die Geschichte der Theorie der Krümmung von Flächen und Raumkurven von S. A. Christensen (*Om den historiske Udvikling af Theorien for Fladers og Rumkurvers Krumning*; Tidsskr. for Mathem. 1883, S. 97—127) enthält keine bestimmten Aufschlüsse hierüber; ebenso wenig die Dissertation von A. Haas, *Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmasses* (Tübingen 1881). G. E.

Antwort auf die Anfrage 93 über einen geometrischen Quadranten von 1594. Durch KÄSTNERS *Geschichte der Mathematik* III (Göttingen 1799), S. 379, bin ich zu der Vermutung veranlaßt, die betreffende Schrift rühre von LEVINUS HULSIUS her, und diese Vermutung scheint durch eine Angabe bestätigt zu werden, die ich in einem kürzlich erschienenen antiquarischen Kataloge gefunden habe. Dort wird nämlich eine Schrift mit folgendem Titel ausgeboten: HULSIUS, LEV., *Theoria et praxis quadrantis geometrici ... D. i. Beschreibung, Unterricht und Gebrauch des gevierdten Geometrischen u. a. Instrument, ...* Norimbergi, typ. Gerlach., sumptibus Cornelii de Judaeis 1594. 4°, 70 S. + 37 Taf.

G. ENESTRÖM.

Antwort auf die Anfrage 112 über den deutschen Mathematiker Andreas Alexander.[1]) Die Hof- und Staatsbibliothek in München besitzt zwei Exemplare des *Mathemalogium prime partis* ANDREE ALEXANDRI *Ratisbonensis mathematici super novam et veterem logicam* ARISTOTELIS. Am Ende der Schrift steht: „Opus mathemalogii ANDREE ALEXANDRI Ratisbonensis mathematici in novam et veterem logicam ARESTOTELIS finit. Melchior Lotter Liptzen̄. impressor solertissimus impressit Anno salutis millesimo quingentesimo quarto Nonis Marci“.

Das Titelblatt enthält ein Epigramm auf ANDREAS ALEXANDER von HERMANNUS BUSCHIUS (vgl. über diesen S. GÜNTHER, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525*, Berlin 1887, S. 212), das aber keinen Aufschluß über jenen gibt. Dagegen bietet die Einleitung etwas von Interesse dar. Sie beginnt mit den Worten: „ANDREAS ALEXANDER liberalium artium professor PAULO SCHRVOFFHEYM Gorlicensi (dieser war nach der Leipziger Universitätsmatrikel im Jahre 1504 Dekan der Universität) philosopho acutissimo et auditori suo S. P. D.“, und am Ende bemerkt der Verfasser, daß „presertim Colonie: in qua academia in bonarum artium professorem promotum glorior et exulto: semper hec mathematica floruerunt et floreant“. Man ersieht daraus, daß ANDREAS ALEXANDER im Jahre 1504 zum Professor der Mathematik an der Universität in Köln ernannt wurde, und dies stimmt auch mit den Angaben der Leipziger Universitätsmatrikel, wo er zum letzten Mal für das Sommersemester 1504 aufgeführt wird. Nach dieser Matrikel war er im Wintersemester 1502 Lehrer der „arithmetica communis“; im Sommersemester 1503 las er „mathematicam“ und im Sommersemester 1504 „perspectivam communem“.

C. R. WALLNER.

---

1) Nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn G. VALENTIN wird ANDREAS ALEXANDER auch in dem *Lexicon baierischer Gelehrten und Schriftsteller bis zum Ende des siebzehnten Jahrhunderts von* A. M. KOBOLT. *Mit Nachträgen von* G. M. GANDERSHOFEN (Landshut 1825, S. 311) erwähnt. Freilich wird hier nur angegeben, daß ANDREAS ALEXANDER ein Mathematiker aus Regensburg war, der 1504 in Leipzig ein *Mathemalogium* veröffentlichte. G. E.

Rezensionen.

J. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Zweiter Band. Geometrie. Logarithmen. Ebene Trigonometrie. Sphärik und sphärische Trigonometrie. Reihen. Zinseszinsrechnung. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kettenbrüche. Stereometrie. Analytische Geometrie. Kegelschnitte. Maxima und Minima. Leipzig, Veit 1903. VIII + 496 S. 8⁰. Mark 12.

Im ersten Bande seiner *Geschichte der Elementar-Mathematik* hatte Herr Tropfke Rechnen und Algebra behandelt, und man hätte darum erwarten können, daß der zweite Band als Untertitel „Analysis und Geometrie" tragen würde. Warum der Verfasser es vorgezogen hat, den Inhalt dieses Bandes sogleich in 12 Teile von so wesentlich ungleichem Umfange und Bedeutung zu sondern und alle diese Teile schon auf dem Titelblatte zu verzeichnen, ist mir unbekannt. Im Vorwort bemerkt er, daß die gewählte Anordnung sich im großen und ganzen dem Verlaufe des Schulpensums anschließt, aber dadurch scheint mir sein Verfahren nicht genug motiviert zu sein; in der Tat enthält ja sein Buch sehr vieles, das über den Rahmen des Schulunterrichts hinausgeht. Meines Erachtens wäre es besser gewesen, in eine Arbeit, die auf dem Titelblatte eine *systematische* Darstellung verspricht, die einzelnen Teile etwas weniger unsystematisch zu ordnen.

Etwas auffällig erscheint es mir auch, aus den 7 Druckseiten, worauf Maxima und Minima behandelt werden, einen besonderen „Teil" zu bilden, und die Benennung „Geometrie" für den ersten Teil ist wohl wenig glücklich gewählt, da später die Stereometrie in einem anderen Teile behandelt wird. Aber natürlich sind diese Ausstellungen von geringem Belang und wesentlich formaler Art.

Wie der erste Band, zeichnet sich auch dieser durch Reichhaltigkeit des Inhalts und Zuverlässigkeit der Angaben aus; die Zahl der Anmerkungen unter dem Texte übersteigt hier 1800. Auch aus dem zweiten Bande kann der Fachmann hie und da Belehrungen bekommen; so finden sich darin zahlreiche Beiträge zur Geschichte der mathematischen Terminologie, die offenbar auf unmittelbarem Studium der Quellen beruhen. Inwieweit der Verfasser allen Gegenständen, die in eine Geschichte der Elementarmathematik gehören, die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt hat, ist eine Frage, worüber natürlich die Ansichten verschieden sein können. Daß die Darstellung an gewissen Stellen ziemlich ausführlich, an anderen sehr knapp ist, beruht ohne Zweifel zum Teil darauf, daß der Verfasser von den früheren mathematisch-historischen Forschungen abhängig gewesen ist, und diese auf einigen Gebieten recht geringe Resultate an den Tag gebracht haben. Möglicherweise ist dies der Grund, warum der Verfasser z. B., obgleich er eine besondere Abteilung für Maxima und Minima

hat, gar nichts über die reine elementare Methode zur Lösung von Maximalfragen sagt (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 360).

Auch in betreff der Darstellungsweise ist die Arbeit des Herrn Tropfke verdienstvoll; sein Stil ist nicht selten schwungvoll, und nur ausnahmsweise geht er dabei zu weit, so daß er um der Phrase willen das wahre Sachverhältnis in einer nicht ganz richtigen Beleuchtung darstellt. Nur in einem Falle möchte ich eine rein sprachliche Ausstellung gegen ihn machen, nämlich in betreff seiner Anwendung des Wortes „Mittelalter", wodurch der Leser ganz unnötigerweise irregeleitet wird. Unter „Mittelalter" versteht er nämlich nicht nur das, was man gewöhnlich damit meint, sondern auch die folgende Zeit wenigstens bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts, denn S. 97 wird nicht nur Lahire sondern auch Maclaurin zum „Mittelalter" gerechnet. Welchen Nutzen es mit sich bringt, dem Worte eine solche Bedeutung zu geben, habe ich nicht erraten können.

Diesem zweiten Bande ist ein ausführliches Namen- und Sachregister (29 zweispaltige Druckseiten) der ganzen Arbeit hinzugefügt worden, wodurch das Auffinden der erwünschten Aufschlüsse dem Leser sehr erleichtert wird. In meiner Besprechung des ersten Bandes (siehe Biblioth. Mathem 4_3, 1903, S. 214) bemerkte ich, daß ich gewisse Sachen, die meiner Ansicht nach in eine Geschichte der Elementarmathematik gehören, vergebens gesucht hatte, und ich sprach die Vermutung aus, daß möglicherweise die Stellen, wo sie behandelt waren, meiner Aufmerksamkeit damals entgingen. Durch das Register bin ich jetzt in den Stand gesetzt, hierüber genauere Auskunft zu bekommen, und es zeigte sich dabei, daß meine Vermutung in einigen Fällen richtig war. Auf der anderen Seite fehlte wirklich etwas, was ich gesucht hatte, darunter fast gänzlich Notizen über die „Regula falsi". Bekanntlich hat diese Rechenmethode in der Geschichte der Arithmetik eine bedeutende Rolle gespielt, und man hat dieselbe nicht ohne Grund als einen Vorläufer zur Newton'schen Approximationsmethode bezeichnet (vgl. H. Weber und J. Wellstein, *Encyklopädie der Elementarmathematik* I, Leipzig 1903, S. 295). Auch für die Geschichte der mathematischen Zeichensprache ist die „Regula falsi" von Bedeutung gewesen, insofern die Zeichen + und — lange Zeit eigentlich nur dort angewendet wurden. Unter solchen Umständen ist es ein wenig auffallend, daß, wie man aus dem Register (S. 474: „Falsi, regula") ersieht, der Name „Regula falsi" freilich einmal (Bd. I, S. 33) zitiert wird, aber ohne die geringste Erklärung, so daß der nicht sachkundige Leser annehmen muß, es handle sich um etwas durchaus unwesentliches.

Im Vorworte gibt der Verfasser an, die herangezogene Literatur erstrecke sich in beiden Bänden bis zum Jahre 1900, mit welchem Zeitpunkte die Ausarbeitung abgeschlossen sei. Da nun die mathematisch-historische Forschung in den Jahren 1900—1903 bedeutende Errungenschaften auch auf dem Gebiete der Elementarmathematik aufzuweisen hat, so wäre das definitive Abschließen der Ausarbeitung mit dem Anfange des Jahres 1900 sehr zu bedauern gewesen. Glücklicherweise war es dem Verfasser, wie er auch im Vorworte andeutet, bei der Drucklegung möglich, hie und da unter Bezugnahme auf die neueste Literatur Verbesserungen anzubringen; freilich sind diese Verbesserungen (aus typographisch-technischen Gründen ?) zuweilen nicht in den Text, sondern nur in die Anmerkungen eingeführt, so daß der Leser, der nur den Text liest, die ältere, unrichtige Auskunft bekommt. So z. B. wird S. 118 im Texte gesagt, daß

bei VITRUVIUS einmal der Wert $\pi = 3^1/_8$ vorkommt, während in der Anmerkung 493 diese Angabe dahin berichtigt wird, daß nach der richtigen Lesart der betreffenden Stelle bei VITRUVIUS der Wert $\pi = 3$ benutzt wurde. Ebenso gibt Herr TROPFKE S. 410 an, daß bis zur Zeit des DIOFANTOS anscheinend eine Algebra gänzlich vermißt wurde, aber S. 412 (Anmerkung 1623[a]) wird auf einen Umstand hingewiesen, der beweist, daß schon zu HERONS Zeit die Algebra ziemlich hoch ausgebildet war. Ich bin natürlich nicht imstande zu entscheiden, ob die typographischen Schwierigkeiten, die eine kleine Änderung des Textes mit sich geführt hätte, unmöglich zu beseitigen waren, aber jedenfalls ist der von mir jetzt hervorgehobene Umstand zu bedauern.

In betreff der Einzelheiten der TROPFKEschen Arbeit erlaube ich mir hier unten einige kleine Bemerkungen hinzuzufügen; wie man daraus ersehen wird, stammt die dabei herangezogene mathematisch-historische Literatur zum größten Teil aus dem Zeitraume 1900—1903 her.

S. 5. Anm. 4 sollte über HIPPOKRATES nicht nur auf BRETSCHNEIDER sondern auch auf G. ALLMAN (Hermathena 4, 1881, S. 180—228) und P. TANNERY (Mémoires de la société des sciences de Bordeaux 5_2, 1882, S. 211—236) verwiesen werden. — Die weiter unten S. 110 (Anm. 475) zitierte Abhandlung von RUDIO scheint dem Verfasser bei der Drucklegung des ersten Bogens noch nicht zugänglich gewesen zu sein, sonst hätte er sie natürlich schon S. 5 anführen sollen.

S. 8. Die Bemerkung, daß auf dem geometrischen Gebiete „LEONARDO PISANO wegen der selbständigen Behandlung des von seinen Vorgängern übernommenen Stoffes rühmend genannt werden muß" ist nach den neuesten Untersuchungen von M. CURTZE zu modifizieren. CURTZE hat nämlich gezeigt (siehe *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance* I, Leipzig 1902, S. 6—9), daß LEONARDO ausgiebig und zum Teil wörtlich die ihm zugänglichen lateinischen Übersetzungen des PLATONE TIBURTINO und GHERARDO CREMONESE aus dem Hebräischen und Arabischen benutzt hat. — In dem Passus: „erst über arabische Autoren hinweg gelangte griechische Geometrie in reinerer Form zum Abendlande" wäre es vielleicht angebracht, nach „arabische" die Worte „und jüdische" hinzuzufügen.

S. 9. Daß LEONARDO PISANO und JORDANUS NEMORARIUS bis zur zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts „die Gewährsmänner abendländischer Gelehrten, die aus ihnen ihre ganze Weisheit entlehnen, bilden" ist vielleicht zu viel gesagt (vgl. z. B. die Angaben von M. CURTZE über DOMINICUS DE CLAVASIO in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 107—110).

S. 20. In betreff der Form „punctum" kann es von Interesse sein zu erwähnen, daß „Punkt" in der dänischen Sprache noch gen. neutr. ist („et Punkt, Punktet"), während das Wort in der schwedischen Sprache ganz wie in der deutschen gen. masc. ist.

S. 43. BRIANCHON wurde nicht 1785 sondern 1783 geboren und starb 1864, nicht 1870 (vgl. Biblioth. Mathem. 1894, S. 91 und 4_3, 1903, S. 99).

S. 44—45. Im Anschluß an eine Bemerkung von CURTZE in der ANARITIUS-Ausgabe (Vorwort S. XIV) behauptet Herr TROPFKE, die Verwendung eines Zirkels mit unveränderlicher Spannweite bei HERON sei gesichert. Diese Behauptung ist aber meiner Ansicht nach falsch. Es ist richtig, daß ANARITIUS dem HERON eine Lösung eines überaus einfachen Problems (Konstruktion der Senkrechten in dem Endpunkte einer Strecke) zuschreibt, wo nur ein Zirkel

benutzt wird, aber bei ANARITIUS gibt es gar keine Andeutung, daß es sich hier um eine besondere Konstruktionsmethode handelt. Hätte HERON beabsichtigt zu zeigen, mit welchem Erfolge man sich eines festen Zirkels bedienen kann, so würde er wohl auch den Punkt *e* auf diese Weise und nicht durch Halbierung des Winkels *agd* bestimmt haben. Die von CURTZE hervorgehobene Teilung einer Strecke in beliebig viele gleiche Teile (S. 75 der ANARITIUS-Ausgabe) kann ich ebenso wenig als eine bewußte Anwendung eines Zirkels mit unveränderter Spannweite ansehen, und übrigens behauptet ANARITIUS nicht, daß diese Teilungsmethode von HERON herrührt.

S. 46. Was der Verfasser mit dem Ausdrucke: „CAMPANUS in der ersten EUKLIDausgabe (um 1270) benutzte *tetragonus longus*" meint, ist mir nicht klar; daß CAMPANUS nicht der erste Übersetzer der *Elementa* aus dem arabischen war, hat Herr TROPFKE schon im 1. Teile (S. 13) angegeben, und übrigens ist es noch nicht entschieden, ob CAMPANUS wirklich eine eigene Übersetzung verfertigt hat (vgl. CURTZE, Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 262). Jedenfalls scheint der Term *tetragonus longus* schon bei ATELHARD von Bath vorzukommen (vgl. WEISSENBORN, *Die Übersetzungen des EUKLID aus dem Arabischen in das Lateinische durch ADELHARD von Bath;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **3**, 1880, S. 148).

S. 69. Über die Behauptung, daß das Abendland dem LEONARDO PISANO „erst wieder eingehendere mathematische Kenntnisse verdankt", vergleiche meine Bemerkung zu S. 8.

S. 102. Da die erste Schrift, worin Herr TROPFKE den Term „Goldener Schnitt" gefunden hat, aus dem Jahre 1854 herzurühren scheint, kann es vielleicht von Interesse sein, darauf hinzuweisen, daß A. WIEGAND 1849 eine Schrift mit dem Titel: *Der allgemeine goldene Schnitt und sein Zusammenhang mit der harmonischen Theilung* veröffentlichte, (vgl. POGGENDORFFS *Biogr.-lit. Handwörterbuch* II, 1320); und daß derselbe Verfasser zwei Jahre früher den Ausdruck „Goldener Schnitt" in seinen *Geometrischen Lehrsätzen und Aufgaben* (Bd. II, Halle 1847, S. 142) benutzt hatte.

S. 111. Wenn Herr TROPFKE hier von einer Methode redet, „die unter dem Namen der Exhaustionsmethode in der griechischen Mathematik eine bedeutende Rolle gespielt hat" so ist seine Redeweise ein wenig irreleitend — der Name „Exhaustionsmethode" kommt in der griechischen Mathematik nicht vor. Übrigens hat kürzlich Herr C. R. WALLNER (siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 252) versucht zu zeigen, daß die Exhaustionsmethode nicht von den griechischen Mathematikern, sondern zuerst von GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT angewendet wurde.

S. 119. Die Kreisquadratur des IBN AL-HEITAM ist 1899 von H. SUTER veröffentlicht und übersetzt (Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899, Hist. Abt. S. 33—47; vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 500). — Die *Practica geometriae* des DOMINICUS DE CLAVASIO ist nicht vom Jahre1378; eine Handschrift rührt aus dem Jahre 1368 her, und in einer anderen Handschrift wird angegeben, die Arbeit sei 1346 verfasst worden (vgl. unten die Anmerkung zu Seite 208).

S. 133. Die Verdienste des J. H. LAMBERT um die Lehre von der Irrationalität der Zahl π hat Herr TROPFKE nicht ganz richtig gewürdigt, offenbar weil ihm die Abhandlung des Herrn A. PRINGSHEIM *Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π*; Sitzungsberichte der bayerischen



Akademie der Wissenschaften 28, 1898 (Math. Cl.), S. 325—337 unbekannt war. Die Arbeit von LAMBERT, die in erster Linie berücksichtigt werden soll, nämlich der *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques* aus dem Jahre 1768 nennt Herr TROPFKE nicht, und die Angabe, daß LEGENDRE den strengen Beweiß, daß ein unendlicher Kettenbruch, wie der gefundene, wirklich irrational ist, nachholte, ist unter Bezugnahme auf die Abhandlung von PRINGSHEIM zu modifizieren.

S. 148, 150. Auffälligerweise findet sich hier die unrichtige Angabe, daß die Basis der NEPERschen Logarithmen $1-\frac{1}{10^7}$ ist, und sich also „nur wenig" von $\frac{1}{e}$ unterscheidet, obgleich Herr TROPFKE S. 214 das KOPPEsche Programm: *Die Behandlung der Logarithmen und des Sinus im Unterricht* (1893) zitiert, wo die Sache richtig aneinander gesetzt wird.

S. 177. COTES wurde nicht 1652 sondern 1682 geboren. Derselbe Fehler findet sich weiter unten S. 334 sowie S. 227 des 1. Bandes.

S. 183 (vgl. S. 326). Herr TROPFKE gibt an, daß die NEWTONsche *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* 1704 gedruckt wurde, und wahrscheinlich hat er diese Angabe der „Table des matières" (S. XI) der Ausgabe des *Commercium epistolicum* von BIOT und LEFORT (1856) entnommen. Indessen ist die Angabe unrichtig; im Jahre 1704 wurde die *Quadratura curvarum* als Anhang zur Optik herausgegeben, während die *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* zuerst 1711 erschien (vgl. z. B. CANTOR, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* 3^2, S. 302).

S. 200 (vgl. S. 254). Das *Analemma* des PTOLEMAIOS enthält nicht nur, wie Herr TROPFKE angibt, eine konstruktive Lösungsmethode sphärisch-trigonometrischer Aufgaben, sondern auch eine rein rechnerische Methode (siehe ZEUTHEN, *Note sur le trigonométrie de l'antiquité;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 20—27).

S. 203. Daß der Radius schon lange Zeit vor JOHANN VON GMÜNDEN den Namen „sinus totus" führte, dürfte jetzt ziemlich bekannt sein. In der Tat hat sich schon GHERARDO CREMONESE in seiner Übersetzung der *Canones* des ZARKALI dieses Namens bedient (siehe z. B. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 345: „[Chorda] equalis dimidio diametri circuli . . . est sinus totus"). — In betreff der Teilung des Radius verdient hier erwähnt zu werden, was Herr TROPFKE später (S. 299) selbst angibt, daß im christlichen Mittelalter auch eine solche in 150 Einheiten vorkommt, und zwar rührt diese Teilung von ZARKALI her.

S. 208. Hier sind verschiedene Verbesserungen wünschenswert. Zuerst ist Herr TROPFKE durch einen kleinen Flüchtigkeitsfehler von BRAUNMÜHL (*Vorl. üb. Gesch. d. Trigon.* I, S. 98) verleitet worden anzugeben, daß ROBERTUS ANGLICUS um 1231 gelebt hat (um diese Zeit lebte GUILELMUS ANGLICUS), obgleich die in Anm. 781 zitierte Quelle die richtige Angabe (um 1271) hat. Ferner ist die Notiz, daß DOMINICUS DE CLAVASIO am Ende des vierzehnten Jahrhunderts lebte zu modifizieren, da dieser Mathematiker schon 1349—1350 als Magister der Artistenfakultät in Paris angehörte, und eine Handschrift seiner *Practica geometriae* angibt, daß die Arbeit im Jahre 1346 vollendet wurde (siehe CURTZE *Über den DOMINICUS PARISIENSIS der „Geometria Culmensis";* Biblioth. Mathem. 1895, S. 107—110). Mehr zu bedauern ist indessen, daß Herr TROPFKE nicht schon hier die CURTZEsche Arbeit *Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 321—416), die er weiter unten S. 299 zitiert, zu rate gezogen hat.

Dort hätte er finden können (S. 342—343), daß ZARKALI wirklich die Verwendung der *umbra* lehrte, und daß diese trigonometrische Funktion schon lange Zeit vor ROBERTUS ANGLICUS im Abendlande bekannt war, nämlich durch die oben zitierte von GHERARDO CREMONESE verfertigte Übersetzung der *Canones* des ZARKALI; in einem Kommentar dieser Übersetzung, der wahrscheinlich von GUILELMUS ANGLICUS herrührt (also um 1231), kommen (S. 352—353) sowohl „Proportio umbre ad rem" (= Kotangente) als auch „proportio rei ad umbram" (= Tangente) vor.

S. 210 (vgl. S. 230, 256, 277). Die verschollene Trigonometrie des JOHANNES WERNER wurde vor ein paar Jahren von A. A. BJÖRNBO in der Vatikanischen Bibliothek in Rom wiedergefunden (siehe Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 242—243).

S. 214. Die Bemerkung, es sei leicht möglich, daß das einmal im Druck der ALBATTANIschen Astronomie von 1537 vorkommende Wort „sinus" irrtümlich in den Text gelangt ist, scheint mir mit unnötiger Vorsicht formuliert; meiner Ansicht nach kann man bestimmt behaupten, daß das Wort wirklich auf diese Weise in den Text gelangt ist (vgl. BRAUNMÜHL, a. a. O. I, S. 50).

S. 224, 236. Als Erscheinungsjahr der Trigonometrie des PITISCUS gibt Herr TROPFKE 1599 an, aber ohne Zweifel ist 1600 richtiger. Zur Zeit kennt man, so viel ich weiß, kein Exemplar, das auf dem Titelblatte die Jahreszahl 1599 trägt, und die Bibliographen können ihre Angaben aus dem Vorworte, das vom 23. August 1599 ist, entnommen haben (vgl. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 271). — S. 267 spricht Herr TROPFKE noch von einer Auflage 1595 aber bekanntlich erschien in diesem Jahre eine andere trigonometrische Schrift (ein Abriß der sphärischen Trigonometrie) des PITISCUS (vgl. BRAUNMÜHL, a. a. O. I, S. 223).

S. 243. Daß man die HERONische Formel $I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ im Mittelalter ganz allgemein für eine Entdeckung des JORDANUS NEMORARIUS hielt, ist, so viel ich weiß, unrichtig, und Herr TROPFKE gibt keinen anderen Beweis für diese Behauptung, als ein Zitat aus SCHWENTERS *Geometria practica*. Aus diesem Zitate geht aber nicht einmal hervor, daß SCHWENTER selbst die Formel für eine Entdeckung des JORDANUS NEMORARIUS hielt, sondern nur, daß er behauptete, die Formel sei der „Geometria JORDANI" entnommen, was wohl auf einer Verwechselung beruht. Herr TROPFKE hätte freilich noch erwähnen können, daß nach CHASLES schon RAMUS in seinen *Scholae mathematicae* die Formel dem JORDANUS zuschreibt, aber auch nicht dieser Umstand genügt, um die TROPFKEsche Behauptung aufrecht zu halten.

S. 246. Bei der Erwähnung der Formel für die Fläche des Sehnenvierecks wäre es vielleicht von Interesse zu bemerken, daß schon REGIOMONTANUS sich mit dieser Frage beschäftigte, freilich ohne irgend eine Formel anzugeben (vgl. CANTOR, a. a. O. 2^2, S. 282).

S. 313. Es ist zu bedauern, daß Herrn TROPFKE die CURTZEsche Ausgabe des *PETRI PHILOMENI DE DACIA in Algorismun vulgarem JOHANNIS DE SACROBOSCO commentarius* (Kopenhagen 1897) nicht zugänglich gewesen ist, denn daraus hätte er eine wertvolle Ergänzung seiner Darstellung der Geschichte der arithmetischen Reihen entnehmen können. CURTZE weist nämlich nach (S. XV der Einleitung), daß schon bei PETRUS DE DACIA ein bedeutender Schritt über SACROBOSCO

hinaus sich vorfindet, den Herr TROPFKE erst bei CHUQUET gefunden zu haben scheint.

S. 320. Daß NEWTON in seinen *Principia* die nach ihm benannte Interpolationsformel nur andeutet, ist unrichtig; die Formel wird dort vollständig ausgeschrieben, und unterscheidet sich nur in betreff der Bezeichnung von der jetzt geläufigen Form. — Kaum richtiger ist die Bemerkung S. 397, daß NEWTON in der *Methodus differentialis* seine Ideen in den *Principia* zu der nach ihm benannten Interpolationsformel vervollkommnete; der Fortschritt, den die *Methodus differentialis* repräsentiert, bezieht sich nicht auf die NEWTONsche Interpolationsformel, sondern auf zwei andere Formeln für die sogenannte Interpolation aus der Mitte (vgl. BRAUNMÜHL, *Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation*; Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 86—96).

S. 321. Daß TARTAGLIA nicht die Vorschriften des LEONARDO PISANO um die Summationsregel für die Quadrate der durch 3 und 4 teilbaren Zahlen vermehrt hat, dürfte aus folgenden Zeilen aus dem *Liber abbaci* (ed. BONCOMPAGNI, S. 167—168) hervorgehen: „Similiter potes habere summam omnium quadratorum, qui fiunt a numeris ascendentibus ordinate per ternarium, uel per quaternarium, uel per alium quemlibet numerum. Vt si uis habere summam quadratorum, qui fiunt a numeris ascendentibus per quaternarium, incipiendo a quadrato quaternarii, qui est 16, usque quadratum alicuius numeri . . . 20, que est 400; pones primum 20, et eum ipsum scribes sequentem numerum per quaternarium ascendendem, scilicet 24: sub ipsis quidem pones 44, scilicet numerum coniunctum ex eis; et multiplicabis 20 per 24; quod totum per 44, et diuides summam per 6, et per numerum ascendentem per 4 . . . et sic fiet in ceteris". Die Formel für die durch 3 teilbaren Zahlen gibt LEONARDO in seinem *Liber quadratorum* (*Scritti*, ed. BONCOMPAGNI II, S. 264) ausdrücklich an.

S. 330. Schon vor PASCAL hatte MAUROLICO die Methode der vollständigen Induktion angewendet (siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 88).

S. 387. Hier erwähnt Herr TROPFKE eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes für ein rechtwinkliges Tetraeder und den entsprechenden Satz im allgemeinen Tetraeder; die erste scheint er zuerst in einer Schrift vom Jahre 1807 gefunden zu haben, und für den anderen Satz verweist er nur auf ein Lehrbuch vom Jahre 1852. Aber vor fünf Jahren habe ich in meinem Artikel *Note historique sur une proposition analogue au théorème de* PYTHAGORAS (Biblioth. Mathem. 1898, S. 113—114) darauf aufmerksam gemacht, daß die Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes schon 1780 von TINSEAU veröffentlicht wurde, und daß DE GUA einige Jahre später (1786) behauptete, er habe diese Verallgemeinerung schon ein paar Jahrzehnte früher gefunden. In betreff des Satzes im allgemeinen Tetraeder habe ich in demselben Artikel angegeben, wie er von DE GUA 1786 formuliert wurde.

S. 402. Hinsichtlich des sogenannten 15. Buches der *Elementa* sagt Herr TROPFKE: „Man hat Anhaltspunkte, daß der Verfasser nicht HYPSIKLES, wie die Handschriften melden, sondern ein anderer unbekannter Mathematiker ist, der mehrere Jahrhunderte n. Chr. gelebt haben muß." Hierbei kann bemerkt werden, daß HEIBERG (*Litterargeschichtliche Studien über* EUKLID, Leipzig 1882, S. 154—155) darauf hingewiesen hat, daß in fast allen griechischen Handschriften der Name des HYPSIKLES nur vor dem 14. Buche steht, und daß dieser Name später, wohl lediglich durch Mißverständnis auch auf das 15. Buch übertragen

wurde. Übrigens ist es wahrscheinlich, daß das 15. Buch nicht von einem, sondern von drei verschiedenen Verfassern herrührt, von denen der letzte vermutlich im 6. Jahrb. n. Chr. gelebt hat (vgl. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia* II, Modena 1895, S. 91—92).

S. 413. Die Richtigkeit der Behauptung, daß die *Summa* des Paciuolo „fast ein Jahrhundert lang in der Mathematik eine herrschende Stellung einnahm", muß ich bestimmt bestreiten, und es dürfte Herrn Tropfke schwer werden, Belege für seine Behauptung zu geben.

S. 423. Der Passus: „Es ist zweifelhaft, ob die Abfassung einer Abhandlung, die Johann Bernoulli 1728 einem Fachgenossen zugeschickt haben will . . . schon bis zu jener Zeit zurückreicht" beruht wahrscheinlich auf Mißverständnis einer Stelle bei Cantor (a. a. O. 3^2, S. 244). Der fragliche Fachgenosse war der schwedische Mathematiker Samuel Klingenstierna, der sich Ende 1728 in Basel aufhielt, wo Johann Bernoulli ihm mündlich seine Bestimmung der Gleichung der geodätischen Linie auf einer Oberfläche mitteilte. Eine Aufzeichnung dieser mündlichen Mitteilung findet sich in den *Opera omnia* (T. IV, S. 108—111) des Johann Bernoulli, und man hat gar keinen Grund anzunehmen, daß diese Aufzeichnung nicht authentisch ist; im Gegenteil geht aus dem Briefwechsel zwischen Euler und Johann Bernoulli hervor, daß dieser sich gerade im Jahre 1728 eingehend mit der Frage der geodätischen Linie auf einer Oberfläche beschäftigt hatte (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 354—355).

S. 426. Zeile 6 ist 1642 statt 1644 zu setzen (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 286). — Der Term „Abscissa" kommt schon in der *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* des Cavalieri (1635) vor (siehe Wallner, Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 37).

S. 438. Die in Anm. 1735 als unwahrscheinlich bezeichnete Vermutung, der Titel der Archimedischen Schrift über die Quadratur des Parabels sei ursprünglich „Ephodikón" gewesen, ist später von Herrn W. Schmidt selbst dahin modifiziert worden, daß die Quadratur des Parabels wahrscheinlich ein Bruchstück aus der sonst verlorenen Schrift „Ephodikón" ist (siehe Biblioth. Mathem. 3_3, 1903, S. 143—144). Der Umstand, daß Eutokios die Redeweise: „Abhandlung über den Schnitt des rechtwinkligen Kegels" anwendet, scheint mir für die Frage über den wirklichen Titel der Archimedischen Schrift wenig zu bedeuten.

S. 462. Die Angabe, daß bei Oresme eine „dunkle Ahnung, daß an einer Maximalstelle der Differentialquotient verschwinden muß" vorkommt, beruht auf einem Mißverständnis (vgl. Timtchenko, Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 515—516).

Das Register am Ende des Buches ist sorgfältig bearbeitet. Herr Tropfke hat dabei noch angegeben, wo die wichtigsten Schriften der zitierten Verfasser erwähnt werden. Solche Angaben erfordern zuweilen besondere Sachkunde, die ihm nicht immer zur Verfügung gestanden hat; so z. B. handelt es sich Bd. I, S. 66 nicht, wie das Register angibt, um den *Algorithmus demonstratus*, sondern um die *Arithmetica* des Jordanus Nemorarius. Dagegen beruht es nur auf einem Übersehen, daß für *Algorithmus demonstratus* auf Bd. I, S. 236 und Anm. 969 verwiesen wird, da an der betreffenden Seite *De numeris datis* ausdrücklich zitiert wird. Daß Johannes Maudith, für welchen auf Bd. II,

S. 299 verwiesen wird, mit dem Bd. II, S. 208 zitierten MAUDITH identisch ist, dürfte Herrn TROPFKE bei der Bearheitung des Registers entgangen sein, da der eine unter J, der andere unter M aufgeführt wird. Von Druckfehlern, die das Auffinden der Aufschlüsse erschweren, nenne ich nur die auf S. 482, wo für die „Lunulae HIPPOCRATIS“ auf S. 174—176 statt 74—76 verwiesen wird.

Die große Mühe, die sich Herr TROPFKE gegeben hat, um seine *Geschichte der Elementarmathematik* zu einem möglichst vollständigen und zuverlässigen Nachschlagebuch zu machen, verdient besonders anerkannt zu werden. Ich erlaube mir den Wunsch auszudrücken, daß gerade die Lücken, die seine Arbeit aufzuweisen hat, recht viele Schullehrer anregen möchten, dieselben durch mathematisch-historische Untersuchungen auszufüllen und die Resultate in Schulprogrammen zu veröffentlichen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.



Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8⁰. [1

17 (1903). — [Rezension des Heftes 14:] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 312—313. (M. Cantor.)

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2

4_3 (1903): 3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8⁰. [3

32 (1901): 2.

Annuaire des mathématiciens 1901—1902 publié sous la direction de C. A. Laisant et Ad. Buhl (1902). [Rezension:] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 322. (E. Jahnke.) [4

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq (1902). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 14, 1903; Lit.-Ber. 83—84. (v. E.) — Wiadomości matem. 7, 1903, 180—202. (S. Dickstein.) [5

Eneström, G., Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik. [6

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 225—233.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^2 (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 283—284. (A. Sturm, G. Eneström.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 284—288. (A. Sturm, G. Eneström, C. Grönblad.) — 3^3 (1901). [Kleine Bemerkungen:] 4_3, 1903, 288. (G. Eneström.) [7

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, traduite par J. Mascart (1902). [Rezension:] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 330—332. (E. Lampe.) — L'enseignement mathém. 5, 1903, 390—391. (J. Boyer.) — The mathem. gazette 2, 1903, 248—249. [8

Zeuthen, H. G., Forelaesninger over Mathematikens Historie. II. 16de og 17de Aarhundrede. Kjöbenhavn, Höst 1903. [9

8, (3) + VIII + 612 S.

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. Meyer. Leipzig, Teubner 1903. [10

Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 17. VIII + 434 S. — [16 M.] — [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 2509—2510. (M. Cantor.)

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Zweiter Band. Geometrie. Logarithmen. Ebene Trigonometrie. Sphärik und sphärische Trigonometrie. Reihen. Zinseszinsrechnung. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kettenbrüche. Stereometrie. Analytische Geometrie. Kegelschnitte. Maxima und Minima. Leipzig, Veit 1903. [11

8⁰, VIII + 496 S. — [12 M.] — [Rezension des 1. Bandes:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 432—434. (S. Gunther.)

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte (1902). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 14, 1903; Lit.-Ber. 63—64. (G. K.) [12

Carrara, B., I tre prohlemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. II. [13

Rivista di fisica (Pavia) 3, 1902, 926—939, 1056—1071; 4, 1903, 39—60, 142—156. — Der zweite Teil ist auch als Sonderabzug erschienen. — [Rezension des 2. Teiles.] Periodico di matem. 1_3, 1903, 52—53. (K.)

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). [Rezension:] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 328—330. (M. Cantor.) [14

Mach, E., Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Aufl. 4 (1901). [Rezension:] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 149—150. (E. Jahnke.) [15

Mach, E., The science of mechanics. A critical and historical account of its development. Transl. hy Th. J. Mc Cormack. Second edition (1902). [Rezension:] *New-York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1903, 80—86. (E. B. Wilson.) [16

Duhem, P., Les origines de la statique. [17

Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 4_3, 1903, 462—516.

Heun, K., Über die Einwirkung der Technik auf die Entwicklung der theoretischen Mechanik. [18

Deutsche Mathem. Verein., Jahresber. 12, 1903, 389—398.

Mach, E., Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt. Aufl. 2 (1900). [Rezension:] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 306—309. (A. Rothe.) [19

***Dannemann, F.**, Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften. II. Die Entwickelung der Naturwissenschaften. Zweite neu bearbeitete Auflage. Leipzig, Engelmann 1903. [20

8⁰, 450 S. — [10 M.]

Wölffing, E., Über die hibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. [21

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 408—426. — Hauptsächlich ein Auszug aus der Einleitung zum Mathematischen Bücherschatz. 1 (Leipzig, Teubner 1903).

b) Geschichte des Altertums.

Kugler, F. X., Die babylonische Mondrechnung (1900). [Rezension:] Götting. gelehrte Anz. 1902, 363—372. [22

***Schiaparelli, G.**, L'astronomia nell' Antico Testamento. Milano, Hoepli 1903. [23

8⁰. — [3 lire.]

Tannery, P., Y a-t-il un nombre géométrique de Platon? [24

Revue des études grecques 1903.

Hultsch, F., Diophantos. [25

Pauly-Wissowa, *Realencyklopädie* 5, 1903, 1052—1073. — In diesem und im vorangehenden Bande finden sich viele andere Artikel von F. Hultsch zur Geschichte der griechischen Mathematik (Deinostratos, Demetrios, Diodoros, Diokles, Dion aus Neapel, Dionysios, Dionysodoros, Dioptra, Domninos, Dositheos).

Schmidt, W., Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser. [26

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 234—237.

c) Geschichte des Mittelalters.

Ibn al-Qifti, Tarich al-hukama. Auf Grund der Vorarbeiten Aug. Müllers herausgegeben von J. Lippert. Leipzig, Dieterich 1903. [27

4⁰, 22 + 496 S. — [26 M.] — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 293—302. (H. Suter.)

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance (1902). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 14, 1903; Lit.-Ber. 69—70. (St.) [28

Dünner, L., Die älteste astronomische Schrift des Maimonides (1902). [Rezension:] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 2777. — Monatsh. für Mathem. 14, 1903; Lit.-Ber. 66. (v. H.) [29

Björnbo, A. A., Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz. I. [30

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 238—245.

Björnbo, A. A., Ein Lehrgang der Mathematik und Astrologie im Mittelalter. [31

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 288—290.

Birkenmajer, L. A., Commentariolum super Theoricas novas planetarum Georgii Purbachii per Albertum de Brudzewo (1900). [Rezension:] Prace matem.-fizyczne 14, 1903, 292. (S. D.) [32

Eneström, G., Über den italienischen Mathematiker Leonardo Mainardi. [33

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 290. — Anfrage.

Leonardo da Vinci as a hydraulic engineer. [34

Nature 67, 1903, 440—441.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Lazarin, A., [Einige Notizen üher die Geschichte der Mathematik in Rumänien.] [35

Gazeta matematica (Bukarest) 8, 1904, 173—174.

Eneström, G., Über den deutschen Mathematiker Andreas Alexander. [36

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 290—291. — Anfrage.

Birkenmajer, L. A., Mikolaj Kopernik. I (1900). [Rezension:] Prace matem.-fizyczne 14, 1903, 292. (S. D.) [37

Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XIII. Firenze, Barbera 1903. [38

4⁰, 490 + (6) S. — Herausgegeben von A. Favaro.

Favaro, A., Per la storia dei manoscritti Galileiani concernenti i pianeti medicei. [39
Venezia, Istituto Veneto, Atti 62 : 2, 1903, 1083—1103.

***Grimaldi, V.,** La mente di Galileo Galilei desunta principalmente dal libro „De motu gravium". Napoli 1901. [40
8°. — [Rezension :] *Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti 34_2, 1901, 762—763. (G. Celoria.)

Wallner, C. R., Über die Entstehung des Grenzbegriffes. [41
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 246—259.

Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery. Tome V (1903). [Rezension :] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 4_3, 1903, 610—615. (G. Lechalas.) [42

Shedd, J. C., Concerning the word „Barometer". [43
Science 18_2, 1903, 278—280.

Koppe, M., Die Bestimmung sämtlicher Näherungsbrüche einer Zahlengröße bei John Wallis (1672). [44
Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 2, 1903, 56—60.

Csorba, G., [Die Literatur über Partition von Zahlen]. [45
Mathematikai és physikai lapok (Budapest) 10, 1902, 257—281. — Ungarisch.

Burkhardt, H., Entwicklung nach oscillirenden Functionen. Bericht. 3. Lieferung. [46
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber, 10 : 2, 1903, 401—768.

Stäckel, P., Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten. [47
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 469—481.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. 1 (1903). [Rezension :] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 302—313. (G. Eneström.) — Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 2329—2330. (E. Lampe.) [48

Günther, S., Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert (1901). [Rezension :] Arch. der Mathem. 6_3, 1903, 153—154. (H. Samter.) [49

***Hoorn, J. van,** Historisch-critisch overzicht der in de vorige eeuw verschenen methode vor het stelonderwijs. Groningen 1903. [50
8°, 252 S. — [3 M.]

Purser, J., The Irish school of mathematicians and physicians from the beginning of the 19th century. Opening address. [51
British association, Report 72 (Belfast 1902), 1903, 499—511. — Vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 108.

Eneström, G., Sur les frères Français. [52
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 291—292. — Antwort auf eine Anfrage.

Dickstein, S., Pierwsze czasopismo matematyczno-fizyczne polskie. [53
Wiadomości matem. 7, 1903, 169—176. — Die erste polnische mathematisch-physische Zeitschrift.

***Sager, P.,** Übersicht über die Entwicklung der Theorie der geodätischen Linien seit Gauss. Rostock 1903. [54
8°, 89 S.

Gauss, K. F., General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825 (1902). [Rezension :] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 457—458. (G.) — The mathem. gazette 2, 1903, 215—216. [55

Schlesinger, L., Neue Beiträge zur Biographie von Wolfgang und Johann Bolyai. [56
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 260—270.

Sturm, R., Zusammenstellung von Arbeiten, welche sich mit Steinerschen Aufgaben beschäftigen (1903). [Rezension :] Deutsche Litteraturz. 24, 1903, 2452. [57

Jahraus, K., Das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, historisch-kritisch dargestellt (1902). [Rezension :] Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 440 - 441. (H. Wieleitner.) [58

Ludwig, F., Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. [59
Zeitschr. für Mathem. 49, 1903, 269—277.

International catalogue of scientific literature. A. Mathematics. B. Mechanics. (1902.) [Rezension :] *Amsterdam*, Wisk. genoos., Nieuw archief 6_2, 1903, 71—73. (D. J. K.) [60

e) Nekrologe.

Karl **Ackermann** (1841—1903). [61
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 521—524 [mit Porträt]. (L. Fennel.)

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1903). [62
Kristiania, Videnskabsselsk., Forhandl. 1903. (W. Bjerknes.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [63
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 9_3, 1903, 174—175. (E. Fergola.) — Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 465—467. (E. Lampe.)

Leopold **Gegenbauer** (1849—1903). [64
L'enseignement mathém. 5, 1903, 296. — Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 471—472.

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [65
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1903, 34—39. (P. F. Smith.)

Cato Maximilian **Guldberg** (1836—1902). [66
Kristiania, Videnskabsselsk., Forhandl. 1903. 12 S. (H. Goldschmidt.)

Meyer **Hamburger** (1838—1903). [67
Wiadomości matem. 7, 1903, 208—210 [mit Schriftverzeichnis]. (A. Denizot.)

Ernst **Kossak** (1839—1892). [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 500—504. (E. Lampe.)

Josef **Petzval** (1807—1891). [69

Erményi, *Josef Petzvals Leben und Verdienste*. Zweite vermehrte Auflage. Halle 1903. 8°, IV + 86 S.

J. G. **Zettu** (1870—1902). [70

Gazeta matematica (Bukarest) 7, 1902, 269.

f) Aktuelle Fragen.

Müller, Felix, Über Vorlesungen zur Einführung in die mathematische Literatur. [71

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 271—279.

Weber, H., Über die Stellung der Elementarmathematik in der mathematischen Wissenschaft. [72

Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 393—397. — Deutsche Mathem. Verein., Jahresber. 12, 1903, 398—401. — Wesentlich ein Abdruck der Vorrede zur *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*. I (Leipzig, Teubner 1903).

[Der Kongress für Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften in Rom 1903.] [73

Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 280—283. (G. Vacca.) — L'enseignement mathém. 5, 1903, 378—383. (E. Lebon.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 530—533. (Felix Müller.)

[Die deutsche Mathematiker-Versammlung in Kassel 1903.] [74

Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 553—556, 620. (E. Wölffing.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor H. Andoyer in Paris zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent C. H. Ashton[1]) in Cambridge, Mass., zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas.

— C. R. Burger zum Professor der Mathematik an der „Colorado school of mines".

— Dr. C. K. Edmunds zum Professor der Physik am „Christian college" in Macao, China.

— Privatdozent J. W. Glover in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan daselbst.

— Privatdozent A. G. Hall in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois.

— Dozent H. E. Hawkes in New Haven zum Professor der Mathematik am „Yale university" daselbst.

— Dr. E. R. Hedrick in New Haven znm Professor der Mathematik an der Universität von Missouri.

— Privatdozent O. Krigar-Menzel in Berlin zum Professor der theoretischen Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Artilleriehauptmann A. J. J. Lafay zum Professor der Physik an der „Ecole polytechnique" in Paris.

— Professor A. V. Leboeuf in Montpellier zum Professor der Astronomie an der Universität in Besançon.

— A. C. Minear zum Professor der Mathematik am „university of Southern California".

— Professor H. Padé in Poitiers zum Professor der Mechanik an der Universität in Bordeaux.

— Professor P. Painlevé in Paris zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent K. Petr in Brünn zum Professor der Mathematik an der Universität in Prag.

— Professor J. B. Shaw in Gambier, Ohio zum Professor der Mathematik an der „James Millikan university" in Decatur, Illinois.

— Oberlehrer am Lyceum in Straßburg M. Simon zum Honorarprofessor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr Arthur W. Smith zum Professor der Physik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Privatdozent E. Steinitz in Berlin zum etatsmäßigen Dozenten der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent C. Störmer in Kristiania zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dozent Turpain in Poitiers zum Professor der Physik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Professor W. Wirtinger in Innsbruck zum Professor der Mathematik an der Universität in Wien.

Todesfälle.

— Karl Ackermann, pensionierter Direktor der Oberrealschule in Kassel, geb. in Fulda den 2. März 1841, gestorben in Kassel den 23. April 1903.

— Benjamin G. Brown, Professor der Mathematik am „Tufts college" in Nord-

1) Hierdurch wird die Angabe S. 319 berichtigt.

amerika, gestorben den 29. September 1903, 66 Jahre alt.

— Gustaf Robert Dahlander, pensionierter Direktor der Technischen Hochschule in Stockholm, geboren in Göteborg den 7. Juni 1834, gestorben in Stockholm den 27. September 1903.

— Hermann Gerlach, Pensionierter Professor am Gymnasium in Parchim (Mecklenburg), geboren in Körmigk bei Köthen den 9. Mai 1826, gestorben in Parchim den 15. Juni 1903.

— Gustav Adolph Köpp, früher Direktor des Realgymnasiums in Eisenach, geboren in Braunschweig den 7. Februar 1819, gestorben in Eisenach den 15. Okt. 1903.

— Julius Lange, Direktor des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin, geboren in Liebenwalde den 17. November 1846, gestorben den 22. August 1903.

— Rudolph Lipschitz, Professor der Mathematik an der Universität in Bonn, geboren in Heidelberg den 14. Mai 1832, gestorben den 7. Oktober 1903.

— Christian August Nagel, früher Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Dresden, geboren in Grünberg bei Radeberg den 17. Mai 1821, gestorben 1903.

— Gustav Adolph von Peschka, früher Professor an der Technischen Hochschule in Wien, geboren in Joachimsthal den 30. August 1830, gestorben 1903.

— Hamilton Lamphere Smith, früher Professor der Mathematik und Astronomie am „Hobart college" in Geneva, N. Y., geboren in New London, Conn., den 5. November 1819, gestorben daselbst den 1. August 1903.

— Simon Subic, Professor der Physik an der Universität in Graz, geboren in Brodeh (Krain) den 28. Oktober 1830, gestorben den 27. Juli 1903.

— Hudson A. Wood, Lehrer der Mathemathik in Vernon, N. Y., gestorben den 28. Oktober 1903, 62 Jahre alt.

Eine neue mathematische Encyklopädie.

— Eine *Encyklopädie der Elementar-Mathematik* von H. Weber und J. Wellstein ist jetzt im Erscheinen. Das Werk richtet sich in erster Linie an die Lehrer, aber die Herausgeber beabsichtigen auch, daß es für die Studierenden von Wert werden soll. Der erste, von H. Weber bearbeitete Teil, umfassend die Elementare Algebra und Analysis, ist schon erschienen (Leipzig, Teubner 1903; XIV + 447 S.), und in Angriff genommen sind noch zwei Teile (Geometrie, Anwendungen der Mathematik). Historische und literarische Angaben kommen sehr spärlich vor; in betreff solcher Angaben verweisen die Herausgeber auf einen kommenden Artikel über Elementarmathematik in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, worin sehr zuverlässige und vollständige historische und literarische Notizen über alle Fragen, die zur Elementarmathematik gerechnet werden können, geboten werden sollen.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik und Astronomie.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Foerster für das Wintersemester 1903—1904 eine Vorlesung über Geschichte der arabischen und mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor Fr. Graefe für das Wintersemester 1903—1904 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor W. F. Wislicenus für das Wintersemester 1903—1904 eine Vorlesung über die neuere Geschichte der Astronomie angekündigt.

— A l'université de Neuchâtel, M. L. Isely fera, pendant le semestre d'hiver 1903—1904, un cours (3 heures par semaine) sur l'historie des mathématiques dans la Suisse française.

— An der Universität in Brünn hat Professor F. Obenrauch für das Wintersemester 1903—1904 eine Vorlesung über Geschichte der Geometrie angekündigt.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Academia de ciencias de Madrid* Concurso del año 1904. Sucinta exposición de los principios fundamentales de la Nomografía estrictamente necesarios para la composición y fácil intelligencia de un sistema de ábacos ó nomogramas, desconocidas hasta ahora, y aplicables,



con manifiesta ventaja sobre cualquier otro procedimiento, á la resolución de una serie de cuestiones, interesantes en teoría, y de utilidad en la práctica, referentes á las ciencias físico-matemáticas.

— *Istituto Veneto delle scienze, lettere ed arti.* Tema di premio par l'anno 1906. Perfezionare in qualche punto importante la geometria proiettiva delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad *n* dimensioni.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1903.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1903 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Kassel 21.—24. September statt, in Gemeinschaft mit der Abteilung I der 75. Deutschen Naturforscherversammlung. In der ersten Sitzung erstattete Herr G. Scheffers einen Bericht über Lie's Theorie der Integration von Differentialgleichungen. Herr R. Fricke referierte in derselben Sitzung über neuere englische Lehrpläne und Lehrbücher der Elementarmathematik, und Herr E. Lampe sprach über die wissenschaftliche Wirksamkeit von M. Hamburger. In der zweiten Sitzung gab Herr H. Burkhardt ein Résumé seines Berichtes über oscillierende Funktionen. Die vierte Sitzung brachte einen Bericht von Herrn P. Stäckel über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten. Weitere Vorträge wurden gehalten von den Herren F. Bernstein, O. Blumenthal, L. Boltzmann, M. Brendel, G. Cantor, K. Geissler, G. Hamel, L. Heffter, D. Hilbert, C. Juel, H. Liebmann, Manno, H. Maschke, R. Mehmke, W. Fr. Meyer, H. Minkowski, L. Prandtl, A. Schönflies, P. H. Schoute, J. Wellstein, W. Wien, H. Wiener. Einige dieser Vorträge gaben zu lebhafter Diskussion Anlaß, u. a. der Vortrag des Herrn K. Geissler, der sich auf mathematisch-philosophische Fragen bezog. — Die Frage der Gründung einer Mathematischen Zentralbibliothek wurde vertagt, aber einer „Bibliographischen Kommission", bestehend aus den Herren A. Gutzmer, F. Müller, E. Wölffing wurde der Auftrag gegeben, die Einrichtung einer mathematisch-bibliographischen Zentralstelle vorzubereiten. — Herr E. Lampe, der genötigt wird, im Laufe des Jahres 1904 von der Redaktion des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik zurückzutreten, richtete an die Versammlung die Bitte, für den Fortbestand des Unternehmens Sorge zu tragen, und der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wurde beauftragt, Maßregeln zu ergreifen, wodurch die fortgesetzte Herausgabe des Jahrbuches gesichert werden könnte.

Vermischtes.

— Die preußische Akademie der Wissenschaften hat Herrn H. A. Schwarz zur Herstellung eines Katalogs der Literatur über Minimalflächen 250 Mark bewilligt.

— Unter dem Titel *Revista de matemáticas* hat Herr Luis A. Silva im Jahre 1903 eine neue Zeitschrift begründet, die vorzugsweise die Elementarmathematik behandeln wird und in Monatsheften erscheint.

Namenregister.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.

